LEÇONS

SUR LA

THÉORIE DES FORMES

ET LA

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE SUPÉRIEURE.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
26495 Quai des Grands-Augustins, 55.

LEÇONS

SUR LA

THÉORIE DES FORMES

ET LA

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE SUPÉRIEURE,

A L'USAGE DES ÉTUDIANTS DES FACULTÉS DES SCIENCES,

PAR

H. ANDOYER,

Maître de Conférences et chargé de Cours
la Faculté des Sciences de l'Université de Paris.

TOME I.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1900

AVANT-PROPOS.

Comme l'indique le titre de cet Ouvrage, je me suis proposé, en l'écrivant, d'exposer d'une façon didactique la Théorie des Formes et son interprétation géométrique générale.

Ce premier Volume est consacré aux formes binaires et ternaires, et à celles qui en dérivent; par suite, aussi, aux espaces à une et à deux dimensions. On trouvera dans le Tome II la théorie des formes quaternaires et son application aux espaces à trois dimensions.

J'ai écarté systématiquement de mon exposition, sauf dans quelques cas particuliers, ce qu'on pourrait appeler la partie arithmétique de la Théorie des Formes, c'est-à-dire celle qui s'occupe de la formation des *systèmes complets* d'invariants. Je me contenterai de rappeler à cet égard les beaux travaux de MM. P. Gordan et D. Hilbert.

Je me suis attaché à l'étude des formes et des systèmes de formes les plus simples, de façon à embrasser, sous un point de vue unique, la plupart des théories algébriques de la Géométrie Analytique.

D'ailleurs, afin d'éviter des répétitions et d'obtenir une plus grande uniformité, j'ai adopté, dans l'interprétation géométrique, une terminologie spéciale, facilitant l'application aux différents cas particuliers d'un résultat exprimé en termes généraux.

J'aurais voulu pouvoir joindre au texte une bibliographie complète des questions traitées; mais le caractère

didactique de l'Ouvrage s'y opposait. On trouvera dans le Tome II une liste des principaux ouvrages et mémoires se rapportant à l'ensemble des théories exposées. Je m'empresse de dire dès maintenant que j'ai beaucoup emprunté en particulier aux travaux bien connus de MM. Darboux, F. Klein, P. Gordan, Deruyts, S. Lie, Cayley, Clebsch, Salmon, Laguerre, Reye.

Qu'il me soit permis encore ici d'adresser mes plus vifs remercîments à M. Gauthier-Villars qui a bien voulu accueillir cet Ouvrage et apporter tous ses soins à son exécution typographique.

H. Andoyer.



LEÇONS

SUR LA

THÉORIE DES FORMES

ET LA

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE SUPÉRIEURE.

LIVRE I.

LA GÉOMÉTRIE BINAIRE.

CHAPITRE I.

THÉORIE GÉNÉRALE DES INVARIANTS DES SYSTÈMES BINAIRES.

---

1. La Géométrie analytique n'est pas seulement l'application de l'Analyse à la Géométrie. Si, en effet, inversement, on cherche à interpréter les diverses théories qui constituent l'Analyse en leur appliquant le langage géométrique, on est amené à concevoir et à créer une Géométrie plus générale, qui comprend comme cas particulier la Géométrie ordinaire, et dont l'étude facilite singulièrement l'intelligence de cette dernière.

Cette Géométrie générale s'est développée de plusieurs façons, en particulier comme interprétation de la théorie des formes algébriques : nous l'étudierons exclusivement à ce point de vue si fécond, nous proposant d'en rechercher les principes fondamentaux. C'est à cette étude que nous donnons le nom de *Géométrie analytique supérieure*.

Nous nous bornerons d'ailleurs aux formes qui résultent de la considération de deux, trois ou quatre variables primitives. A ces différents cas correspondent la *Géométrie binaire*, la *Géométrie ternaire* et la *Géométrie quaternaire*. Dans leur ensemble, ces trois Géométries correspondent à la Géométrie ordinaire : nous les étudierons successivement en même temps que les formes algébriques qui les engendrent.

I. — Les formes binaires. Définitions et généralités.

2. Soient x_1 et x_2 deux variables pouvant prendre toutes les valeurs possibles, réelles ou imaginaires : on peut associer ensemble deux valeurs déterminées quelconques, y_1 et y_2, attribuées à ces deux variables, et définir ainsi un *élément géométrique* (y).

Si nous supposons que x_1 et x_2 restent toujours finies toutes deux et ne s'annulent pas en même temps, et si nous faisons en outre la convention que deux éléments (y) et (z) sont identiques quand on a $y_1 z_2 - y_2 z_1 = 0$, ou, pour abréger, $(yz) = 0$, et seulement dans ce cas, nous aurons ainsi défini un ensemble *simplement infini* et continu d'éléments (x) : à chaque valeur du rapport $\frac{x_2}{x_1}$, par exemple, correspond un élément (x) et un seul, et réciproquement.

Nous dirons par suite que ces éléments (x) remplissent ou constituent un *espace à une dimension*, E.

Les quantités y_1 et y_2, ou plus généralement, ρy_1 et ρy_2, ρ étant une quantité quelconque, finie et non nulle, sont les *coordonnées* de l'élément (y). Les éléments particuliers O_1 et O_2, qui correspondent respectivement aux hypothèses $x_2 = 0$ et $x_1 = 0$, sont les *éléments fondamentaux*, ou *éléments de référence*.

En Géométrie ordinaire, on peut appliquer ce que nous venons de dire aux exemples suivants : une droite et les points situés sur cette droite; une droite et les plans qui passent par cette droite; un point et un plan, avec les droites qui passent par ce point et sont situées dans ce plan; une courbe plane unicursale et ses points, ou bien ses tangentes; une courbe gauche unicursale et ses points, ou bien ses tangentes, ou bien encore ses plans osculateurs; un

faisceau linéaire ponctuel ou tangentiel de courbes planes ou de surfaces, etc.

3. Une forme linéaire par rapport aux variables x_1 et x_2, dont nous désignerons l'ensemble par (x), est $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2$, ou, pour abréger, $(\xi \mid x)$; égalée à zéro, elle définit un élément particulier dont les coordonnées sont $-\rho\xi_2$, $+\rho\xi_1$, et réciproquement. Par suite, on peut encore déterminer les éléments (x) à l'aide de nouvelles coordonnées (ξ), sous la condition $(\xi \mid x) = 0$, car les quantités ξ_1 et ξ_2 sont soumises aux restrictions imposées à x_1 et x_2. Pour un élément donné (x), les (x) seront les *coordonnées de première espèce,* tandis que les coefficients (ξ) de la forme linéaire qui, égalée à zéro, définit cet élément, en seront les *coordonnées de seconde espèce.*

$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 = 0$, où l'on regarde les (x) comme inconnues, est l'*équation* de l'élément ainsi défini, de coordonnées de seconde espèce (ξ). Les éléments fondamentaux O_1 et O_2 ont respectivement pour équations $x_2 = 0$, $x_1 = 0$.

On voit tout de suite que les (x) jouent, par rapport aux (ξ), le même rôle que ceux-ci par rapport aux (x), de sorte que $(\xi \mid x) = 0$, où les (ξ) sont regardées comme inconnues, est encore l'équation de l'élément (x) : les équations ainsi entendues de O_1 et O_2 sont $\xi_1 = 0$ et $\xi_2 = 0$.

Dans tout ce qui suit, les lettres latines et grecques seront affectées respectivement aux coordonnées de première et de seconde espèce.

On remarquera que l'introduction des variables de seconde espèce n'est pas indispensable en Géométrie binaire; mais elle permet d'étendre plus facilement les définitions et les résultats de cette Géométrie aux autres Géométries.

4. Une *forme binaire* est un polynôme entier et homogène séparément par rapport à diverses séries de variables de première ou de seconde espèce. Si f est une telle forme, des degrés p, q, ..., π, ρ, ... respectivement par rapport aux variables (x), (y), ..., (ξ), (η), ..., nous écrirons

$$= a_{x^p y^q \ldots \xi^\pi \eta^\rho \ldots}$$

$$= \sum \frac{P_p P_q \ldots P_\pi P_\rho \ldots}{P_{p_1} P_{p_2} P_{q_1} P_{q_2} \ldots P_{\pi_1} P_{\pi_2} P_{\rho_1} P_{\rho_2} \ldots} a_{p_1, p_2; q_1, q_2; \ldots \pi_1, \pi_2; \rho_1, \rho_2; \ldots} x_1^{p_1} x_2^{p_2} y_1^{q_1} y_2^{q_2} \ldots \xi_1^{\pi_1} \xi_2^{\pi_2} \eta_1^{\rho_1} \eta_2^{\rho_2} \ldots;$$

p_1, p_2, par exemple, désignent deux entiers non négatifs dont la somme est p; P_m désigne le produit $1.2.3\ldots m$, ou l'unité quand m est nul.

Les quantités $a_{p_1, p_2; \ldots}$ sont les *coefficients* de la forme; dans leur ensemble, nous les désignerons par (a).

Une forme égalée à zéro établit une relation entre les éléments variables dont elle contient les coordonnées; si, en particulier, elle ne contient qu'une seule série de variables, elle définit, dans le même cas, p éléments déterminés, si elle est d'ordre p. Une telle forme est déterminée, à un facteur près, par la condition de représenter, quand on l'égale à zéro, p éléments donnés, puisqu'elle contient $p+1$ coefficients.

Deux formes sont *semblables* si elles contiennent les mêmes variables aux mêmes degrés; elles sont équivalentes au point de vue géométrique si les rapports des coefficients entre eux sont les mêmes.

5. Un *système binaire* est un ensemble quelconque de formes binaires et de *variables binaires,* c'est-à-dire de variables telles que les (x), (y), ..., (ξ), (η), ..., ces variables pouvant d'ailleurs figurer ou ne pas figurer en tout ou en partie dans les formes. Les *éléments* qui constituent véritablement le système sont, avec les variables isolées, les coefficients des formes : les autres variables qui peuvent figurer dans ces formes ne jouent qu'un rôle analogue à celui de la variable d'intégration dans une intégrale définie.

6. Soit un coefficient de forme tel que $a_{p_1, p_2; q_1, q_2; \ldots; \pi_1, \pi_2; \rho_1, \rho_2; \ldots}$: le *poids* de ce coefficient par rapport à l'indice i est la somme

$$p_i + q_i + \ldots - \pi_i - \rho_i - \ldots.$$

Le poids d'une variable de première espèce x_j par rapport à l'indice i est -1 si $i=j$, 0 dans le cas contraire; le poids d'une variable de seconde espèce ξ_j par rapport à l'indice i est $+1$ si $i=j$, 0 dans le cas contraire. Le poids d'un monôme, produit de coefficients et de variables, par rapport à l'indice i est la somme des poids de ses facteurs par rapport au même indice. Une fonction entière, dont tous les termes sont de même poids

par rapport à l'indice i, est dite *isobarique* par rapport à cet indice; si elle est isobarique et de même poids par rapport aux deux indices 1 et 2, elle est simplement dite *isobarique*.

La forme f, par exemple, est isobarique, de poids zéro.

7. Soit une forme f considérée comme ne dépendant que des variables (x). Si la forme est de degré p, on peut mettre f sous la forme d'un produit de p facteurs linéaires et écrire

$$f = a_{x^p} = (\alpha^{(1)} \mid x)(\alpha^{(2)} \mid x)\ldots(\alpha^{(p)} \mid x),$$

où

$$(\alpha^{(i)} \mid x) = \alpha_1^{(i)} x_1 + \alpha_2^{(i)} x_2,$$

comme précédemment.

Les rapports tels que $\frac{\alpha_1^{(i)}}{\alpha_2^{(i)}}$ et le produit $\Pi\alpha_1^{(i)}$ sont seuls complètement déterminés.

Les éléments dont les équations sont $(\alpha^{(i)} \mid x) = 0$ sont les *éléments-racines,* ou simplement les *racines* de f; leurs coordonnées de seconde espèce sont les $(\alpha^{(i)})$.

Si h des facteurs $(\alpha^{(i)} \mid x)$ définissent la même racine, celle-ci est dite *multiple* d'ordre h pour f.

Si l'on fait $\alpha_1^{(i)} = a_2^{(i)}$, $\alpha_2^{(i)} = -a_1^{(i)}$, de sorte que les $(a^{(i)})$ sont les coordonnées de première espèce des racines, on peut écrire aussi

$$f = \Pi(xa^{(i)}),$$

où, comme plus haut,

$$(xa^{(i)}) = x_1 a_2^{(i)} - x_2 a_1^{(i)}.$$

Ce qu'on dit sur une forme telle que f peut, d'une façon générale, se répéter sur une forme φ qui ne dépend que des variables (ξ), avec les modifications convenables évidentes.

Considérons en particulier la forme φ obtenue en remplaçant, dans f, x_1 par $-\xi_2$ et x_2 par ξ_1; on aura

$$\varphi = \alpha_{\xi^p} = \Pi(\xi\alpha^{(i)}) = (-1)^p \Pi(a^{(i)} \mid \xi).$$

Les racines de φ sont les mêmes que celles de f; f et φ sont dites *équivalentes*.

8. L'identité

$$f = a_{x^p} = \Pi(\alpha^{(i)} \mid x)$$

fournit les relations

$$\alpha_1^{(1)}\alpha_1^{(2)}\alpha_1^{(3)}\ldots\alpha_1^{(p)} = a_{p,0},$$
$$\Sigma\alpha_2^{(1)}\alpha_1^{(2)}\alpha_1^{(3)}\ldots\alpha_1^{(p)} = p a_{p-1,1},$$
$$\Sigma\alpha_2^{(1)}\alpha_2^{(2)}\alpha_1^{(3)}\ldots\alpha_1^{(p)} = \frac{p(p-1)}{2} a_{p-2,2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha_2^{(1)}\alpha_2^{(2)}\alpha_2^{(3)}\ldots\alpha_2^{(p)} = a_{0,p}.$$

Les premiers membres de ces relations sont les fonctions symétriques fondamentales des racines de f.

Toute fonction symétrique des racines, entière et homogène de même degré m par rapport aux divers couples $(\alpha^{(i)})$, peut s'exprimer en fonction entière des (a), ou, ce qui revient au même, des fonctions symétriques fondamentales.

Ceci se démontre d'abord sans peine pour les fonctions de la forme

$$\sigma_m = \Sigma(\alpha_2^{(1)})^m(\alpha_1^{(2)})^m(\alpha_1^{(3)})^m\ldots(\alpha_1^{(p)})^m,$$

qui sont homogènes et de degré m par rapport aux (a), isobariques et des poids $m(p-1)$ et m par rapport aux indices 1 et 2, comme le montrent les formules connues de Newton pour le calcul des sommes des puissances semblables des racines d'une équation.

Considérons maintenant la fonction

$$S = \Sigma(\alpha_2^{(1)})^m(\alpha_1^{(2)})^{m_1}(\alpha_2^{(2)})^{m_2}(\alpha_1^{(3)})^m\ldots(\alpha_1^{(p)})^m,$$

où m_1 et m_2 sont deux entiers non négatifs de somme m ; on a

$$S(\alpha_1^{(1)}\alpha_1^{(2)}\ldots\alpha_1^{(p)})^{m_2} = \sigma_m\sigma_{m_2} - \sigma_{m+m_2},$$

le second membre devant être divisé par 2 si $m = m_2$.

Le second membre est évidemment divisible par $a_{p,0}^{m_2}$, puisque S ne peut pas devenir infinie; donc S est une fonction entière et homogène de degré m par rapport aux (a), isobarique et des poids $m_1 + m(p-2)$ et $m + m_2$ par rapport aux indices 1 et 2, d'après les propriétés des σ_m.

L'application répétée du même procédé conduit au théorème général; toute fonction symétrique telle que

$$\Sigma(\alpha_1^{(1)})^{m_1^{(1)}}(\alpha_2^{(1)})^{m_2^{(1)}}(\alpha_1^{(2)})^{m_1^{(2)}}(\alpha_2^{(2)})^{m_2^{(2)}}\ldots(\alpha_1^{(p)})^{m_1^{(p)}}(\alpha_2^{(p)})^{m_2^{(p)}},$$

où les exposants sont des entiers non négatifs tels que

$$m_1^{(i)} + m_2^{(i)} = m,$$

est une fonction entière et homogène de degré m par rapport aux (a), isobarique et des poids respectifs $\Sigma m_1^{(i)}$ et $\Sigma m_2^{(i)}$ par rapport aux indices 1 et 2.

9. Soit F une fonction entière et homogène de degré m par rapport à des variables en nombre quelconque $u_1, u_2, u_3, \ldots$. Remplaçons u_i par $u_i + \lambda v_i$, les v_i étant quelconques, et développons F par rapport aux puissances de λ; le coefficient de $\frac{P_m}{P_h P_{m-h}} \lambda^h$ est ce qu'on appelle d'une façon générale la *polaire d'ordre h* de F, relative aux (u) remplacées par les (v). Si nous désignons cette polaire par $D_{uv}^h F$, on a évidemment

$$D_{uv}^h F = \frac{P_{m-h}}{P_m} \left(v_1 \frac{\partial F}{\partial u_1} + v_2 \frac{\partial F}{\partial u_2} + v_3 \frac{\partial F}{\partial u_3} + \ldots \right)^h,$$

la puissance qui figure au second membre étant symbolique, c'est-à-dire que, dans son développement, le produit

$$\left(\frac{\partial F}{\partial u_1}\right)^{h_1} \left(\frac{\partial F}{\partial u_2}\right)^{h_2} \left(\frac{\partial F}{\partial u_3}\right)^{h_3} \cdots,$$

où

$$h_1 + h_2 + h_3 + \ldots = h,$$

doit être remplacé par $\frac{\partial^h F}{\partial u_1^{h_1} \partial u_2^{h_2} \partial u_3^{h_3} \ldots}$.

Pour $h = 0$, la polaire est la fonction F elle-même; pour $h = m$, la polaire est la fonction F où l'on a remplacé les (u) par les (v); d'une façon générale, le degré de la polaire par rapport aux (u) est diminué de h, tandis que son degré par rapport aux (v) est augmenté de h, et est simplement h si F ne contient pas les (v). On peut envisager les polaires des polaires de F, et ainsi de suite, c'est-à-dire des *polaires multiples* de F, si F dépend de plusieurs séries de variables (u), (u'), ... On a évidemment

$$D_{uv}^k (D_{uv}^h F) = D_{uv}^h (D_{uv}^k F) = D_{uv}^{h+k} F,$$

les (v) étant indépendants des (u); plus généralement, on a l'identité

$$D_{u'v'}^k (D_{uv}^h F) = D_{uv}^h (D_{u'v'}^k F),$$

sous la condition unique que les quantités (u) et (v') sont indépendantes les unes des autres et qu'il en est de même des quantités (u') et (v).

Dans ces mêmes cas, les polaires multiples se représentent immédiatement sous forme de produits symboliques analogues aux puissances symboliques employées ci-dessus.

10. En particulier, on peut envisager les polaires d'une forme binaire considérée comme fonction des variables. Si f est une telle forme

$$f = a_{x^p y^q z^r t^s \ldots \xi^\pi \eta^\rho \ldots},$$

nous écrirons, par exemple,

$$D^{\mu}_{\xi\eta}[D^{k}_{zt}(D^{h}_{xy} f)] = a_{x^{p-h} y^{q+h} z^{r-k} t^{s+k} \ldots \xi^{\pi-\mu} \eta^{\rho+\mu} \ldots},$$

à condition toutefois qu'il n'en résulte aucune ambiguïté, ce qui revient à supposer que l'on peut intervertir l'ordre des opérations représentées par les symboles D.

Si f ne dépend que des variables (x), soit $f = a_{x^p}$, la polaire $a_{x^{p-h} y^h}$ définit, quand on l'égale à zéro et que l'on regarde (y) comme un élément donné, $p-h$ éléments qui forment le *système polaire* d'ordre h de (y). Si (x) appartient à ce système, inversement (y) appartient au système polaire d'ordre $p-h$ de (x), car on a

$$D^{h}_{xy} f(x) = D^{p-h}_{yx} f(y).$$

On pourra aussi envisager les polaires d'une fonction F des coefficients (a) et (b) de deux formes semblables relatives aux (a) remplacés par les (b).

II. — Les substitutions linéaires.

11. Considérons un système binaire quelconque S, et faisons sur les variables (x), (y), ..., de première espèce, *une substitution linéaire* σ, de façon à introduire de nouvelles variables (x'), (y'), ... définies par les relations

$$x_1 = \lambda_{11} x'_1 + \lambda_{12} x'_2, \qquad y_1 = \lambda_{11} y'_1 + \lambda_{12} y'_2,$$
$$x_2 = \lambda_{21} x'_1 + \lambda_{22} x'_2, \qquad y_2 = \lambda_{21} y'_1 + \lambda_{22} y'_2, \qquad \ldots.$$

Le déterminant

$$\delta = \lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}\lambda_{21}$$

de la substitution est supposé essentiellement différent de zéro, de façon qu'on puisse écrire inversement

$$\begin{aligned} \delta x'_1 &= \lambda_{22}x_1 - \lambda_{12}x_2, & \delta y'_1 &= \lambda_{22}y_1 - \lambda_{12}y_2, \\ \delta x'_2 &= -\lambda_{21}x_1 + \lambda_{11}x_2, & \delta y'_2 &= -\lambda_{21}y_1 + \lambda_{11}y_2, & \quad \ldots . \end{aligned}$$

Des formes linéaires telles que $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2$, $\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2$, ... deviendront $\xi'_1 x'_1 + \xi'_2 x'_2$, $\eta'_1 x'_1 + \eta'_2 x'_2$, ... et l'on aura par suite

$$\begin{aligned} \xi'_1 &= \lambda_{11}\xi_1 + \lambda_{21}\xi_2, & \eta'_1 &= \lambda_{11}\eta_1 + \lambda_{21}\eta_2, \\ \xi'_2 &= \lambda_{12}\xi_1 + \lambda_{22}\xi_2, & \eta'_2 &= \lambda_{12}\eta_1 + \lambda_{22}\eta_2, & \quad \ldots, \end{aligned}$$

ou inversement

$$\begin{aligned} \delta\xi_1 &= \lambda_{22}\xi'_1 - \lambda_{21}\xi'_2, & \delta\eta_1 &= \lambda_{22}\eta'_1 - \lambda_{21}\eta'_2, \\ \delta\xi_2 &= -\lambda_{12}\xi'_1 + \lambda_{11}\xi'_2, & \delta\eta_2 &= -\lambda_{12}\eta'_1 + \lambda_{11}\eta'_2, & \quad \ldots \end{aligned}$$

Les variables de seconde espèce se trouvent donc, elles aussi, transformées par une substitution linéaire, dite *substitution transposée* de celle faite sur les (x), (y), ... et dont le déterminant est $\frac{1}{\delta}$.

Transformons ainsi toutes les variables de première ou de seconde espèce qui entrent dans le système S, et aussi celles qui figurent dans les formes f, g, ... de ce système : il est bien entendu d'ailleurs que si dans S figure une forme linéaire $(\alpha \mid x)$, par exemple, où les (α) sont *constants,* on ne transforme que les (x). On obtient ainsi un nouveau système S', composé des nouvelles variables et des nouvelles formes f', g', ..., qui est dit *transformé* du système S par la substitution σ.

Il est évident que les nouvelles formes f', g', ... sont respectivement des mêmes degrés par rapport aux diverses séries de variables nouvelles que les anciennes formes f, g, ... par rapport aux séries correspondantes de variables anciennes. Si donc on avait

$$f = a_{x^p y^q \ldots \xi^\varpi \eta^\rho \ldots}, \qquad \ldots,$$

nous écrirons

$$f' = a'_{x'^p y'^q \ldots \xi'^\varpi \eta'^\rho \ldots}, \qquad \ldots .$$

Les relations entre les coefficients (a) et (a') de deux formes

transformées l'une de l'autre, telles que f et f', sont faciles à former. On a

$$f' = f\left(\lambda_{11}x'_1 + \lambda_{12}x'_2,\ \lambda_{21}x'_1 + \lambda_{22}x'_2;\ \ldots,\ \frac{\lambda_{22}}{\delta}\xi'_1 - \frac{\lambda_{21}}{\delta}\xi'_2,\ -\frac{\lambda_{12}}{\delta}\xi'_1 + \frac{\lambda_{11}}{\delta}\xi'_2;\ \ldots\right);$$

désignons alors par $(\bar{x})$, $(\bar{y})$, ..., $(\bar{\xi})$, $(\bar{\eta})$, ... de nouvelles variables ne figurant pas dans f, et considérons la polaire multiple

$$a_{x^{p_1}\bar{x}^{p_2}y^{q_1}\bar{y}^{q_2}\ldots\xi^{\pi_1}\bar{\xi}^{\pi_2}\eta^{\rho_1}\bar{\eta}^{\rho_2}\ldots},$$

où

$$p_1 + p_2 = p, \qquad \ldots, \qquad \pi_1 + \pi_2 = \pi, \qquad \ldots$$

Le coefficient

$$a'_{p_1,p_2;q_1,q_2;\ldots;\pi_1,\pi_2;\rho_1,\rho_2;\ldots}$$

est évidemment égal à la valeur de cette polaire lorsqu'on y fait :

$$x_1 = y_1 = \ldots = \lambda_{11}, \qquad \xi_1 = \eta_1 = \ldots = \frac{\lambda_{22}}{\delta},$$

$$x_2 = y_2 = \ldots = \lambda_{21}, \qquad \xi_2 = \eta_2 = \ldots = -\frac{\lambda_{12}}{\delta},$$

$$\bar{x}_1 = \bar{y}_1 = \ldots = \lambda_{12}, \qquad \bar{\xi}_1 = \bar{\eta}_1 = \ldots = -\frac{\lambda_{21}}{\delta},$$

$$\bar{x}_2 = \bar{y}_2 = \ldots = \lambda_{22}, \qquad \bar{\xi}_2 = \bar{\eta}_2 = \ldots = \frac{\lambda_{11}}{\delta}.$$

Les (a) s'expriment aussi facilement à l'aide des (a').

Si le système S est constitué par n couples de variables et par des formes dont les coefficients sont en nombre total N, nous avons ainsi $P = 2n + N$ relations distinctes entre les P éléments constitutifs du système S et les P éléments correspondants du système transformé S'; ces P relations dépendent d'ailleurs des quatre coefficients (λ) de la substitution σ.

12. Les relations dont nous venons de parler forment un système de P *équations de transformation* pour les éléments du système S, dépendant des quatre paramètres (λ). Ces équations sont linéaires par rapport aux P anciens éléments, et si on les met sous forme entière, le déterminant des coefficients de ces P anciens éléments est une fonction des (λ), qui est nécessairement une puissance de δ, puisque inversement on peut exprimer les anciens éléments à l'aide des nouveaux, sans ambiguïté, quand δ

n'est pas nul, et que δ est un polynome irréductible par rapport aux (λ).

Si l'on considère les coefficients (λ) comme pouvant prendre toutes les valeurs possibles (δ n'étant pas nul), nous avons ainsi un ensemble quadruplement infini de transformations, ou encore un ensemble de transformations à quatre paramètres *essentiels;* en outre, cet ensemble est évidemment *continu*.

Cet ensemble de transformations forme un *groupe,* c'est-à-dire que si l'on fait deux transformations consécutives, définies par des formules telles que

$$x_1 = \lambda_{11}x'_1 + \lambda_{12}x'_2, \qquad x'_1 = \mu_{11}x''_1 + \mu_{12}x''_2,$$
$$x_2 = \lambda_{21}x'_1 + \lambda_{22}x'_2, \quad \ldots, \qquad x'_2 = \mu_{21}x''_1 + \mu_{22}x''_2, \quad \ldots,$$

qui, à partir du système S, conduisent successivement aux systèmes S′ et S″, on peut passer directement du système S au système S″ par une transformation appartenant à l'ensemble. En effet, les formules précédentes donnent

$$x_1 = (\lambda_{11}\mu_{11} + \lambda_{12}\mu_{21})x''_1 + (\lambda_{11}\mu_{12} + \lambda_{12}\mu_{22})x''_2,$$
$$x_2 = (\lambda_{21}\mu_{11} + \lambda_{22}\mu_{21})x''_1 + (\lambda_{21}\mu_{12} + \lambda_{22}\mu_{22})x''_2,$$

et l'on voit que l'on est ramené, pour passer de S à S″, à faire usage d'une substitution linéaire analogue à σ, dont le déterminant est d'ailleurs le produit des déterminants des substitutions intermédiaires.

Ce *groupe à quatre paramètres* est *fini* et *continu,* au sens de M. Sophus Lie. Il contient en particulier la substitution *identique,* qui laisse tous les éléments inchangés; il suffit de faire $\lambda_{11} = \lambda_{22} = 1$, $\lambda_{12} = \lambda_{21} = 0$. Enfin, les transformations du groupe sont *inverses* deux à deux : car, après avoir passé de S à S′, on peut passer de S′ à S en remplaçant $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{21}, \lambda_{22}$, par $\frac{\lambda_{22}}{\delta}$, $-\frac{\lambda_{12}}{\delta}$, $-\frac{\lambda_{21}}{\delta}$, $\frac{\lambda_{11}}{\delta}$.

Telles sont les propriétés fondamentales des substitutions linéaires; elles ne leur sont pas particulières, mais ce sont elles qui constituent le fondement de leur théorie.

13. La substitution linéaire σ peut être facilement interprétée au point de vue géométrique. Les nouvelles variables (x'),

(y'), ..., (ξ'), (η'), ... peuvent être considérées comme de nouvelles coordonnées; car x'_1 et x'_2 par exemple ne s'annulent pas en même temps, et aucune de ces quantités ne devient jamais infinie, si ces mêmes conditions sont vérifiées pour x_1 et x_2, ce que nous supposons; de plus, les rapports $\frac{x'_2}{x'_1}$ et $\frac{x_2}{x_1}$ varient ou restent constants en même temps, et peuvent prendre chacun toutes les valeurs possibles. Enfin, si (x) et (ξ) représentent le même élément, (x') et (ξ') sont de même des coordonnées d'espèce différente correspondantes, puisque $(\xi \mid x)$ se change en $(\xi' \mid x')$.

Les nouvelles variables peuvent donc être regardées comme les coordonnées d'une nouvelle série d'éléments géométriques. Alors on peut imaginer les trois cas suivants.

I. Les nouveaux éléments géométriques sont différents des anciens et remplissent un espace E′ différent de l'espace E, de sorte que la condition $(xx') = 0$ perd tout sens géométrique de coïncidence.

La substitution σ établit alors, entre les éléments des deux espaces E et E′, une correspondance doublement univoque, *sans exception* : à chaque élément de E correspond un élément et un seul de E′, et inversement.

Réciproquement, toute substitution établissant entre les éléments de E et de E′ une telle correspondance, doublement univoque sans exception, sera une substitution linéaire à déterminant non nul, telle que σ.

Une telle correspondance est dite *homographique* et est appelée aussi *collinéation;* les deux espaces E et E′ sont *homographiques* ou *collinéaires*.

II. Les nouveaux éléments géométriques sont les mêmes que les anciens et remplissent le même espace E, qui est ainsi rempli deux fois : une fois par les éléments (x), ... et une fois par les éléments (x'), ... ; la condition $(xx') = 0$ conserve ou perd son caractère géométrique de coïncidence suivant que l'on considère ou non comme identiques les systèmes de coordonnées auxquels sont rapportées les deux séries des (x), ... et des (x'), ...

Les éléments de ces deux séries se correspondent homographiquement comme dans le premier cas; réciproquement, si

l'espace E est considéré comme rempli par les deux séries d'éléments (x), ... et (x') ..., et si ces deux séries sont homographiques, ce fait est exprimé par l'existence d'une substitution linéaire telle que σ.

III. Les nouveaux éléments géométriques non seulement remplissent le même espace E que les anciens, mais encore chaque élément (x) coïncide avec l'élément (x') que lui fait correspondre la substitution σ. Celle-ci définit alors un *changement de coordonnées;* les éléments fondamentaux O'_1, O'_2 du nouveau système ont respectivement pour coordonnées de première espèce dans l'ancien système $(\lambda_{11}, \lambda_{21})$, $(\lambda_{12}, \lambda_{22})$; ils peuvent coïncider avec ceux de l'ancien système, même sans que la substitution σ se réduise à la substitution identique. La condition $(xx') = 0$ exprime ici que l'élément (x) ou (x') a mêmes coordonnées dans les deux systèmes.

Réciproquement, tout changement de coordonnées est défini par une substitution telle que σ, puisqu'il doit en résulter entre les (x) et les (x') une correspondance doublement univoque sans exception.

14. D'une façon générale, quelle que soit la façon dont on envisage la substitution σ, une forme f égalée à zéro établissant une relation entre les coordonnées des éléments qui y figurent, la forme f', transformée de f par la substitution σ, établit, quand on l'égale à zéro, la relation correspondante entre les nouvelles coordonnées des éléments qui correspondent aux premiers. Si, en particulier, f ne dépend que d'une seule série de variables, $f = 0$ définit des éléments fixes; $f' = 0$ définit par leurs nouvelles coordonnées les éléments qui correspondent à ceux-là.

15. Tandis qu'au point de vue analytique, la substitution σ dépend des quatre paramètres (λ), il est évident que, au point de vue géométrique, elle ne dépend que de trois paramètres qui sont les rapports des (λ) entre eux; en effet, un élément ne dépend que du rapport de ses deux coordonnées, et, pour définir une homographie ou un changement de coordonnées, il suffit d'écrire

$$\frac{\lambda_{11} x'_1 + \lambda_{12} x'_2}{x_1} = \frac{\lambda_{21} x'_1 + \lambda_{22} x'_2}{x_2}.$$

Il en résulte par exemple qu'une homographie est déterminée par trois couples d'éléments correspondants; qu'un changement de coordonnées est déterminé par la connaissance des nouvelles coordonnées de trois éléments.

16. Les substitutions σ formant un groupe, il en résulte que l'on peut dire :

1° Plusieurs changements de coordonnées successifs équivalent à un seul;

2° Deux séries d'éléments collinéaires à une même troisième sont collinéaires entre elles;

3° Un changement quelconque de coordonnées n'altère pas l'homographie de deux séries; et, en particulier, si deux séries remplissant le même espace sont collinéaires, on peut toujours, sans diminuer la généralité, supposer les éléments des deux séries rapportés au même système de coordonnées.

III. — Les Invariants absolus.

17. Désignons par $e_1, e_2, \ldots e_i, \ldots e_P$, ou simplement par (e), l'ensemble des éléments qui constituent le système S, et de même par (e') l'ensemble des éléments du système transformé S'. Les équations de transformation sont de la forme

$$e'_i = f_i(e, \lambda),$$

en nombre P, les f_i étant linéaires par rapport aux (e), rationnelles par rapport aux (λ) et ne pouvant contenir d'autres dénominateurs que des puissances de δ.

Considérons la matrice M

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial \lambda_{11}} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \lambda_{12}} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \lambda_{21}} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \lambda_{22}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_i}{\partial \lambda_{11}} & \dfrac{\partial f_i}{\partial \lambda_{12}} & \dfrac{\partial f_i}{\partial \lambda_{21}} & \dfrac{\partial f_i}{\partial \lambda_{22}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_P}{\partial \lambda_{11}} & \dfrac{\partial f_P}{\partial \lambda_{12}} & \dfrac{\partial f_P}{\partial \lambda_{21}} & \dfrac{\partial f_P}{\partial \lambda_{22}} \end{matrix} \right\|,$$

et supposons que les déterminants d'ordre $p (p \leqq 4)$ tirés de cette matrice ne soient pas tous nuls, tandis que (si $p < 4$) les déterminants analogues d'ordre $p + 1$ sont tous identiquement nuls : sauf des cas très particuliers, p sera égal à 4.

Alors, comme l'on sait, l'élimination des (λ) entre les équations de transformation conduit à $P - p$ relations distinctes entre les (e') et les (e); ces relations peuvent être supposées résolues par rapport à autant d'éléments (e'), convenablement choisis, et écrites, par exemple, sous la forme

$$e'_i = \varphi_i(e, e'_1, e'_2, \ldots, e'_p), \qquad i > p;$$

les φ_i sont des fonctions algébriques distinctes.

Ceci posé, imaginons que, à l'aide d'une nouvelle substitution linéaire, on passe des (e') aux (e''), comme précédemment; on aura alors des relations telles que

$$e''_i = \varphi_i(e', e''_1, e''_2, \ldots, e''_p);$$

d'autre part, puisqu'on peut passer directement des (e) aux (e'') à l'aide d'une substitution linéaire, on a aussi

$$e''_i = \varphi_i(e, e''_1, e''_2, \ldots, e''_p),$$

et, par suite,

$$\varphi_i(e', e''_1, e''_2, \ldots, e''_p) = \varphi_i(e, e''_1, e''_2, \ldots, e''_p) \qquad (i > p),$$

et cela quelles que soient les valeurs attribuées à $e''_1, e''_2, \ldots, e''_p$.

Les $P - p$ relations distinctes qui lient les (e') aux (e) peuvent donc être mises sous une forme particulièrement intéressante qui montre l'existence de $P - p$ fonctions $\varphi_i(e)$ qui ne changent pas de valeur quand on y remplace les (e) par les (e').

Si, d'une façon générale, nous appelons *invariant absolu* du système S toute fonction F des éléments (e) qui ne change pas de valeur quand on y remplace les (e) par les (e'), c'est-à-dire encore telle que la relation

$$F(e') = F(e)$$

devienne une identité quand on y remplace les (e') par leurs expressions en fonction des (e) et des (λ), nous voyons que les $P - p$ relations distinctes qui lient entre eux les (e) et les (e') sont exprimées par l'existence de $P - p$ invariants absolus distincts que l'on peut former comme nous venons de le dire.

Toute fonction de ces invariants absolus est elle-même un invariant absolu; et réciproquement, si l'on imagine un invariant absolu quelconque, il est nécessairement une fonction de ceux que nous venons de former, puisque, dans le cas contraire, il établirait entre les (e) et les (e') une nouvelle relation distincte de celles déjà établies, ce qui est impossible.

18. L'étude des invariants absolus d'un système binaire S est particulièrement importante; pour les connaître tous il suffit, d'après ce qui précède, d'en connaître $P-p$ qui soient distincts, puisque tous les autres sont fonctions de ceux-là. Nous avons appris à en former un tel nombre, qui sont algébriques; soit φ_i l'un d'entre eux : si φ_i est susceptible de prendre k valeurs, il est racine d'une équation entière de degré k, dont le premier terme est φ_i^k, et dans laquelle les autres puissances de φ_i ont pour coefficients des fonctions rationnelles des (e) qui sont évidemment, elles aussi, des invariants absolus. On peut donc toujours former un système de $P-p$ invariants absolus distincts, qui soient rationnels par rapport aux (e). Les invariants absolus que nous considérerons seront toujours dans ce cas. Tout ceci suppose d'ailleurs $P > p$; dans le cas contraire, il n'y a aucun invariant absolu.

19. Au point de vue géométrique, les seuls invariants absolus intéressants sont évidemment ceux qui sont homogènes et de degré zéro par rapport aux diverses séries de variables et de coefficients qui y figurent. L'existence d'un tel invariant correspond à une propriété géométrique du système S, propriété qui se traduit par l'existence d'un nombre qui ne change pas de valeur quand on fait une transformation de coordonnées quelconque, ou encore quand on remplace ce système par celui qui lui correspond dans une homographie quelconque. Une telle propriété est dite *invariante absolue*, ou *projective absolue*.

Réciproquement, à toute propriété de cette nature correspond évidemment l'existence d'un invariant absolu dans les conditions énoncées plus haut, soit, pour abréger, d'un *invariant absolu géométrique*.

20. Il est facile de prévoir que les invariants absolus d'un sys-

tème S, considérés comme fonctions des éléments de ce système, doivent vérifier un système de p équations linéaires et homogènes, aux dérivées partielles, formant un *système complet,* puisque ce sont des fonctions arbitraires de $P - p$ quelconques d'entre eux, distincts.

Pour former ces équations aux dérivées partielles, remarquons que toute substitution linéaire σ peut être obtenue en combinant ensemble un certain nombre de substitutions des formes particulières suivantes

$$\begin{cases} x_1 = h x'_1, \\ x_2 = x'_2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = x'_1 + k x'_2, \\ x_2 = x'_2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = x'_1, \\ x_2 = l x'_1 + x'_2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = x'_1, \\ x_2 = m x'_2. \end{cases}$$

Si, en effet, on a $\lambda_{22} \neq 0$, en faisant

$$\begin{cases} x_1 = x''_1 + \dfrac{\lambda_{12}}{\lambda_{22}} x''_2, \\ x_2 = x''_2, \end{cases} \quad \begin{cases} x''_1 = \dfrac{\delta}{\lambda_{22}} x'''_1, \\ x''_2 = x'''_2, \end{cases} \quad \begin{cases} x'''_1 = x^{\text{IV}}_1, \\ x'''_2 = \lambda_{22} x^{\text{IV}}_2, \end{cases} \quad \begin{cases} x^{\text{IV}}_1 = x'_1, \\ x^{\text{IV}}_2 = \dfrac{\lambda_{21}}{\lambda_{22}} x'_1 + x'_2, \end{cases}$$

on a

$$\begin{cases} x_1 = \lambda_{11} x'_1 + \lambda_{12} x'_2, \\ x_2 = \lambda_{21} x'_1 + \lambda_{22} x'_2. \end{cases}$$

Si $\lambda_{22} = 0$, sans que λ_{11} soit nul, on aura des formules analogues en intervertissant les indices 1 et 2. Si $\lambda_{11} = \lambda_{22} = 0$, on est ramené au cas précédent en faisant, par exemple,

$$\begin{cases} x_1 = \lambda_{12} x''_2, \\ x_2 = \lambda_{21} x''_1 + x''_2, \end{cases} \quad \begin{cases} x''_1 = x'_1 - \dfrac{1}{\lambda_{21}} x'_2, \\ x''_2 = x'_2 ; \end{cases}$$

d'où, en effet,

$$\begin{cases} x_1 = \lambda_{12} x'_2, \\ x_2 = \lambda_{21} x'_1. \end{cases}$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que $F(e)$ soit un invariant absolu, pour toutes les substitutions σ, est donc que cette fonction ne change pas de valeur quand on fait l'une quelconque des substitutions particulières que nous venons de si-

gnaler, et que nous écrirons sous la forme

$$(\sigma_{11})\quad \begin{cases} x_1 = x'_1\, e^{\omega_{11}}, \\ x_2 = x'_2, \end{cases} \qquad (\sigma_{12})\quad \begin{cases} x_1 = x'_1 + \omega_{12} x'_2, \\ x_2 = x'_2, \end{cases}$$

$$(\sigma_{21})\quad \begin{cases} x_1 = x'_1, \\ x_2 = \omega_{21} x'_1 + x'_2, \end{cases} \qquad (\sigma_{22})\quad \begin{cases} x_1 = x'_1, \\ x_2 = x'_2\, e^{\omega_{22}}, \end{cases}$$

e désignant la base des logarithmes népériens.

Les substitutions σ_{ij}, i et j étant fixes, forment un groupe particulier à un seul paramètre, contenu dans le groupe général des substitutions σ; si ω_{ij} est infiniment petit, la substitution σ_{ij} est *infinitésimale*, en ce sens qu'elle modifie les (e) de quantités infiniment petites; le groupe des substitutions σ ne contient évidemment que quatre substitutions infinitésimales indépendantes, qui sont précisément les substitutions infinitésimales σ_{ij}.

Si l'on effectue deux substitutions successives σ_{ij} (i et j étant fixes), correspondant aux valeurs ω_{ij} et ω'_{ij} du paramètre, la substitution résultante σ_{ij} correspond manifestement à la valeur $\omega_{ij} + \omega'_{ij}$ du paramètre. Soit alors $F(e)$ une fonction des éléments du système S qui, par la première substitution, devient $F(e')$, S devenant S'; la seconde substitution appliquée à S' conduit à S'', et $F(e')$ devient $F(e'')$; la substitution résultante conduit directement de S à S'' et change $F(e)$ en $F(e'')$. $F(e')$ se développe suivant les puissances de ω_{ij} sous la forme

$$F(e') = F(e) + \Delta_{ij}^{(1)} F(e)\frac{\omega_{ij}}{1} + \Delta_{ij}^{(2)} F(e)\frac{\omega_{ij}^2}{1.2} + \Delta_{ij}^{(3)} F(e)\frac{\omega_{ij}^3}{1.2.3} + \ldots,$$

les $\Delta_{ij}^{k} F(e)$ désignant certaines opérations différentielles. On a, par suite, en vertu des observations qui précèdent,

$$\begin{aligned} F(e'') &= F(e') + \Delta_{ij}^{(1)} F(e')\frac{\omega'_{ij}}{1} + \Delta_{ij}^{(2)} F(e')\frac{\omega'^2_{ij}}{1.2} + \Delta_{ij}^{(3)} F(e')\frac{\omega'^3_{ij}}{1.2.3} + \ldots \\ &= F(e) + \Delta_{ij}^{(1)} F(e)\frac{\omega_{ij} + \omega'_{ij}}{1} \\ &\quad + \frac{1}{1.2}\left[\Delta_{ij}^{(2)} F(e)\,\omega'^2_{ij} + 2\Delta_{ij}^{(1)}\Delta_{ij}^{(1)} F(e)\,\omega_{ij}\omega'_{ij} + \Delta_{ij}^{(2)} F(e)\,\omega^2_{ij}\right] \\ &\quad + \frac{1}{1.2.3}\left[\Delta_{ij}^{(3)} F(e)\,\omega'^3_{ij} + 3\Delta_{ij}^{(2)}\Delta_{ij}^{(1)} F(e)\,\omega_{ij}\omega'^2_{ij}\right. \\ &\qquad\qquad \left. + 3\Delta_{ij}^{(1)}\Delta_{ij}^{(2)} F(e)\,\omega^2_{ij}\omega'_{ij} + \Delta_{ij}^{(3)} F(e)\,\omega^3_{ij}\right] + \ldots; \end{aligned}$$

on a aussi directement

$$F(e'') = F(e) + \Delta_{ij}^{(1)} F(e) \frac{\omega_{ij} + \omega'_{ij}}{1} + \Delta_{ij}^{(2)} F(e) \frac{(\omega_{ij} + \omega'_{ij})^2}{1.2} + \Delta_{ij}^{(3)} F(e) \frac{(\omega_{ij} + \omega'_{ij})^3}{1.2.3} + \ldots;$$

on en déduit, par comparaison, que les opérations $\Delta_{ij}^{(k)} F(e)$ vérifient les conditions

$$\Delta_{ij}^{(2)} F(e) = \Delta_{ij}^{(1)} \Delta_{ij}^{(1)} F(e),$$
$$\Delta_{ij}^{(3)} F(e) = \Delta_{ij}^{(1)} \Delta_{ij}^{(1)} \Delta_{ij}^{(1)} F(e),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Alors nous écrirons simplement

$$F(e') = F(e) + \Delta_{ij} F(e) \frac{\omega_{ij}}{1} + \Delta_{ij}^2 F(e) \frac{\omega_{ij}^2}{1.2} + \Delta_{ij}^3 F(e) \frac{\omega_{ij}^3}{1.2.3} + \ldots,$$

où l'exposant de la caractéristique Δ indique la réitération de l'opération correspondante.

Comme conséquence particulière de ces importantes formules, nous voyons qu'une condition nécessaire et suffisante, pour que $F(e)$ soit un invariant absolu à l'égard de toutes les substitutions σ, est que cette fonction vérifie les quatre équations

$$\Delta_{11} F(e) = 0, \qquad \Delta_{12} F(e) = 0, \qquad \Delta_{21} F(e) = 0, \qquad \Delta_{22} F(e) = 0.$$

21. Calculons les $\Delta_{ij} F(e)$. La substitution σ_{11} donne d'abord

$$x'_1 = x_1 e^{-\omega_{11}}, \qquad \xi'_1 = \xi_1 e^{\omega_{11}},$$
$$x'_2 = x_2, \quad \ldots, \qquad \xi'_2 = \xi_2, \quad \ldots,$$

$$a'_{p_1,p_2;q_1,q_2;\ldots;\pi_1,\pi_2;\rho_1,\rho_2;\ldots} = e^{(p_1+q_1+\ldots-\pi_1-\rho_1-\ldots)\omega_{11}} a_{p_1,p_2;q_1,q_2;\ldots;\pi_1,\pi_2;\rho_1,\rho_2;\ldots},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On a, par suite, immédiatement

$$\Delta_{11} F(e) = -x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} - \ldots + \xi_1 \frac{\partial F}{\partial \xi_1} + \ldots + (p_1 + q_1 + \ldots - \pi_1 - \rho_1 - \ldots) a_{p_1,p_2;\ldots;\pi_1,\pi_2;\ldots} \frac{\partial F}{\partial a_{p_1,p_2;\ldots;\pi_1,\pi_2;\ldots}} + \ldots.$$

On a de même

$$\Delta_{22} F(e) = -x_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} - \ldots + \xi_2 \frac{\partial F}{\partial \xi_2} + \ldots + (p_2 + q_2 + \ldots - \pi_2 - \rho_2 - \ldots) a_{p_1,p_2;\ldots;\pi_1,\pi_2;\ldots} \frac{\partial F}{\partial a_{p_1,p_2;\ldots;\pi_1,\pi_2;\ldots}} + \ldots.$$

La substitution σ_{12} donne maintenant

$$x'_1 = x_1 - \omega_{12} x_2, \qquad \xi'_1 = \xi_1,$$
$$x'_2 = x_2, \qquad \ldots \qquad \xi'_2 = \omega_{12}\xi_1 + \xi_2, \qquad \ldots,$$

$$a'_{p_1,p_2;q_1,q_2,\ldots;\pi_1,\pi_2;\rho_1,\rho_2;\ldots} = a_{p_1,p_2;q_1,q_2;\ldots;\pi_1,\pi_2;\rho_1,\rho_2;\ldots} + \omega_{12}\,[p_2\,a_{p_1+1,p_2-1;q_1,q_2;\ldots;\pi_1,\pi_2;\rho_1,\rho_2;\ldots} + \ldots - \pi_1\,a_{p_1,p_2;q_1,q_2;\ldots;\pi_1-1,\pi_2+1;\rho_1,\rho_2;\ldots} - \ldots] + \ldots;$$

dans cette dernière formule, nous avons négligé les puissances de ω_{12}, autres que la première.

On en déduit

$$\Delta_{12}F(e) = -x_2\frac{\partial F}{\partial x_1} - \ldots + \xi_1\frac{\partial F}{\partial \xi_2} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial a_{p_1,p_2;\ldots;\pi_1,\pi_2;\ldots}}[p_2\,a_{p_1+1,p_2-1;\ldots;\pi_1,\pi_2;\ldots} + \ldots - \pi_1\,a_{p_1,p_2;\ldots;\pi_1-1,\pi_2+1;\ldots} - \ldots] + \ldots.$$

On a de même

$$\Delta_{21}F(e) = -x_1\frac{\partial F}{\partial x_2} - \ldots + \xi_2\frac{\partial F}{\partial \xi_1} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial a_{p_1,p_2;\ldots;\pi_1,\pi_2;\ldots}}[p_1\,a_{p_1-1,p_2+1;\ldots;\pi_1,\pi_2;\ldots} + \ldots - \pi_2\,a_{p_1,p_2;\ldots;\pi_1+1;\pi_2-1;\ldots} - \ldots] + \ldots.$$

22. D'après ce qui a été dit antérieurement, les quatre équations linéaires et homogènes aux dérivées partielles

$$\Delta_{ij}F = 0$$

se réduisent à p distinctes, qui forment un système complet, et qui admettent $P - p$ solutions rationnelles distinctes.

En fait, on vérifie facilement les identités suivantes

$$\Delta_{11}\Delta_{22}F - \Delta_{22}\Delta_{11}F = 0,$$
$$\Delta_{12}\Delta_{21}F - \Delta_{21}\Delta_{12}F = \Delta_{11}F - \Delta_{22}F,$$
$$\Delta_{11}\Delta_{12}F - \Delta_{12}\Delta_{11}F = \Delta_{12}F,$$
$$\Delta_{11}\Delta_{21}F - \Delta_{21}\Delta_{11}F = -\Delta_{21}F,$$
$$\Delta_{22}\Delta_{12}F - \Delta_{12}\Delta_{22}F = -\Delta_{12}F,$$
$$\Delta_{22}\Delta_{21}F - \Delta_{21}\Delta_{22}F = \Delta_{21}F,$$

qui expriment que les p équations distinctes parmi les équations $\Delta_{ij}F = 0$ forment un système complet.

On peut remarquer que p est toujours égal à 4 dès que le système contient deux séries de variables de même espèce.

IV. — Les invariants.

23. Si $F(e)$ est un invariant absolu, rationnel et non entier, il pourra se mettre sous la forme d'une fraction irréductible $\frac{F_1(e)}{F_2(e)}$, les fonctions F_1 et F_2 étant entières et n'étant pas, sauf exception, des invariants absolus.

On a, par hypothèse,

$$\frac{F_1(e')}{F_2(e')} = \frac{F_1(e)}{F_2(e)};$$

$F_1(e')$ et $F_2(e')$ sont encore des fonctions entières des (e) quand on y remplace les (e') par leurs valeurs en fonction des (e) et des (λ); par suite, d'après les hypothèses faites, on a nécessairement

$$F_1(e') = \omega F_1(e), \qquad F_2(e') = \omega F_2(e),$$

ω étant une fonction qui ne dépend que des (λ).

On est ainsi conduit à rechercher, d'une façon plus générale, toutes les fonctions $F(e)$ telles que l'on ait

$$F(e') = \omega F(e),$$

ω ne dépendant que des (λ). Ces fonctions sont les *invariants* du système S; elles comprennent en particulier les invariants absolus, qui correspondent à $\omega = 1$.

Comme précédemment, une condition nécessaire et suffisante pour que $F(e)$ soit un invariant du système S est qu'il en soit ainsi pour les substitutions σ_{ij}. Par suite, à cause de la formule

$$F(e') = F(e) + \omega_{ij}\Delta_{ij}F(e) + \frac{\omega_{ij}^2}{1.2}\Delta_{ij}^2F(e) + \ldots,$$

il faut et il suffit que l'on ait

$$\Delta_{ij}F(e) = \mu_{ij}F(e);$$

μ_{ij} ne peut dépendre que de ω_{ij} et par suite est une constante, puisque $\Delta_{ij}F(e)$ et $F(e)$ sont indépendants de ω_{ij}. En se servant des valeurs données ci-dessus pour les expressions de la

forme $\Delta_{ij}\Delta_{hk}F - \Delta_{hk}\Delta_{ij}F$, on trouve immédiatement

$$\mu_{12} = \mu_{21} = 0, \qquad \mu_{11} = \mu_{22} = \mu,$$

μ étant une constante quelconque.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que $F(e)$ soit un invariant sont donc que F vérifie les quatre équations linéaires aux dérivées partielles

$$\Delta_{11}F = \mu F, \qquad \Delta_{12}F = 0, \qquad \Delta_{21}F = 0, \qquad \Delta_{22}F = \mu F.$$

On voit en outre que pour les diverses substitutions σ_{11}, σ_{12}, σ_{21}, σ_{22}, on a respectivement

$$F(e') = F(e)e^{\mu\omega_{11}}, \qquad F(e') = F(e),$$
$$F(e') = F(e), \qquad F(e') = F(e)e^{\mu\omega_{22}}.$$

Si donc on décompose la substitution σ, quelconque, en substitutions σ_{ij}, comme nous l'avons fait plus haut, il vient

$$F(e') = \delta^{\mu}F(e).$$

de sorte que la fonction ω par laquelle se multiplie $F(e)$ quand on passe des (e) aux (e') est une puissance du déterminant δ de la substitution σ.

Quand l'identité précédente a lieu, on dit que $F(e)$ est un invariant d'*ordre* μ; les invariants absolus sont d'ordre zéro.

24. Pour trouver un invariant F d'ordre μ différent de zéro, il suffit d'égaler à zéro une solution quelconque des quatre équations linéaires et homogènes aux dérivées partielles

$$\Delta_{11}\varphi + \mu F\frac{\partial\varphi}{\partial F} = 0, \qquad \Delta_{12}\varphi = 0, \qquad \Delta_{21}\varphi = 0, \qquad \Delta_{22}\varphi + \mu F\frac{\partial\varphi}{\partial F} = 0;$$

supposons que ces équations se réduisent à q distinctes, qui forment nécessairement un système complet; on a $q \leqq 4$; il est clair aussi que q est égal à p ou à $p+1$.

Si $q = p + 1$, cela veut dire que les équations entraînent $\frac{\partial\varphi}{\partial F} = 0$; il n'y a pas d'invariants d'ordre μ. Le système n'a d'autres invariants que ses invariants absolus.

Si $q = p$, ce qui arrive dans le cas général de $p = 4$, soit F un invariant d'ordre μ (ceci suppose $P - p + 1 > 0$); soient F_1, $F_2, \ldots$, les $P - p$ invariants absolus; il est clair que tout invariant d'ordre μ' sera de la forme

$$F^{\frac{\mu'}{\mu}} \varphi(F_1, F_2, \ldots),$$

φ étant une fonction arbitraire.

On peut dire qu'il y a $P - p + 1$ invariants distincts. Si F_1, F_2, $F_3, \ldots$ désignent $P - p + 1$ tels invariants des ordres μ_1, μ_2, $\mu_3, \ldots$, μ_1 n'étant pas nul, par exemple, tout invariant d'ordre μ quelconque est de la forme

$$F_1^{\frac{\mu}{\mu_1}} \varphi\left(\frac{F_2^{\mu_1}}{F_1^{\mu_2}}, \frac{F_3^{\mu_1}}{F_1^{\mu_3}}, \ldots\right),$$

φ étant une fonction arbitraire.

25. Puisque les invariants absolus peuvent être choisis rationnels, il résulte de ce qui a été dit au n° 23 que l'on peut toujours, quand il y a des invariants absolus, former pour le système S un système *fondamental* d'invariants *entiers* par rapport aux éléments de ce système : ces invariants sont d'ordre entier.

Par système fondamental d'invariants, nous entendons un ensemble d'invariants distincts à l'aide desquels puissent s'exprimer tous les autres, comme nous venons de le voir.

Si le système S n'a que des invariants absolus, ceux-ci peuvent être pris entiers. Si le système S n'a pas d'invariants absolus et a cependant des invariants, ceux-ci sont les puissances de l'un d'entre eux, que l'on peut encore supposer entier, comme nous le verrons plus loin.

Ce que nous venons de dire nous permet de ne considérer que des invariants entiers, quand il s'agit d'invariants non absolus; c'est ce que nous ferons toujours.

26. Un invariant entier peut toujours être supposé homogène séparément par rapport aux diverses séries de variables (x), (y), ... (ξ), (η), ... et aux diverses séries de coefficients (a), (b), ..., des formes f, g, ..., qui constituent le système S.

Soit en effet F un invariant qui n'est pas dans ces conditions :

il est la somme d'un certain nombre de fonctions entières qui possèdent les propriétés d'homogénéité indiquées plus haut; si F_1, F_2, ..., sont ces fonctions, la transformation du système S conduit à l'identité

$$\begin{aligned}&\Sigma F_1(x'_1, x'_2; \ldots \xi'_1, \xi'_2; \ldots a'_{p_1,p_2;\ldots\pi_1,\pi_2;\ldots}; \ldots b'_{p'_1,p'_2;\ldots\pi'_1,\pi'_2;\ldots}, \ldots)\\ &= \partial^\mu \Sigma F_1(x_1, x_2; \ldots \xi_1, \xi_2; \ldots a_{p_1,p_2;\ldots\pi_1,\pi_2;\ldots}, \ldots b_{p'_1,p'_2;\ldots\pi'_1,\pi'_2;\ldots}, \ldots).\end{aligned}$$

Remplaçons x_1 et x_2 par Xx_1 et Xx_2, ..., ξ_1 et ξ_2 par $\Xi\xi_1$ et $\Xi\xi_2$, ..., f par Af, g par Bg, ..., les quantités X, ..., Ξ, ..., A, B, ..., étant des constantes arbitraires; la fonction F exprimée à l'aide de ces nouvelles variables et de ces nouveaux coefficients est encore un invariant du nouveau système ainsi formé, et comme x'_1 et x'_2 sont remplacées par Xx'_1 et Xx'_2, ..., ξ'_1 et ξ'_2 par $\Xi\xi'_1$ et $\Xi\xi'_2$, ..., f' par Af', g' par Ag', ..., l'identité précédente devient, en supposant F_1 homogène et des degrés k_1, ..., $\varkappa_1$, ..., n_1, n'_1, ..., respectivement par rapport aux séries (x), ..., (ξ), ..., (a), (b), ...,

$$\begin{aligned}&\Sigma X^{k_1}\ldots\Xi^{\varkappa_1}\ldots A^{n_1}B^{n_1}\ldots F_1(x'_1, x'_2; \ldots \xi'_1, \xi'_2; \ldots a'_{p_1,p_2;\ldots}, \ldots b'_{p'_1,p'_2;\ldots}, \ldots\\ &= \partial^\mu \Sigma X^{k_1}\ldots\Xi^{\varkappa_1}\ldots A^{n_1}B^{n'_1}\ldots F_1(x_1, x_2; \ldots \xi_1, \xi_2; \ldots a_{p_1,p_2;\ldots}, \ldots b_{p'_1,p'_2;\ldots}, \ldots\end{aligned}$$

Ceci ayant lieu quelles que soient les arbitraires X, ..., Ξ, ..., A, B, ..., on en déduit que chacune des fonctions F_1, F_2, ... est elle-même un invariant d'ordre μ, puisque, pour deux de ces fonctions, les systèmes de nombres k_1, ..., $\varkappa_1$, ..., n_1, n'_1, ..., sont par hypothèse différents.

En conséquence, tout invariant non absolu F sera toujours supposé entier, homogène et des degrés k, l, ..., $\varkappa$, λ, ..., n, n', ..., par rapport aux diverses séries de variables et de coefficients (x), (y), ..., (ξ), (η), ..., (a), (b), ..., qui constituent le système S. Si les coefficients (a), (b), ..., sont ceux des formes $f = a_{x^p y^q \ldots \xi^\pi \eta^\rho \ldots}$, $g = b_{x^{p'} y^{q'} \ldots \xi^{\pi'} \eta^{\rho'} \ldots}$, et si μ est l'ordre de F, on a évidemment, en cherchant le degré de F par rapport aux coefficients (λ), la relation

$$\begin{aligned}2\mu = (p + q + \ldots - \pi - \rho \ldots)n + (p' + q' + \ldots - \pi' - \rho' \ldots)n' + \ldots\\ - k - l - \ldots + \varkappa + \lambda + \ldots.\end{aligned}$$

27. Dans le groupe des substitutions σ, on peut distinguer celles dont le déterminant est 1; ces substitutions forment elles-

mêmes un groupe à trois paramètres contenu dans le premier.

Pour ce groupe, on peut définir et rechercher les invariants absolus comme nous l'avons fait pour le groupe des substitutions σ; si l'on remarque que toute substitution du groupe peut être obtenue en combinant des substitutions des formes suivantes :

$$\begin{cases} x_1 = e^{\omega_{11}} x'_1, \\ x_2 = e^{-\omega_{11}} x'_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = x'_1 + \omega_{12} x'_2, \\ x_2 = x'_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = x'_1, \\ x_2 = \omega_{21} x'_1 + x'_2, \end{cases}$$

on en conclut immédiatement que ces invariants absolus sont les solutions des trois équations aux dérivées partielles

$$\Delta_{11} F - \Delta_{22} F = 0, \qquad \Delta_{12} F = 0, \qquad \Delta_{21} F = 0.$$

qui forment un système complet, et qui sont indépendantes en nombre $q - 1$.

De plus, ces invariants peuvent être pris rationnels; il suffit de répéter les raisonnements des n°s 17 et 18. Ils peuvent même être pris entiers, car, sans cela, ils conduiraient à des invariants non absolus, et un raisonnement semblable à celui du n° 23 montre qu'il n'existe pas d'invariants non absolus proprement dits pour les substitutions considérées.

Enfin ces invariants, pris entiers, peuvent être supposés homogènes séparément par rapport aux diverses séries de variables et de coefficients qui constituent le système S : on le voit comme au numéro précédent.

Les invariants absolus relatifs aux substitutions σ de déterminant 1, qui vérifient toutes les conditions que nous venons d'énoncer, peuvent évidemment être pris pour les termes d'un système fondamental d'invariants ordinaires du système S : ceci résulte des conditions d'homogénéité imposées, de la forme des équations de transformation, et de ce fait que l'on passe de la substitution générale σ à une substitution de déterminant 1, en remplaçant les coefficients λ_{ij} par $\frac{\lambda_{ij}}{\sqrt{\delta}}$.

On retrouve ainsi, et cette fois sans exception, la démonstration de l'existence d'un système fondamental d'invariants entiers pour le système S.

28. Les invariants entiers du système S, vérifiant les conditions

d'homogénéité plusieurs fois indiquées, sont, comme nous l'avons déjà dit, les seuls que nous considérerons : de même, nous pouvons nous borner à la considération des invariants absolus qui sont les quotients de deux tels invariants. Ces conventions sont faites une fois pour toutes.

Les invariants sont les solutions des trois équations

$$\Delta_{11}\mathrm{F} - \Delta_{22}\mathrm{F} = 0, \qquad \Delta_{12}\mathrm{F} = 0, \qquad \Delta_{21}\mathrm{F} = 0,$$

distinctes en nombre $q - 1$, formant un système complet.

L'ordre μ d'un invariant F est déterminé par la relation qui termine le n° 26.

L'identité d'Euler pour les fonctions homogènes donne alors

$$\Delta_{11}\mathrm{F} + \Delta_{22}\mathrm{F} = 2\mu\mathrm{F},$$

d'où résultent les équations connues

$$\Delta_{11}\mathrm{F} = \Delta_{22}\mathrm{F} = \mu\mathrm{F}.$$

En se reportant aux formules de transformation relatives aux substitutions σ_{11} et σ_{22}, on voit que ces équations expriment simplement que F est une fonction isobarique de poids μ par rapport à chacun des indices 1 et 2.

D'autre part, effectuons la substitution particulière

$$x_1 = x'_2, \qquad x_2 = x'_1,$$

de déterminant -1. Elle donne aussi

$$\xi_1 = \xi'_2, \qquad \xi_2 = \xi'_1,$$

$$a'_{p_1,p_2;q_1,q_2;\ldots;\varpi_1,\varpi_2;\ldots} = a_{p_2,p_1;q_2,q_1;\ldots;\varpi_2,\varpi_1;\ldots};$$

si donc F est un invariant d'ordre μ, F doit se reproduire multiplié par $(-1)^\mu$ quand on permute les indices 1 et 2 : si μ est pair, l'invariant est dit *droit;* si μ est impair, il est dit *gauche.*

Il est clair qu'une fonction entière, isobarique de poids μ, homogène séparément par rapport aux diverses séries de variables et de coefficients du système S, se reproduisant multipliée par $(-1)^\mu$ quand on échange les indices 1 et 2, est un invariant d'ordre μ si elle vérifie une seule des deux équations

$$\Delta_{12}\mathrm{F} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \Delta_{21}\mathrm{F} = 0.$$

On a ainsi un moyen de déterminer les invariants par la méthode des coefficients indéterminés.

On pourrait multiplier les propriétés analogues, servant à faciliter le calcul des invariants.

29. Nous admettrons que, pour un système quelconque S, il existe toujours un système de Q invariants, qui ne sont pas tous indépendants, tel que tout autre invariant du système soit une fonction *entière* de ceux-là : un tel système d'invariants est dit *complet*.

Cette proposition est connue sous le nom de *théorème de Gordan* : elle a été démontrée d'une façon générale par M. D. Hilbert (*Mathematische Annalen,* Band XXXVI). Nous ne nous occuperons pas de la formation des systèmes complets, sauf dans quelques cas particuliers.

On réserve ordinairement le nom d'*invariants* aux fonctions invariantes qui ne dépendent que des coefficients des formes du système S; celles qui dépendent aussi des variables de première espèce sont alors des *covariants;* celles qui dépendent des coefficients et des variables de seconde espèce sont des *contrevariants;* celles qui dépendent des coefficients et des variables des deux espèces sont des *formes mixtes*. Les invariants qui ne dépendent que des variables sont en outre dits *identiques*. Nous avons confondu toutes ces fonctions sous le nom générique d'*invariants,* pour plus d'uniformité.

30. Les invariants soumis aux conditions d'homogénéité indiquées précédemment sont les seuls intéressants au point de vue géométrique.

L'évanouissement d'un tel invariant correspond évidemment à l'existence *accidentelle* d'une propriété *projective* du système S, c'est-à-dire d'une propriété qui subsiste après une transformation de coordonnées, ou quand on remplace le système S par celui qui lui correspond dans un espace homographique quelconque; de plus, cette propriété est accidentelle, c'est-à-dire ne se présente pas si les coefficients du système S restent arbitraires.

Réciproquement, toute propriété de ce genre, correspondant

à une *seule* relation entre les éléments du système S, est évidemment exprimée par l'évanouissement d'un invariant.

L'importance géométrique de l'étude des invariants d'un système binaire est ainsi mise en évidence.

— Théorèmes généraux sur les invariants.

31. Soit un système S composé comme précédemment; supposons que dans l'une des formes du système, f par exemple, on regarde certaines variables, soit les (x), comme des constantes : on a ainsi un nouveau système S_1. Tout invariant du système S_1 est encore, quand on y considère à nouveau les (x) comme variables, un invariant de même ordre du système S. Cette proposition se généralise évidemment : on peut considérer plusieurs séries de variables comme constantes dans plusieurs formes.

Pour démontrer ce théorème, considérons une seule forme aux seules variables (x) et (y) : $f = a_{x^p y^q}$; le raisonnement que nous allons faire s'étendrait sans peine à tous les cas possibles. Soit $F = A_{y^q}$, la forme f où les (x) sont regardées comme constantes; soit aussi $J(A, y)$ un invariant d'ordre μ de F.

Effectuons la substitution σ sur les (y) seules, dans F; F devient $F' = A'_{y'^q}$ et l'on a

$$J(A', y') = \delta^\mu J(A, y).$$

Dans F' faisons subir aux (x) la transformation σ; on obtiendra $F'' = A''_{y'^q}$, et cette forme sera évidemment identique à $f' = a'_{x'^p y'^q}$, obtenue en transformant dans f les (x) et les (y) par la substitution σ. Si donc on considère les (A') comme fonctions des (a') et des (x'), comme ils sont égaux aux (A''), on voit que ce sont les mêmes fonctions des (a') et des (x') que les (A) des (a) et des (x). Par suite, en désignant par $I(a, x, y)$ ce que devient $J(A, y)$ quand on l'exprime à l'aide des (a) et des (x), on a :

$$I(a', x', y') = \delta^\mu I(a, x\, y,),$$

ce qui démontre le théorème.

32. Soit un système S et considérons de nouvelles formes F, G, ... qui soient des invariants du système S, des ordres μ,

μ', ... quelques-unes de ces formes pouvant coïncider par suite avec quelques-unes des formes f, g, ... du système S. Considérons le nouveau système S_1 composé des variables (x), (y), ... et des formes F, G ... et soit J un invariant d'ordre ν de ce système, des degrés h, h', ... d'homogénéité par rapport aux coefficients (A), (B), ... des formes F, G, ... : ce sera aussi un invariant d'ordre $\nu + \mu h + \mu' h' + \ldots$ du système S.

En particulier, on peut dire par suite que les invariants des invariants d'un système sont eux-mêmes des invariants de ce système.

Comme précédemment, il suffira d'exposer la démonstration de ce théorème sur un cas simple. Soit donc $f = a_{x^p}$ une forme aux seules variables (x) et un invariant d'ordre μ, $F = A_{x^k}$, de cette forme. Soit J un invariant d'ordre ν de F, de degré h par rapport aux (A). Si $f' = a_{x'^p}$ et $F' = A'_{x'^k}$ sont les transformées de f et de F par la substitution σ, on a

$$F(a', x') = \delta^{\mu} F(a, x), \qquad J(A', x') = \delta^{\nu} J(A, x).$$

F' étant identique à F, on en conclut que les (A') sont les mêmes fonctions des (a') que les (A) des (a), au facteur $\delta^{-\mu}$ près. Si donc $J(A, x)$ devient $I(a, x)$ quand on l'exprime à l'aide des (a), on a, d'après les hypothèses faites,

$$\delta^{-\mu h} I(a', x') = \delta^{\nu} I(a, x)$$

ou bien

$$I(a', x') = \delta^{\nu + \mu h} I(a, x),$$

ce qui montre bien que I est un invariant d'ordre $\nu + \mu h$ de f.

33. Soient un système S et une nouvelle forme F qui soit un invariant d'ordre μ du système S. Considérons F comme dépendant des variables (x), (y), ..., (ξ), (η), ..., de sorte que

$$F = A_{x^k y^l \ldots \xi^{\varkappa} \eta^{\lambda} \ldots}.$$

Substituant la valeur de F dans les équations aux dérivées partielles que vérifie F, et égalant à zéro le coefficient de chaque monôme tel que $x_1^{k_1} x_2^{k_2} y_1^{l_1} y_2^{l_2} \ldots \xi_1^{\varkappa_1} \xi_2^{\varkappa_2} \eta_1^{\lambda_1} \eta_2^{\lambda_2} \ldots$, on obtient les importantes relations qui suivent, où les opérations Δ_{ij} s'appli-

quent aux coefficients (A), considérés comme fonctions des éléments du système S autres que les $(x), (y), \ldots, (\xi), (\eta), \ldots$

$$\begin{aligned}
\Delta_{11} A_{k_1,k_2;\ldots\varkappa_1,\varkappa_2;\ldots} &= (\mu + k_1 + l_1 + \ldots - \varkappa_1 - \lambda_1 - \ldots) A_{k_1,k_2;\ldots\varkappa_1,\varkappa_2;\ldots},\\
\Delta_{12} A_{k_1,k_2;\ldots\varkappa_1,\varkappa_2;\ldots} &= k_2 A_{k_1+1,k_2-1;\ldots\varkappa_1,\varkappa_2;\ldots} + \ldots - \varkappa_1 A_{k_1,k_2;\ldots\varkappa_1-1,\varkappa_2+1;\ldots} - \ldots,\\
\Delta_{21} A_{k_1,k_2;\ldots\varkappa_1,\varkappa_2;\ldots} &= k_1 A_{k_1-1,k_2+1;\ldots\varkappa_1,\varkappa_2;\ldots} + \ldots - \varkappa_2 A_{k_1,k_2;\ldots\varkappa_1+1,\varkappa_2-1;\ldots} - \ldots,\\
\Delta_{22} A_{k_1,k_2;\ldots\varkappa_1,\varkappa_2;\ldots} &= (\mu + k_2 + l_2 + \ldots - \varkappa_2 - \lambda_2 - \ldots) A_{k_1,k_2;\ldots,\varkappa_1\varkappa_2;\ldots}.
\end{aligned}$$

La première et la dernière de ces relations montrent, ce que nous savions déjà, que le coefficient $A_{k_1,k_2;\ldots\varkappa_1,\varkappa_2;\ldots}$ est une fonction isobarique des poids respectifs $\mu + k_1 + l_1 + \ldots - \varkappa_1 - \lambda_1 - \ldots$, $\mu + k_2 + l_2 + \ldots - \varkappa_2 - \lambda_2 - \ldots$, par rapport aux indices 1 et 2.

Supposons que F ne dépende que des (x), et considérons le coefficient $A_{k,0}$ des poids respectifs $\mu + k$ et μ. Il vérifie l'équation $\Delta_{12} F = 0$, et, de plus, on a successivement

$$A_{k-1,1} = \frac{1}{k} \Delta_{21} A_{k,0}; \qquad A_{k-2,2} = \frac{1}{k-1} \Delta_{21} A_{k-1,1}, \qquad \ldots$$

d'où, en général,

$$A_{k_1,k_2} = \frac{1}{k(k-1)\ldots(k_1+1)} \Delta_{21}^{k_2} A_{k,0};$$

donc tous les coefficients A_{k_1,k_2} sont déterminés par $A_{k,0}$, appelé, pour cette raison, *source* de l'invariant F.

34. Considérons, réciproquement, une fonction G, entière par rapport aux éléments du système S, sauf les (x), qui n'y figurent pas, isobarique par rapport à chaque indice, et vérifiant l'équation $\Delta_{12} G = 0$. Une telle fonction est dite *semi-invariante* pour le système S, ainsi réduit : c'est évidemment un invariant pour les transformations du groupe qui résulte des substitutions σ_{11}, σ_{12}, σ_{22}, c'est-à-dire pour les substitutions σ dans lesquelles on a $\lambda_{21} = 0$; une telle fonction se reproduit, après une telle substitution σ, multipliée par $\lambda_{11}^{P_1} \lambda_{22}^{P_2}$, si P_1 et P_2 sont ses poids respectifs par rapport aux indices 1 et 2. Inversement, tout invariant de ce groupe particulier peut être pris sous la forme de G.

Nous observerons que l'on a nécessairement $P_1 \geqq P_2$; en effet, les identités relatives aux opérations Δ_{ij} donnent sans peine, avec

les hypothèses faites sur G,

$$\Delta_{12}\Delta_{21}^{n}\,G = n(P_1 - P_2 - n + 1)\Delta_{21}^{n-1}\,G;$$

d'autre part, la fonction $\Delta_{21}^{n}\,G$ doit nécessairement s'annuler à partir d'une certaine valeur de n, car l'opération Δ_{21} appliquée à une fonction isobarique par rapport à chaque indice, conduit à une nouvelle fonction de même nature, dont les poids par rapport aux indices 1 et 2, sont respectivement l'un diminué, l'autre augmenté d'une unité; si donc $\Delta_{21}^{n}\,G$ n'était jamais nulle, son poids par rapport à l'indice 2 pourrait augmenter au delà de toute limite, ce qui est absurde. Supposons alors que $\Delta_{21}^{n}\,G$ soit nulle sans que $\Delta_{21}^{n-1}\,G$ le soit; on aura $P_1 - P_2 - n + 1 = 0$, d'où $P_1 - P_2 \geqq 0$.

En particulier, on voit que, si $P_1 = P_2$, on a $n = 1$, par suite $\Delta_{21}\,G = 0$; de sorte que tout semi-invariant isobarique et de même poids par rapport aux deux indices est un invariant.

Démontrons maintenant que tout semi-invariant G, des poids respectifs $\mu + k$ et μ $(k > 0)$ peut être considéré comme la source $A_{k,0}$ d'un invariant d'ordre μ de degré k par rapport aux (x). Il suffit de faire voir que l'on a

$$\Delta_{12}\Delta_{21}^{k_2}\,A_{k,0} = k_2(k_1 + 1)\Delta_{21}^{k_2-1}\,A_{k,0},$$

$$\Delta_{21}^{k+1}\,A_{k,0} = 0;$$

de cette façon, en effet, toutes les relations auxquelles sont assujettis les coefficients A_{k_1,k_2}, seront vérifiées d'elles-mêmes.

Comme ces équations résultent immédiatement de ce qui vient d'être dit, en faisant $P_1 - P_2 = k$, la proposition est démontrée.

35. Supposons maintenant que F ne dépende que des variables (x) et (y), et considérons le coefficient $A_{k,0;0,l}$ des poids respectifs $\mu + k$ et $\mu + l$; on peut en tirer comme précédemment tous les coefficients $A_{k_1,k_2;l_1,l_2}$, et ce coefficient est encore la *source* de l'invariant.

Si deux tels invariants ont même source A, des poids respectifs P_1 et P_2, ils ne coïncident pas nécessairement, car ils peuvent ne pas être des mêmes degrés par rapport aux (x) et aux (y); on a en effet simplement $\mu + k = P_1$, $\mu + l = P_2$, ce qui ne détermine que $k - l$. S'ils sont des mêmes degrés, ils coïncident; on en conclut que, dans le premier cas, ils ne peuvent différer que

par une puissance de l'invariant évident (xy); car, en multipliant l'un d'eux par une telle puissance, on obtiendra encore un invariant, ayant même source que l'autre, et des mêmes degrés.

Soit A une fonction entière quelconque des éléments du système S, sauf les (x) et les (y), isobarique, des poids respectifs P_1 et P_2; si on lui applique l'opération Δ_{12} successivement, on finira nécessairement par tomber sur un résultat nul : il suffit, pour le voir, de raisonner comme plus haut relativement à l'opération Δ_{21}. Soit $\Delta_{12}^{l+1} A$ le premier résultat nul; A est la source d'un invariant dont l'ordre et les degrés sont déterminés par

$$\mu + k = P_1, \qquad \mu + l = P_2,$$

et qui n'est pas divisible par (xy).

En effet, supposons $k \geqq 0$, et calculons les coefficients $A_{k,0;l_1,l_2}$ par les formules

$$A_{k,0;l_1,l_2} = \frac{1}{l(l-1)\dots(l_2+1)} \Delta_{12}^{l_1} A;$$

la forme

$$\sum \frac{P_l}{P_{l_1} P_{l_2}} A_{k,0,l_1,l_2} y_1^{l_1} y_2^{l_2}$$

est isobarique et des poids respectifs $\mu + k$ et μ; de plus, elle vérifie l'équation $\Delta_{12} F = 0$, où l'opération Δ_{12} s'applique aussi aux (y), de sorte que l'on a bien $k > 0$. Donc, d'après le numéro précédent, c'est la source d'un invariant considéré comme ne dépendant que des (x). En y considérant aussi les (y) comme variables, le théorème se trouve démontré complètement, car le terme en $x_1^k y_1^l$ n'étant pas nul, la fonction obtenue n'est pas divisible par (xy).

Si l'on considère un semi-invariant G comme dépendant de variables (y), ce qui précède nous montre ce qu'on doit entendre par source de ce semi-invariant; un semi-invariant n'est d'ailleurs déterminé par sa source qu'à une puissance près de y_2.

On pourrait répéter ce que nous venons de dire, sans grandes modifications, en remplaçant des variables de première espèce par des variables de seconde espèce. La source d'un invariant dépendant des (x) et des (ξ) serait le coefficient $A_{k,0;\varkappa,0}$.

On pourrait aussi obtenir des résultats analogues en considérant un invariant comme fonction des coefficients de certaines formes.

VI. — Les systèmes invariants.

36. Les relations du n° 33 nous montrent que l'on peut généraliser la notion d'invariants et chercher un *système invariant* de n fonctions $F_1, F_2, \ldots, F_n$, linéairement indépendantes et telles qu'après la transformation du système S on ait les relations

$$F_k(e') = \Sigma \alpha_{kl} F_l(e), \qquad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots, n \\ l = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix},$$

les quantités α_{kl} ne dépendant que des coefficients (λ) de la substitution σ.

Le déterminant des α_{kl} est d'ailleurs différent de zéro, sans quoi les F_k ne seraient pas linéairement indépendants.

De plus, on peut supposer le système irréductible, c'est-à-dire non décomposable en systèmes partiels de même nature. Il est clair, en raisonnant comme quand il s'agit des invariants, que les fonctions d'un système invariant vérifient des équations de la forme

$$\Delta_{ij} F_k = \Sigma \mu_{ij}^{(kl)} F_l,$$

les $\mu_{ij}^{(kl)}$ étant des constantes numériques en nombre $4n^2$; et réciproquement.

Entre ces constantes existent d'ailleurs des relations qui résultent des relations qui lient entre elles les opérations Δ_{ij}.

Si, comme nous le supposerons toujours, les fonctions F_k d'un système invariant sont entières et homogènes séparément par rapport aux diverses séries de variables et de coefficients qui composent le système S, les différents degrés d'homogénéité sont les mêmes pour toutes les fonctions, que l'on peut aussi supposer isobariques par rapport à chaque indice. Dans ces conditions, il serait aisé de voir que tout système invariant peut être remplacé par un système analogue, linéairement équivalent, qui se ramène à l'ensemble des coefficients d'un invariant considéré comme fonction des variables d'un même couple, ou bien à plusieurs tels ensembles. Les systèmes de cette nature ont été étudiés ci-dessus.

L'évanouissement simultané des formes d'un système invariant correspond évidemment à l'existence accidentelle d'une propriété

projective du système S, exprimée par l'existence d'un ensemble d'équations. La réciproque de cette proposition n'est vraie que sous certaines réserves, suivant la façon dont on choisit cet ensemble d'équations : ce qui semble vrai, dans tous les cas, c'est qu'à toute propriété projective de cette nature on peut faire correspondre au moins un système invariant.

VII. — Les invariants multiples et les combinants.

37. Étant donné un système S, on peut concevoir que l'on partage les différentes variables qui figurent dans ce système et dans les formes de ce système en plusieurs groupes, et que les variables d'un même groupe soient transformées par une substitution linéaire σ, que l'on ne suppose pas rester la même quand on passe d'un groupe à l'autre.

Pour cet ensemble de transformations, il est facile de définir des invariants absolus et des invariants ordinaires, que nous appellerons *invariants multiples;* ceux-ci se reproduisent après la transformation, multipliés par des puissances des déterminants des différentes substitutions employées. Leur nombre est facile à déterminer, ainsi que celui des invariants absolus correspondants; les systèmes complets correspondants d'équations aux dérivées partielles s'écrivent immédiatement.

Sans insister sur cette étude directe, nous remarquerons seulement que les invariants multiples doivent être des invariants pour les transformations particulières qui ne changent que les variables d'un seul groupe. Par suite si (z), (t), ..., (ζ), ... sont les autres variables, un invariant multiple sera de la forme

$$\Sigma F_{r_1, r_2; s_1, s_2; \ldots \sigma_1, \sigma_2; \ldots} z_1^{r_1} z_2^{r_2} t_1^{s_1} t_2^{s_2} \ldots \zeta_1^{\sigma_1} \zeta_2^{\sigma_2} \ldots,$$

les fonctions $F_{r_1, r_2; \ldots}$ étant elles-mêmes des invariants pour le système obtenu en prenant ensemble les formes qui sont les coefficients des formes données ordonnées par rapport aux variables (z), (t), ..., (ζ), ... et les autres variables.

Réciproquement, il est clair que si une fonction vérifie ces conditions pour chaque groupe, on pourra la regarder comme un invariant multiple du système donné.

Ajoutons que les invariants multiples sont en particulier des invariants du système S, au sens ordinaire du mot.

38. Soit un système S comprenant en particulier deux formes semblables f et g, et soient θ_1 et θ_2 deux variables qui ne figurent pas dans ce système. Remplaçons les formes f et g par la forme $\theta_1 f + \theta_2 g$, et, dans le nouveau système ainsi formé, considérons les variables comme réparties en deux groupes dont l'un ne contient que les (θ).

Si F est un invariant multiple de ce système, indépendant des (θ), c'est un invariant particulier du système S, jouissant de la propriété de se reproduire à une puissance près du déterminant $\delta' = \mu_{11}\mu_{22} - \mu_{12}\mu_{21}$, quand on remplace les formes f et g par les combinaisons linéaires $\mu_{11}f + \mu_{12}g$, $\mu_{21}f + \mu_{22}g$, puisque ceci revient à faire sur les (θ) une substitution linéaire de déterminant δ'.

Nous dirons qu'un tel invariant est un *combinant* du système S, relativement aux formes f et g. Il est clair que tout combinant peut être obtenu comme nous venons de le dire.

La notion d'invariants multiples s'étend immédiatement au cas où l'on considérerait des formes renfermant des variables d'ordre différent, les unes binaires, les autres ternaires, par exemple. Bien que nous ne nous occupions actuellement que de variables binaires, ce fait est intuitif, et ce que nous dirons par la suite sur les variables ternaires et quaternaires nous permet d'affirmer que rien ne sera changé aux considérations qui précèdent, quand on envisage le cas le plus général.

En particulier, la notion de combinant s'étend d'elle-même, si le système S comprend p formes binaires $f_1, f_2, f_3, \ldots$ semblables; les invariants multiples, indépendants des (θ), du système obtenu en remplaçant les formes f_i par $\theta_1 f_1 + \theta_2 f_2 + \theta_3 f_3 + \ldots$, seront des combinants du système S par rapport aux formes f_i, c'est-à-dire jouiront de la propriété de se reproduire à une puissance près du déterminant δ' des coefficients μ_{ij}, si l'on remplace dans le système donné les formes f_i par des combinaisons linéaires, $\Sigma\mu_{ij}f_j$, de ces formes; et réciproquement.

39. Un combinant du système S par rapport à deux formes semblables f et g de ce système est un invariant ordinaire du

système qui, lorsqu'on fait sur les coefficients correspondants de f et g une même substitution linéaire, se reproduit, à une puissance près du déterminant de cette substitution. Il est alors facile de généraliser cette notion, en supposant que les deux formes f et g ne sont pas semblables. Si, par exemple, on a $f = a_{x^p}$, $g = b_{x^q}$ et si, p étant supérieur à q, $h = c_{x^{p-q}}$ désigne une forme à coefficients arbitraires, on peut chercher les invariants du système S qui, lorsqu'on remplace les coefficients de f par ceux de $\lambda f + hg$, λ étant une arbitraire, se reproduisent à un facteur près (une puissance de λ évidemment). Ces invariants, faciles à définir par un système complet d'équations aux dérivées partielles, sont les *combinants* du système S par rapport à f et g; leur nombre serait aisé à évaluer.

Ce que nous venons de dire sur un cas particulier s'étendrait sans peine au cas plus général dans lequel on chercherait les combinants du système S par rapport à plusieurs formes de ce système.

— —

CHAPITRE II.

LES FORMATIONS INVARIANTES GÉNÉRALES.

I. — Les Polaires.

40. Une polaire quelconque d'une forme d'un système S ou d'un invariant de ce système, prise par rapport à des variables remplacées par des variables de même espèce, ou par rapport à des coefficients remplacés par ceux d'une forme semblable appartenant au système, est encore un invariant de ce système.

Ceci résulte de la définition même des polaires; si en effet F est un invariant du système, contenant par exemple les variables (x) ou les coefficients d'une forme f du système, et si l'on y remplace les x_i par les $x_i + \lambda y_i$, ou les coefficients de f par ceux de $f + \lambda g$, g étant une forme du système semblable à f, la fonction F ne cessera évidemment pas d'être un invariant, et cela, quelle que soit l'arbitraire λ. Tous les coefficients du développement de F suivant les puissances de λ jouiront donc de la même propriété, ce qui démontre le théorème, au moins quand il s'agit de polaires simples : il s'étend immédiatement aux polaires multiples.

Il est évident d'ailleurs que les polaires d'un invariant F d'ordre μ sont elles-mêmes des invariants d'ordre μ.

En combinant ce théorème avec celui du n° 32, on voit que les invariants des polaires des formes ou des invariants d'un système sont eux-mêmes des invariants de ce système; on voit aussi que l'on peut prendre la polaire d'un invariant par rapport aux coefficients d'une forme f, remplacés par ceux d'une forme g semblable, qui est elle-même un invariant du système, et obtenir encore un invariant du système; mais, dans ce dernier cas, l'ordre de l'invariant ne se conserve pas.

II. — Les invariants comme combinaisons de systèmes invariants.

41. Soit un système invariant composé de n fonctions F_1, F_2, ..., F_n, vérifiant les relations

$$F'_k = \Sigma \alpha_{kl} F_l,$$

où F'_k désigne la même fonction des éléments transformés (e') que F_k des éléments primitifs (e), et où les α_{kl} ne dépendent que des coefficients (λ) de la substitution.

Un second système invariant, composé de n fonctions G_1, G_2, ..., G_n, est de même espèce que le premier si l'on a, μ étant un nombre quelconque,

$$G'_k = \delta^\mu \Sigma \alpha_{kl} G_l;$$

un système invariant, composé de n fonctions Φ_1, Φ_2, ..., Φ_n, est dit, au contraire, *d'espèce opposée au premier*, si l'on a, μ étant quelconque,

$$\delta^\mu \Phi_k = \Sigma \alpha_{lk} \Phi'_l.$$

Si deux systèmes invariants sont tous deux de même espèce, ou tous deux d'espèce opposée par rapport à un troisième, ils sont eux-mêmes de même espèce; ils sont, au contraire, d'espèce opposée si l'un est de même espèce, l'autre d'espèce opposée par rapport à un troisième.

Si n systèmes invariants de n fonctions, tels que le système (F), sont de même espèce, le déterminant des n^2 fonctions de ce système est évidemment un invariant, puisque le déterminant des F' est égal à celui des F multiplié par celui des α_{kl}, à une puissance de δ près; ceci montre, en particulier, que le déterminant des α_{kl} est toujours une puissance de δ.

Si (F) et (Φ) sont deux systèmes invariants d'espèce opposée, il est clair aussi que la fonction $\Sigma F_k \Phi_k$ est un invariant. Réciproquement, si l'on met un invariant sous la forme $\Sigma F_k \Phi_k$, les F et les Φ dépendant d'éléments différents, et si les F sont linéairement indépendants, ainsi que les Φ, les F et les Φ forment deux systèmes invariants, nécessairement d'espèce opposée. En effet, la relation $\Sigma F'_k \Phi'_k = \delta^\mu \Sigma F_k \Phi_k$, où μ est l'ordre de l'invariant considéré, fournit, quand on y remplace les Φ'_k par leurs valeurs en

fonction des (λ) et des éléments primitifs dont dépendent les Φ, des relations linéaires entre les F et les F′, résolubles nécessairement par rapport aux F ou aux F′, d'après les hypothèses faites; on raisonnerait de même pour les Φ.

Si un invariant est mis sous la forme $\Sigma F_k \Phi_k$, les F et les Φ formant deux systèmes invariants d'espèce opposée, et si l'on y remplace les F_k par les fonctions G_k d'un système invariant de même espèce, on obtiendra un nouvel invariant; et réciproquement, si deux invariants sont mis sous la forme $\Sigma F_k \Phi_k$, $\Sigma G_k \Phi_k$, les (F), les (G) et les (Φ) formant des systèmes invariants, le système invariant (G) sera de même espèce que le système (F) et d'espèce opposée à (Φ).

Il est évident encore qu'un combinant des formes d'un système invariant est un invariant.

La théorie des variables d'ordre n permettrait d'énoncer beaucoup d'autres propositions analogues à celles qui précèdent.

42. Les produits $x_1^{h_1} x_2^{h_2}$, où h_1 et h_2 sont deux entiers non négatifs de somme h, forment un système invariant particulièrement important que nous appellerons (t).

Puisque $(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)^h$ est un invariant, les quantités $\frac{P_h}{P_{h_1} P_{h_2}} \xi_1^{h_1} \xi_2^{h_2}$ forment elles-mêmes un système invariant (τ), d'espèce opposée à (t).

$(\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1)^h$ est aussi un invariant; donc les quantités

$$(-1)^{h_2} \xi_1^{h_2} \xi_2^{h_1}$$

forment un système invariant de même espèce que (t). Ceci montre, en particulier, que deux formes équivalentes sont invariantes l'une par rapport à l'autre, ce qui était d'ailleurs évident, d'après leur définition.

Si F est un invariant fonction des (x), la puissance $h^{\text{ième}}$ de sa première polaire, soit, à un facteur près, $\left(y_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^h$, est un invariant; donc les produits $\frac{P_h}{P_{h_1} P_{h_2}} \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^{h_1} \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^{h_2}$ forment un système invariant de même espèce que (τ).

De même, la polaire d'ordre h de F, soit, à un facteur près,

$\left(y_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^h$, où la puissance est symbolique, est un invariant; donc les quantités $\frac{P_h}{P_{h_1} P_{h_2}} \frac{\partial^h F}{\partial x_1^{h_1} \partial x_2^{h_2}}$ forment encore un système invariant de même espèce que (τ).

Si Φ était un invariant fonction des (ξ), on verrait de même que les quantités $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1}\right)^{h_1} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2}\right)^{h_2}$ d'une part, $\frac{\partial^h \Phi}{\partial \xi_1^{h_1} \partial \xi_2^{h_2}}$ d'autre part, forment des systèmes invariants de même espèce que (t).

Les coefficients α_{h_1, h_2} d'une forme $\varphi = \alpha_\xi^h$ forment un système invariant de même espèce que (t). Si donc F est un invariant qui dépend des (α), les dérivées $\frac{\partial F}{\partial \alpha_{h_1, h_2}}$ formeront un système invariant de même espèce que (τ).

On peut multiplier facilement ces applications : il est inutile d'y insister davantage. On remarquera seulement l'extension immédiate de ce qui précède au cas où l'on considère plusieurs systèmes de variables.

III. — Les invariants K et J. Les jacobiens et les hessiens.

43. Soient $f = \alpha_x^p$, $\psi = \beta_\xi^\pi$, deux formes dépendant de variables d'espèce différente, et considérons les deux systèmes invariants formés par les quantités $\frac{P_h}{P_{h_1} P_{h_2}} \frac{\partial^h f}{\partial x_1^{h_1} \partial x_2^{h_2}}$, $\frac{\partial^h \psi}{\partial \xi_1^{h_1} \partial \xi_2^{h_2}}$, où h_1 et h_2 ont pour somme h de toutes les façons possibles. Ces deux systèmes sont d'espèce opposée et, par suite, la fonction

$$\sum \frac{P_h}{P_{h_1} P_{h_2}} \frac{\partial^h f}{\partial x_1^{h_1} \partial x_2^{h_2}} \frac{\partial^h \psi}{\partial \xi_1^{h_1} \partial \xi_2^{h_2}}$$

est un invariant du système formé par f, ψ, les (x) et les (ξ). En introduisant un facteur numérique et une notation symbolique déjà employée, nous écrirons, pour cet invariant,

$$K^h(f, \psi) = \frac{P_{p-h}}{P_p} \frac{P_{\pi-h}}{P_\pi} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_2}\right)^h.$$

Cet invariant est absolu.

Si p et π sont égaux, on a, en particulier,

$$K^p(f, \psi) = \sum \frac{P_p}{P_{p_1} P_{p_2}} a_{p_1, p_2} \beta_{p_1, p_2}.$$

Ce procédé, appliqué aux polaires d'ordre h de f et ψ considérées comme fonctions des (y) et des (η), redonnerait $K^h(f, \psi)$.

44. Supposons maintenant que $g = b_{x^{p'}}$ soit une forme dépendant comme f des variables (x); $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, d'une part, $\frac{\partial g}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial g}{\partial x_2}$, d'autre part, étant des systèmes invariants de même espèce, la fonction

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial g}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial g}{\partial x_1}\right)^h$$

est un invariant du système f, g, (x).

Mais les quantités $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^{h_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^{h_2}$ et $\frac{\partial^h f}{\partial x_1^{h_1} \partial x_2^{h_2}}$ forment deux systèmes invariants de même espèce; il en est de même pour les quantités $\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)^{h_1}\left(\frac{\partial g}{\partial x_2}\right)^{h_2}$ et $\frac{\partial^h g}{\partial x_1^{h_1} \partial x_2^{h_2}}$; donc, en introduisant un facteur numérique, la fonction

$$J^h(f, g) = \frac{P_{p-h}}{P_p} \frac{P_{p'-h}}{P_{p'}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial g}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial g}{\partial x_1}\right)^h,$$

où la puissance qui figure au second membre est symbolique, est encore un invariant, d'ordre h évidemment. Si p et p' sont égaux, on a, en particulier,

$$J^p(f, g) = \Sigma(-1)^{p_2} \frac{P_p}{P_{p_1} P_{p_2}} a_{p_1, p_2} b_{p_2, p_1}.$$

Les invariants K et J se ramènent aisément les uns aux autres, en remplaçant la forme ψ, par exemple, par celle qui lui est équivalente. Il en serait de même des invariants analogues aux J obtenus en partant de deux formes aux variables (ξ).

On pourrait appliquer les mêmes principes à bien d'autres cas : c'est ainsi que, par exemple, f dépendant des variables (x) et (y), on obtiendrait sans peine l'invariant

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial y_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial f}{\partial y_1};$$

d'où l'on déduirait, en appliquant la représentation symbolique des dérivées, le nouvel invariant

$$\Omega(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial y_1}.$$

Enfin les invariants K et J se généralisent et s'appliquent encore aux cas où les formes dépendent de plusieurs groupes de variables. Il est inutile de donner plus de détails sur cette généralisation, qui est immédiate.

45. Les invariants $J^h(f, g)$ que nous pouvons considérer seuls, à l'exclusion des invariants K, d'après ce qui précède, sont particulièrement importants : ce sont les *Ueberschiebungen* de Clebsch et Gordan ; en les utilisant seuls, on arrive à former les systèmes complets d'invariants des systèmes binaires.

D'une façon générale, nous remarquerons que $J^h(f, f)$ est nul identiquement quand h est impair ; que l'on a

$$J^h(f, g) = (-1)^h J^h(g, f), \qquad J^h(\lambda f, \mu g) = \lambda\mu J^h(f, g),$$

$$J^h(f + \bar{f}, g + \bar{g}) = J^h(f, g) + J^h(f, \bar{g}) + J^h(\bar{f}, g) + J^h(\bar{f}, \bar{g}).$$

En particulier, si f et g sont de même degré, et si h est impair, on a

$$J^h(\lambda_1 f + \lambda_2 g, \mu_1 f + \mu_2 g) = (\lambda\mu) J^h(f, g);$$

donc, dans ce cas, $J^h(f, g)$ est un combinant de f et g.

46. Nous allons dire quelques mots des cas particuliers où l'on a $h = 1$ ou $h = 2$.

Nous emploierons d'ailleurs les notations abrégées suivantes

$$f_1 = \frac{1}{p}\frac{\partial f}{\partial x_1}, \qquad f_2 = \frac{1}{p}\frac{\partial f}{\partial x_2};$$

$$f_{11} = \frac{1}{p(p-1)}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \qquad f_{12} = \frac{1}{p(p-1)}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, \qquad f_{22} = \frac{1}{p(p-1)}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}.$$

Pour $p = 1$, on a, en supprimant l'indice h,

$$J(f, g) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{vmatrix} = f_1 g_2 - f_2 g_1.$$

Cette fonction est le *jacobien* ou *déterminant fonctionnel* des deux formes f et g.

On a les relations

$$x_1 f_1 + x_2 f_2 = f,$$
$$x_1 g_1 + x_2 g_2 = g;$$

d'où

$$x_1 \mathrm{J}(f, g) = \quad f g_2 - g f_2,$$
$$x_2 \mathrm{J}(f, g) = -f g_1 + g f_1.$$

Si $\mathrm{J}(f, g)$ est nul identiquement, on a donc

$$\frac{f}{g} = \frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2} = \frac{p' df}{p dg},$$

df et dg désignant les différentielles totales de f et g; par suite

$$f^{p'} = \mathrm{C} g^p,$$

C étant une constante. Si en particulier $p' = p$, on a $f = \mathrm{C}g$, et les deux formes f et g sont identiques à un facteur près, indépendant des (x).

Le jacobien $\mathrm{J}(f, g)$, égalé à zéro, définit les éléments (x) tels que leurs systèmes polaires d'ordres $p - 1$ et $p' - 1$ par rapport à f et g coïncident.

Supposons que f et g admettent une même racine q fois et q' fois respectivement; nous pouvons supposer que cette racine est définie par $x_1 = 0$; alors un calcul facile montre que $\mathrm{J}(f, g)$ admet cette même racine $q + q' - 1$ fois au moins, et l'admet certainement $q + q'$ fois, si l'on a $pq' - p'q = 0$, et dans ce cas seulement. En particulier, si f et g sont de même degré, et si qq' n'est pas nul, la racine commune est au moins double pour $\mathrm{J}(f, g)$.

47. Dans le cas de $h = 2$, il vient

$$\mathrm{J}^2(f, g) = f_{11} g_{22} - 2 f_{12} g_{12} + f_{22} g_{11}.$$

Si, en particulier, f et g sont identiques,

$$\mathrm{J}^2(f, f) = 2(f_{11} f_{22} - f_{12}^2) = 2 \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{vmatrix}.$$

$\mathrm{J}^2(f, f)$ est le *hessien* de la forme f.

$\mathrm{J}^2(f, f)$ est le jacobien des dérivées partielles f_1 et f_2, à un facteur près; si donc $\mathrm{J}^2(f, f)$ est nul identiquement, la forme f est,

comme l'on sait, la puissance $p^{\text{ième}}$ d'une forme linéaire. Si f admet une racine multiple d'ordre q, $J^2(f, f)$ admet ce même facteur $2q - 2$ fois.

18. Trois formes $f = a_{x^p}$, $g = b_{x^{p'}}$, $h = c_{x^{p''}}$ ont pour invariant la fonction

$$H = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{22} \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{vmatrix},$$

car les dérivées f_{ij}, g_{ij}, h_{ij} forment trois systèmes invariants de même espèce; cet invariant est d'ailleurs un combinant.

Écrivons encore

$$2H = \begin{vmatrix} f_{22} & -2f_{12} & f_{11} \\ g_{22} & -2g_{12} & g_{11} \\ h_{22} & -2h_{12} & h_{11} \end{vmatrix},$$

et multiplions membre à membre cette équation et la précédente.

On obtient l'identité importante

$$2H^2 = \begin{vmatrix} J^2(f, f) & J^2(f, g) & J^2(f, h) \\ J^2(f, g) & J^2(g, g) & J^2(g, h) \\ J^2(f, h) & J^2(g, h) & J^2(h, h) \end{vmatrix}.$$

Si l'on fait $h = (xy)^2$, puis que dans les h_{ij} on remplace les (y) par les (x), on a $H = J(f, g)$ en vertu des relations

$$x_1 f_{11} + x_2 f_{12} = f_1, \qquad x_1 f_{12} + x_2 f_{22} = f_2, \qquad \ldots;$$

on a aussi

$$J^2(f, h) = f, \qquad J^2(g, h) = g, \qquad J^2(h, h) = 0.$$

On peut donc écrire

$$J(f, g) = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{22} \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ x_2^2 & -x_1 x_2 & x_1^2 \end{vmatrix}.$$

et

$$2[J(f, g)]^2 = \begin{vmatrix} J^2(f, f) & J^2(f, g) & f \\ J^2(f, g) & J^2(g, g) & g \\ f & g & 0 \end{vmatrix};$$

toutefois ceci suppose p et p' supérieurs à 1.

Considérons maintenant une quatrième forme k analogue à f,

g, h, et multiplions ensemble les matrices

$$\begin{Vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{22} \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \\ k_{11} & k_{12} & k_{22} \end{Vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{Vmatrix} f_{22} & -2f_{12} & f_{11} \\ g_{22} & -2g_{12} & g_{11} \\ h_{22} & -2h_{12} & h_{11} \\ k_{22} & -2k_{12} & k_{11} \end{Vmatrix};$$

on obtient l'identité

$$o = \begin{vmatrix} J^2(f,f) & J^2(f,g) & J^2(f,h) & J^2(f,k) \\ J^2(f,g) & J^2(g,g) & J^2(g,h) & J^2(g,h) \\ J^2(f,h) & J^2(g,h) & J^2(h.h) & J^2(h,k) \\ J^2(f,k) & J^2(g,k) & J^2(h,k) & J^2(k,k) \end{vmatrix}.$$

Supposons $k = (xy)^2$, puis remplaçons les (y) par les (x); on aura encore, comme plus haut,

$$o = \begin{vmatrix} J^2(f,f) & J^2(f,g) & J^2(f,h) & f \\ J^2(f,g) & J^2(g,g) & J^2(g,h) & g \\ J^2(f,h) & J^2(g,h) & J^2(h,h) & h \\ f & g & h & o \end{vmatrix}.$$

D'une façon générale, si (F), (G), (H), ... sont m systèmes invariants de n fonctions qui soient de même espèce, le déterminant de ces fonctions, si $m = n$, est, comme l'on sait, un invariant; si, de plus, (Φ), (Ψ), (X), ... sont m systèmes invariants de n fonctions qui soient d'espèce opposée à celle des précédents, et si l'on multiplie ensemble les déterminants ou les matrices formés par les fonctions (F), (G), ..., d'une part, et les fonctions (Φ), (Ψ), ..., d'autre part, on obtient, comme produit, un déterminant dont tous les éléments sont des invariants et qui est égal à zéro si $m > n$, à un produit de deux invariants si $m = n$ et à un invariant mis sous forme différente si $m < n$. Ce procédé général est souvent utile pour trouver des relations entre les invariants d'un système.

49. Nous citerons encore les formules suivantes, parmi toutes celles qui se rapportent aux invariants J :

$$fJ(g,h) + gJ(h,f) + hJ(f,g) = o,$$

$$J(f,g)J(h,k) + J(f,h)J(k,g) + J(f,k)J(g,h) = o,$$

$$J[J(f,g),h] = \frac{p-p'}{2(p+p'-2)}hJ^2(f,g) + \frac{1}{2}gJ^2(f,h) - \frac{1}{2}fJ^2(g,h);$$

dans cette dernière formule, facile à vérifier, p et p' sont les degrés de f et de g; d'ailleurs ces degrés, comme celui de h, sont supposés supérieurs à l'unité.

IV. — Les invariants Δ.

50. Soient n formes quelconques semblables, renfermant chacune n coefficients; si ces formes sont liées par une relation linéaire à coefficients constants, il en est de même de leurs transformées après une substitution σ. Par suite, le déterminant Δ des n^2 coefficients de ces formes est un invariant de ces formes: cet invariant est d'ailleurs un combinant.

Supposons maintenant q formes semblables, à une seule série de variables, (x) par exemple, f_1, f_2, ..., f_q, renfermant chacune $p+1$ coefficients, c'est-à-dire de degré p par rapport aux (x), et soit $q < p+1$. Si ces formes sont liées par une relation linéaire, ce fait subsiste après une substitution σ; pour l'exprimer, il faut écrire que tous les déterminants d'ordre q, tirés de la matrice formée par les coefficients, sont nuls. Nous allons faire voir que l'on peut aussi écrire simplement qu'un invariant convenablement choisi, renfermant des variables, est nul identiquement.

Si d'abord f_{q+1}, f_{q+2}, ..., f_{p+1} sont $p-q+1$ formes arbitraires semblables aux f_i, il est clair que si les $p+1$ formes f_i dans leur ensemble sont liées par une relation linéaire, il en est de même de $f_1, f_2, \ldots, f_p$, puisque les autres f_i sont arbitraires. La condition cherchée est obtenue d'après cela par l'évanouissement d'un invariant Δ qui contient $p-q+1$ séries de coefficients arbitraires.

On peut diminuer, et cela de plusieurs façons, dans Δ le nombre des arbitraires : nous allons examiner spécialement deux de ces façons.

D'abord, g étant une forme arbitraire de degré q, on peut prendre pour les formes auxiliaires f_{q+1}, f_{q+2}, ..., f_{p+1} les produits $x_1^{p-q}g$, $x_1^{p-q-1}x_2 g$, ..., $x_2^{p-q}g$, qui forment évidemment un système invariant, de sorte que toute relation linéaire entre les f_i et ces formes entraîne une relation linéaire entre leurs transformées. Mais il faut montrer que si cette relation linéaire

est supposée exister, c'est-à-dire si l'invariant Δ correspondant, invariant des f_i et de g, s'annule, les formes f_i elles-mêmes sont liées par une relation linéaire, en supposant, bien entendu, la forme g arbitraire.

La forme g ayant ses q racines arbitraires, il résulte de l'hypothèse que l'on peut déterminer des quantités λ_i non toutes nulles, telles que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_q f_q$ soit une forme admettant q racines arbitraires; si (a), (b), (c), ... sont ces racines, on a donc

$$\begin{vmatrix} f_1(a) & f_2(a) & \ldots & f_q(a) \\ f_1(b) & f_2(b) & \ldots & f_q(b) \\ f_1(c) & f_2(c) & \ldots & f_q(c) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \end{vmatrix} = 0;$$

ce déterminant étant nul, on a une relation telle que

$$\varphi_1 f_1(a) + \varphi_2 f_2(a) + \ldots + \varphi_q f_q(a) = 0,$$

les φ_i étant indépendants des (a); changeant les (a) en (x), on en déduit immédiatement que les f_i sont liées par une relation linéaire à coefficients constants.

Nous avons supposé ici que les mineurs du déterminant relatifs aux éléments de la première ligne n'étaient pas tous nuls; s'il en était ainsi, on raisonnerait de la même façon sur l'un de ces mineurs; et ainsi de suite.

En second lieu, montrons que l'on peut choisir pour g la forme simple $(\xi \mid x)^q$, qui ne dépend plus que des arbitraires ξ_1 et ξ_2, variables que l'on ne suppose pas figurer dans les coefficients des f_i. Par hypothèse, on a, les (ξ) restant arbitraires, une relation telle que

$$\varphi_1 f_1 + \varphi_2 f_2 + \ldots + \varphi_q f_q + \psi(\xi \mid x)^q = 0,$$

et l'on peut évidemment supposer que les φ_i sont des formes de même degré en (ξ), tandis que ψ est une forme de degré $p - q$ par rapport aux (x), contenant aussi les (ξ).

La relation précédente ayant lieu identiquement, on a aussi, en prenant la polaire par rapport aux (ξ),

$$\left(\eta_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_1} + \eta_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_2}\right) f_1 + \ldots + \left(\eta_1 \frac{\partial \varphi_q}{\partial \xi_1} + \eta_2 \frac{\partial \varphi_q}{\partial \xi_2}\right) f_q$$
$$+ (\xi \mid x)^{q-1} \left[q\,\psi(\eta \mid x) + (\xi \mid x)\left(\eta_1 \frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} + \eta_2 \frac{\partial \psi}{\partial \xi_2}\right)\right] = 0;$$

choisissons les (γ_i) de façon que le coefficient de $(\xi|x)^{q-1}$ dans cette relation admette une racine arbitrairement donnée d'équation $(\xi^{(1)}|x) = 0$. Si ceci n'est pas possible sans que les coefficients de la relation deviennent tous nuls, les φ_i, ayant leurs jacobiens nuls deux à deux, sont de la forme $\lambda_i\varphi(\xi)$, les λ_i étant des constantes; et, pour la même raison, on aura $\psi(\xi|x)^q = \varphi(\xi)g(x)$; cette dernière hypothèse entraîne $g = 0$, et par suite on a une relation linéaire à coefficients constants entre les f_i, de sorte que la proposition est démontrée.

Si, au contraire, les coefficients ne deviennent pas tous nuls, on a une relation telle que

$$\varphi_1^{(1)} f_1 + \varphi_2^{(1)} f_2 + \ldots + \varphi_q^{(1)} f_q + \psi^{(1)} (\xi|x)^{q-1} (\xi^{(1)}|x) = 0,$$

où les notations s'expliquent d'elles-mêmes.

En appliquant à cette relation le même procédé et continuant de la même façon, on rencontrera une relation à coefficients constants entre les f_i, ou bien on sera ramené finalement au premier cas, c'est-à-dire à une relation telle que

$$\varphi_1^{(q-1)} f_1 + \varphi_2^{(q-1)} f_2 + \ldots + \varphi_q^{(q-1)} f_q + \psi^{(q-1)} g = 0,$$

g étant une forme aux racines arbitraires (ξ), $(\xi^{(1)})$, ..., $(\xi^{(q-1)})$.

Donc, dans tous les cas, l'évanouissement identique du déterminant Δ des coefficients des formes f_i et des formes auxiliaires $x_1^{p-q}(\xi|x)^q$, $x_1^{p-q-1}x_2(\xi|x)^q$, ..., exprime l'existence d'une relation linéaire entre les formes f_i.

La marche de la démonstration montre en même temps comment l'on pourrait faire d'autres hypothèses sur la composition des formes auxiliaires adjointes aux f_i pour former le déterminant Δ.

On pourrait aussi, pour exprimer que les q formes f_i sont liées par une relation linéaire, exprimer que leurs dérivées partielles semblables d'ordre $q-1$ sont liées par la même relation linéaire; comme il y a q dérivées partielles d'ordre $q-1$, on voit que l'on est amené à égaler à zéro le déterminant formé par les dérivées partielles d'ordre $q-1$ des q formes f_i. Réciproquement, il est aisé de démontrer que cette condition est suffisante. Mais ce déterminant, qui est un invariant, est de même degré par rapport aux (x) que l'invariant Δ obtenu en dernier lieu, quand on y remplace ξ_1 par x_2 et ξ_2 par $-x_1$, ce qui ne change rien à ses pro-

priétés; de plus, on voit tout de suite que ces deux invariants ont même source, à un facteur numérique près; donc ils coïncident à ce facteur près. Il en résulte une transformation de déterminants qu'il serait facile de justifier directement.

51. Les considérations qui précèdent nous permettent d'obtenir sous une forme particulière un système invariant tel que l'évanouissement de toutes les fonctions de ce système soit la condition nécessaire et suffisante pour que tous les déterminants d'ordre q tirés de la matrice formée par les coefficients des f_i soient nuls. Elles permettent aussi, d'une façon plus générale, d'écrire des conditions nécessaires et suffisantes pour que tous les déterminants d'ordre q tirés d'une matrice à q lignes soient nuls, et cela sans aucune hypothèse préalable.

Les applications possibles sont nombreuses : en voici dès maintenant quelques-unes.

Pour écrire que deux formes semblables $f_1 = a_{x^p}$, $f_2 = b_{x^p}$, sont identiques à un facteur près, nous avons la condition $\Delta = 0$, suivante, où l'on a remplacé ξ_1 par x_2, ξ_2 par $-x_1$:

$$\begin{vmatrix} a_{p,0} & pa_{p-1,1} & \frac{p(p-1)}{2} a_{p-2,2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{0,p} \\ b_{p,0} & pb_{p-1,1} & \frac{p(p-1)}{2} b_{p-2,2} & \cdots & \cdots & \cdots & b_{0,p} \\ x_2^2 & -2x_1x_2 & x_1^2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & x_2^2 & -2x_1x_2 & x_1^2 & \cdots & \cdots & 0 \\ . & .. & \cdots\cdots & .. & \cdots & \cdots & . \\ . & .. & \cdots\cdots & .. & \cdots & -2x_1x_2 & x_1^2 \end{vmatrix} = 0;$$

cet invariant ne diffère que par un facteur numérique du jacobien $J(f, g)$, d'après ce qui a été dit plus haut.

Considérons les dérivées partielles d'ordre h de la forme $f = a_{x^p}$, h étant au plus égal à $\frac{p}{2}$, de sorte que leur nombre est au plus égal à $\frac{p}{2} + 1$, et leur degré au moins égal à $\frac{p}{2}$. Si ces dérivées partielles, qui forment un système invariant, sont liées par une relation linéaire, ce fait est exprimé par l'évanouissement du combinant Δ, invariant pour f, où l'on a, comme plus haut, remplacé

les (ξ) par les (x) :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{p,0} & (p-h)a_{p-1,1} & \dots & a_{h,p-h} \\ a_{p-1,1} & (p-h)a_{p-2,2} & \dots & a_{p-1,p-h+1} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ a_{p-h,h} & (p-h)a_{p-h-1,h+1} & \dots & a_{0,p} \\ x_2^{h+1} & -(h+1)x_1x_2^h & \dots & 0 \\ 0 & x_2^{h+1} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & (-1)^{h+1}x_1^{h+1} \end{vmatrix}.$$

En particulier, si p est pair et h égal à $\frac{p}{2}$, cet invariant est indépendant des (x).

L'invariant précédent ne diffère que par un facteur numérique du suivant, d'après ce qui a été dit plus haut,

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \frac{\partial^{2h} f}{\partial x_1^{2h}} & \frac{\partial^{2h} f}{\partial x_1^{2h-1}\partial x_2} & \dots & \frac{\partial^{2h} f}{\partial x_1^h \partial x_2^h} \\ \frac{\partial^{2h} f}{\partial x_1^{2h-1}\partial x_2} & \frac{\partial^{2h} f}{\partial x_1^{2h-2}\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^{2h} f}{\partial x_1^{h-1}\partial x_2^{h+1}} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \frac{\partial^{2h} f}{\partial x_1^h \partial x_2^h} & \frac{\partial^{2h} f}{\partial x_1^{h-1}\partial x_2^{h+1}} & \dots & \frac{\partial^{2h} f}{\partial x_2^{2h}} \end{vmatrix};$$

le déterminant Δ' est d'ailleurs le déterminant Δ relatif aux dérivées partielles d'ordre h de la polaire d'ordre $2h$ de f par rapport aux (x) remplacés par les (y), considérée comme fonction des (y). Pour $h=1$, Δ' est le hessien de f à un facteur près; Δ en est une transformation.

52. Si les q formes $f_1, f_2, \dots, f_q$, dépendant des (x) et de degré p, sont liées par r relations linéaires distinctes, on peut exprimer ce fait de la façon suivante. Entre $q-r+1$ quelconques des formes données existe une relation linéaire; si donc g_1, $g_2, \dots, g_{p-q+r}$ sont $p-q+r$ formes auxiliaires arbitraires semblables aux f_i, tous les déterminants d'ordre $p+1$ tirés de la matrice formée par les coefficients des $p+r$ formes f_i et g_k sont nuls; et réciproquement. Alors considérons $r-1$ formes nouvelles auxiliaires, arbitraires, $h_1, h_2, \dots, h_{r-1}$ de degré $p+r-1$ par rapport à des variables (y) : en appliquant ce que nous avons dit précédemment, on obtient la condition cherchée sous la

forme $\Delta = 0$, Δ étant un déterminant d'ordre $p+r$ facile à former. Mais, comme les g_k sont arbitraires, on peut ici, comme on le vérifie sans peine, réduire le degré des h_l à $q-1$ en y supposant y_1^{p+r-q} en facteur; le déterminant Δ se simplifie alors, et l'on voit tout de suite que si l'on considère le système composé des g_k, des h_l et de la forme

$$y_1^{q-1} f_1 + y_1^{q-2} y_2 f_2 + \ldots + y_2^{q-1} f_q,$$

Δ est un invariant multiple pour ce système, où les (x) et les (y) forment deux groupes séparés de variables.

On pourra d'ailleurs diminuer le nombre des arbitraires figurant dans Δ et prendre en particulier

$$g_1 = x_1^{p-q+r-1}(\xi \mid x)^{q-r+1}, \qquad g_2 = x_1^{p-q+r-2} x_2 (\xi \mid x)^{q-r+1}, \qquad \ldots;$$
$$h_1 = y_1^{r-2}(\eta \mid y)^{q-r+1}, \qquad h_2 = y_1^{r-3} y_2 (\eta \mid y)^{q-r+1}, \qquad \ldots.$$

On pourra aussi transformer Δ, comme il a été dit à la fin du n° 50, en utilisant des considérations analogues.

Si, par exemple, les cinq formes du sixième degré $f_1 = a_{x^6}$, $f_2 = b_{x^6}$, ... sont liées par trois relations linéaires, le déterminant Δ devient

$$\begin{vmatrix}
a_{6,0} & 6a_{5,1} & 15a_{4,2} & 20a_{3,3} & 15a_{2,4} & 6a_{1,5} & a_{0,6} & \eta_1^3 & 0 \\
b_{6,0} & 6b_{5,1} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & b_{0,6} & 3\eta_1^2\eta_2 & \eta_1^3 \\
c_{6,0} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 3\eta_1\eta_2^2 & 3\eta_1^2\eta_2 \\
d_{6,0} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \eta_2^3 & 3\eta_1\eta_2^2 \\
e_{6,0} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \eta_2^3 \\
\xi_1^3 & 3\xi_1^2\xi_2 & 3\xi_1\xi_2^2 & \xi_2^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \xi_1^3 & 3\xi_1^2\xi_2 & 3\xi_1\xi_2^2 & \xi_3^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \xi_1^3 & 3\xi_1^2\xi_2 & 3\xi_1\xi_2^2 & \xi_2^3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \xi_1^3 & 3\xi_1^2\xi_2 & 3\xi_1\xi_2^2 & \xi_2^3 & 0 & 0
\end{vmatrix}.$$

Nous avons ainsi, en particulier, un moyen d'obtenir d'une façon générale des conditions nécessaires et suffisantes, sans hypothèse préalable, pour que tous les déterminants d'un certain ordre, tirés d'une matrice ou d'un déterminant soient nuls, puisque l'évanouissement de Δ correspond à l'évanouissement de tous les déterminants d'ordre $q-r+1$ du tableau formé par les coefficients des formes f_i.

En appliquant ce que nous venons de dire aux dérivées par-

tielles de même ordre h d'une forme f, prises avec les coefficients numériques convenables, on obtiendrait un invariant du système f, (ξ), (η), évidemment. En supposant $r = h$, puis remplaçant les (ξ) et les (η) par les (x), on retrouve ainsi le hessien de f sous différentes formes : en faisant les (η) égaux aux (ξ), on obtient donc dans ce cas une condition suffisante pour exprimer la dépendance linéaire proposée; mais c'est une exception.

CHAPITRE III.

LES SYSTÈMES LINÉAIRES.

I. — Les invariants des systèmes linéaires.

53. Nous appelons *système linéaire* un système S composé uniquement de variables isolées et de formes linéaires.

Remarquons d'abord que l'étude d'un tel système revient à celle d'un système composé uniquement de variables des deux espèces; et même on peut encore supposer que toutes les variables sont de première espèce, par exemple. En effet, si les (ξ) sont des variables de seconde espèce, en faisant $\xi_1 = \overline{x_2}$, $\xi_2 = -\overline{x_1}$, il est clair que les $(\overline{x})$ se transforment par la substitution σ de la même façon que les variables de première espèce, au facteur δ près. De plus, on peut prendre une forme linéaire de première espèce sous le type $(x\overline{x})$, de sorte que cette forme égalée à zéro définit précisément l'élément dont les coordonnées de première espèce sont $(\overline{x})$, et que ces $(\overline{x})$ se transforment, au facteur δ près, comme les variables de première espèce.

A partir de maintenant, nous appliquerons ces remarques, en nous bornant aux variables de première espèce, et en prenant toujours les formes linéaires sous la forme $(x\overline{x})$, ce qui permet de les remplacer par les variables $(\overline{x})$.

54. Soit donc un système linéaire S composé de n couples de variables isolées (x), (y), (z), (t), (u), ...

Les invariants du système sont tous les déterminants du type (xy), en nombre $\frac{n(n-1)}{2}$; ils forment, comme nous allons le faire voir, un système complet.

Entre ces invariants existent des relations, car $2n-3$ seule-

ment d'entre eux sont indépendants : on peut choisir pour ceux-là

$$(xy),\quad (xz),\quad (xt),\quad (xu),\quad \ldots,$$

$$(yz),\quad (yt),\quad (yu),\quad \ldots,$$

et tout autre déterminant tel que (zt) est lié à ceux-ci par la relation

$$(xy)(zt) = (xz)(yt) - (xt)(yz).$$

Tous ces invariants sont d'ordre -1, si les éléments du système sont à proprement parler des variables.

55. Démontrons maintenant que les invariants (xy) forment un système complet, c'est-à-dire que tout invariant du système S peut s'exprimer en fonction entière des déterminants (xy). Plus généralement, nous allons faire voir que tout semi-invariant du système S, des poids respectifs P_1 et P_2, est une fonction entière des déterminants (xy) et des variables x_2, y_2, z_2, ..., chaque terme contenant $P_1 - P_2$ facteurs du second type et $-P_1$ facteurs (xy), par suite. Ce théorème, dont la réciproque est évidente, contient le proposé.

Il suffit de démontrer le théorème pour un semi-invariant linéaire par rapport aux diverses séries de variables. En effet, par l'adjonction de variables nouvelles en nombre suffisant, et prenant assez de fois la polaire de la fonction donnée, on obtient finalement une fonction, qui est encore un semi-invariant évidemment, et qui est linéaire par rapport aux diverses séries de variables. De cette fonction on peut inversement tirer la fonction donné, en supposant identiques plusieurs séries de variables, d'après les propriétés des polaires.

Ceci posé, nous allons faire voir en effet qu'un semi-invariant linéaire par rapport à toutes les séries de variables, des poids respectifs P_1 et P_2, est une fonction entière de (xy) et des variables x_2, y_2, z_2, ..., celles-ci figurant en nombre $P_1 - P_2$ dans chaque terme de la fonction.

Le théorème est vrai pour une série de variables évidemment : x_2 est le seul semi-invariant des (x), linéaire par rapport aux (x).

Supposons le théorème vrai pour les variables (y), (z), (t), ...

et démontrons qu'il l'est encore si l'on adjoint à ces variables les nouvelles variables (x) : il sera alors vrai d'une façon générale.

Le semi-invariant considéré est de la forme $A_1 x_1 + A_2 x_2$; si A_1 est nul, A_2 est un semi-invariant du système (y), (z), ...; et par suite le théorème est démontré.

Si A_1 n'est pas nul, c'est évidemment un semi-invariant du système (y), (z), ..., des poids $P_1 + 1$ et P_2; par suite il est de la forme

$$\Sigma\alpha(yz)(tu)\ldots v_2 w_2 s_2 \ldots,$$

les premiers facteurs étant en nombre $-P_1 - 1$, les seconds en nombre $P_1 - P_2 + 1$, dans chaque terme. On peut alors écrire, $P_1 - P_2 + 1$ étant nécessairement positif,

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 = \Sigma\alpha(xv)(yz)(tu)\ldots w_2 s_2 \ldots + B_2 x_2;$$

le premier terme du second nombre est un semi-invariant du système (x), (y), (z), ..., qui est dans les conditions annoncées; donc $B_2 x_2$ est lui-même un semi-invariant, et l'on est ramené au premier cas, celui où A_1 était nul, de sorte que le théorème est complètement démontré [1].

56. Le système S admet comme invariants absolus géométriques les quantités de la forme $\frac{(xz)(yt)}{(xt)(yz)}$.

Il est facile de démontrer que tout invariant absolu géométrique rationnel est une fonction rationnelle des invariants absolus particuliers que nous venons de définir. Il suffit de démontrer qu'il en est ainsi, d'après ce qui précède, pour une expression de la forme

$$(xy)^{\lambda_{12}}(xz)^{\lambda_{13}}(xt)^{\lambda_{14}}\ldots(yz)^{\lambda_{23}}(yt)^{\lambda_{24}}\ldots(zt)^{\lambda_{34}}\ldots,$$

où les λ_{ij} sont des exposants entiers positifs ou négatifs, tels que la somme de tous ceux d'entre eux qui ont un indice commun soit nulle. Le théorème est vrai pour trois séries de variables, car alors les λ_{ij} sont tous nuls; il suffit donc de faire voir que s'il est vrai pour le système (y), (z), (t), ..., il est encore vrai pour ce même système auquel on a adjoint les (x). Or si l'on rem-

---

[1] Cette démonstration a été donnée par M. J. Deruyts (*Essai d'une théorie générale des formes algébriques*; Bruxelles, 1891).

place (xz), (xt), (xu), ..., par leurs valeurs tirées des équations

$$\frac{(xz)(yt)}{(xy)(zt)}=\mathrm{A}_3,\qquad \frac{(xt)(yz)}{(xy)(zt)}=\mathrm{A}_4,\qquad \frac{(xu)(yz)}{(xy)(zu)}=\mathrm{A}_5,\qquad \ldots,$$

l'expression considérée prend la forme

$$\mathrm{A}_3^{\lambda_{13}}\mathrm{A}_4^{\lambda_{14}}\mathrm{A}_5^{\lambda_{15}}\ldots\mathrm{P},$$

P étant une expression analogue, mais indépendante des (x).

Donc le théorème est général, puisqu'il s'applique à P.

II. — Le rapport anharmonique.

57. L'invariant absolu géométrique $\frac{(xz)(yt)}{(xt)(yz)}$ est appelé le *rapport anharmonique* des quatre éléments (x), (y), (z), (t), pris précisément dans cet ordre, et nous le représenterons par $(xyzt)$.

Le rapport anharmonique défini de cette façon ne diffère pas du rapport anharmonique défini par des considérations géométriques directes, lorsque les éléments (x), (y), ... sont des points en ligne droite, ou des droites passant par un point dans un plan, ...

Avec les quatre éléments (x), (y), (z), (t), pris dans un ordre quelconque, on peut former vingt-quatre rapports anharmoniques, mais il est évident que, si dans l'expression $(xyzt)$ on permute entre eux deux éléments quelconques et en même temps les deux autres, le nouveau rapport anharmonique ainsi formé ne diffère pas du premier. Il n'y a donc en réalité que six rapports anharmoniques distincts formés avec quatre éléments. On peut les écrire

$$k_1=(xyzt)=\frac{(xz)(yt)}{(xt)(yz)},\qquad k'_1=(xytz)=\frac{(xt)(yz)}{(xz)(yt)},$$

$$k_2=(xzty)=\frac{(xt)(zy)}{(xy)(zt)},\qquad k'_2=(xzyt)=\frac{(xy)(zt)}{(xt)(zy)},$$

$$k_3=(xtyz)=\frac{(xy)(tz)}{(xz)(ty)},\qquad k'_3=(xtzy)=\frac{(xz)(ty)}{(xy)(tz)}.$$

On a d'abord

$$k_1k'_1=k_2k'_2=k_3k'_3=1;$$

puis, à cause de l'identité

$$(xy)(zt)+(xz)(ty)+(xt)(yz)=0,$$

il vient

$$1-k_2-\frac{1}{k_3}=0,$$

$$1-k_3-\frac{1}{k_1}=0,$$

$$1-k_1-\frac{1}{k_2}=0;$$

et par suite, en fonction de k_1, on a

$$k'_1=\frac{1}{k_1},\qquad k_2=\frac{1}{1-k_1},\qquad k'_2=1-k_1,\qquad k_3=\frac{k_1-1}{k_1},\qquad k'_3=\frac{k_1}{k_1-1}.$$

58. Il peut arriver que deux ou plusieurs de ces rapports deviennent égaux. On a les différents cas suivants :

1°

(a) $\quad k_1=k'_1=1,\quad$ alors $\quad k_2=k'_3=\infty,\quad k_3=k'_2=0.$

(x) et (y) coïncident, ou bien (z) et (t).

(b) $\quad k_1=k'_3=0;\quad$ alors $\quad k_2=k'_2=1,\quad k_3=k'_1=\infty.$

(x) et (z) coïncident, ou bien (y) et (t).

(c) $\quad k_1=k'_2=\infty;\quad$ alors $\quad k_2=k'_1=0,\quad k_3=k'_3=1.$

(x) et (t) coïncident, ou bien (y) et (z).

2°

(a) $\quad k_1=k'_1=-1;\quad$ alors $\quad k_2=k'_3=\frac{1}{2},\quad k_3=k'_2=2.$

On dit dans ce cas que (x) et (y) sont *conjugués harmoniques* par rapport à (z) et (t), et inversement.

(b) $\quad k_1=k'_3=2;\quad$ alors $\quad k_2=k'_2=-1;\quad k_3=k'_1=\frac{1}{2}.$

(x) et (z) sont conjugués harmoniques par rapport à (y) et (t), et inversement.

(c) $\quad k_1=k'_2=\frac{1}{2};\quad$ alors $\quad k_2=k'_1=2,\quad k_3=k'_3=-1.$

(x) et (t) sont conjugués harmoniques par rapport à (y) et (z), et inversement.

3° ω désignant une racine cubique imaginaire de l'unité,

$$k_1 = k_2 = k_3 = -\omega, \qquad k'_1 = k'_2 = k'_3 = -\omega^2.$$

On dit alors que les quatre éléments (x), (y), (z), (t) forment une proportion *équianharmonique*.

En particulier, on voit que si deux des quatre éléments coïncident, les rapports anharmoniques ont deux par deux les valeurs 0, 1, ∞. Il en est de même si les quatre éléments coïncident deux par deux. Si trois au moins des quatre éléments coïncident, les rapports anharmoniques sont indéterminés.

59. Dans les cas particuliers examinés, les équations qui définissent les rapports anharmoniques sont, en appelant $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ l'inconnue :

1°

$$\rho_1 = 0, \qquad \rho_2 = 0, \qquad \rho_1 - \rho_2 = 0;$$

2°

$$\rho_1 + \rho_2 = 0, \qquad \rho_1 - 2\rho_2 = 0, \qquad \rho_2 - 2\rho_1 = 0;$$

3°

$$\rho_1^2 - \rho_1\rho_2 + \rho_2^2 = 0.$$

Entre les premiers membres de ces équations existe l'identité fondamentale

$$27\rho_1^2\rho_2^2(\rho_1 - \rho_2)^2 - (\rho_1 + \rho_2)^2(\rho_1 - 2\rho_2)^2(\rho_2 - 2\rho_1)^2 = 4(\rho_1^2 - \rho_1\rho_2 + \rho_2^2)^3.$$

60. Nous remarquerons qu'un élément (x) est défini sans ambiguïté par la condition que le rapport anharmonique $(xyzt)$ ait une valeur donnée, (y), (z) et (t) étant donnés.

En particulier le rapport $\frac{x_2}{x_1}$ des coordonnées d'un élément (x) est égal au rapport anharmonique $(x O O_1 O_2)$, où O désigne l'élément de coordonnées $(1, 1)$.

Il y a indétermination cependant si les trois éléments donnés coïncident, ou bien si (z) et (t) coïncident, avec $(xyzt) = 1$; ou bien si (y) et (t) coïncident, avec $(xyzt) = 0$; ou bien si (y) et (z) coïncident, avec $(xyzt) = \infty$.

Dans deux espaces homographiques quelconques, quatre couples d'éléments correspondants (x) et (x'), (y) et (y'), (z) et (z'), (t) et (t') déterminent même rapport anharmonique; on a

$$(xyzt) = (x'y'z't'),$$

puisque le rapport anharmonique est un invariant absolu.

Réciproquement, si deux espaces quelconques se correspondent de façon que tous les groupes de quatre couples d'éléments correspondants déterminent un même rapport anharmonique, ces deux espaces sont homographiques. Ceci résulte de ce que trois couples d'éléments correspondants déterminent une homographie, et de ce que le rapport anharmonique $(xyzt)$ détermine (x) d'une façon univoque, sans exception, lorsque (y), (z), (t) sont donnés, distincts.

III. — Les invariants en fonction des racines.

61. Considérons un système S composé de variables (x), (y), ..., et de formes $f = a_{x^p}$, $g = b_{x^{p'}}$, ... à une seule série de variables : nous supposons toutes les variables de même espèce, comme nous pouvons le faire sans diminuer la généralité.

Mettons en évidence les racines des formes f, g, ... en écrivant

$$f = \Pi(xa^{(i)}), \qquad g = \Pi(xb^{(j)}), \qquad \ldots,$$

comme au nº 7.

D'après ce que nous avons dit des fonctions symétriques des racines d'une forme telle que f, et ce qui précède, toute fonction entière des déterminants tels que (xy), $(xa^{(i)})$, $(xb^{(j)})$, $(a^{(i)}a^{(j)})$, $(b^{(i)}b^{(j)})$, $(a^{(i)}b^{(j)})$, ... sera un invariant du système S, si elle est homogène par rapport aux diverses séries de variables, et de plus symétrique et homogène des mêmes degrés par rapport aux divers couples des séries telles que $(a^{(1)})$, $(a^{(2)})$, ...; $(b^{(1)})$, $(b^{(2)})$, ...

Réciproquement, tout invariant entier du système S peut s'exprimer sous la forme d'une fonction entière des (x), (y), ..., $(a^{(i)})$, $(b^{(i)})$, ... jouissant des propriétés de symétrie et d'homogénéité que nous venons d'énoncer; et comme, en outre, ce sera évidemment un invariant du système formé par les (x), (y), ...

et les formes linéaires $(xa^{(i)})$, $(xb^{(j)})$, ..., d'après le théorème du n° 55, cette fonction sera une fonction entière des déterminants (xy), $(xa^{(i)})$, ..., $(a^{(i)}b^{(j)})$, ... mentionnés plus haut.

On voit de même que tout invariant absolu géométrique rationnel du système S peut être considéré comme une fonction rationnelle de rapports anharmoniques formés avec les éléments (x), (y), ..., $(a^{(i)})$, $(b^{(j)})$, ..., cette fonction étant symétrique par rapport aux divers couples des séries formées par les $(a^{(i)})$, les $(b^{(j)})$, ...

Ces propositions mettent en évidence l'importance du théorème relatif à la formation du système complet d'un système linéaire, et celle de la notion de rapport anharmonique.

62. Appliquons ce que nous venons de dire aux invariants que nous avons déjà rencontrés pour un système tel que S.

Si $f = a_{x^p}$, on a tout de suite

$$D^h_{xy}f = \frac{P_h P_{p-h}}{P_p} f \sum \frac{(ya^{(1)})(ya^{(2)})\ldots(ya^{(h)})}{(xa^{(1)})(xa^{(2)})\ldots(xa^{(h)})},$$

la sommation étant étendue à toutes les combinaisons des racines h à h.

On a

$$(xya^{(i)}a^{(j)}) = \frac{(xa^{(i)})(ya^{(j)})}{(xa^{(j)})(ya^{(i)})},$$

et par suite la condition $D^h_{xy}f = 0$ peut s'écrire

$$\Sigma(xya^{(1)}a^{(i_1)})(xya^{(2)}a^{(i_2)})\ldots(xya^{(h)}a^{(i_h)}) = 0,$$

la sommation étant étendue à toutes les combinaisons $(a^{(i_1)})$, $(a^{(i_2)})$, ..., $(a^{(i_h)})$ des racines h à h, $(a^{(1)})$, $(a^{(2)})$, ..., $(a^{(h)})$ restant fixes.

On peut aussi écrire dans les même conditions

$$\Sigma(xya^{(i_1)}a^{(1)})(xya^{(i_2)}a^{(2)})\ldots(xya^{(i_{p-h})}a^{(p-h)}) = 0.$$

Ces équations définissent les $p - h$ éléments (x) qui forment le système polaire d'ordre h de (y), par une relation entre rapports anharmoniques. Pour $h = 1$, on a

$$\Sigma(xya^{(1)}a^{(i)}) = 0;$$

pour $h = p - 1$, on a

$$\Sigma(xya^{(i)}a^{(1)}) = 0.$$

63. Si $f = a_{x^p}$, $g = b_{x^{p'}}$, on obtient facilement aussi

$$J(f, g) = \frac{fg}{pp'} \sum \frac{(a^{(i)}b^{(j)})}{(xa^{(i)})(xb^{(j)})},$$

$$J^2(f, g) = \frac{2fg}{p(p-1)p'(p'-1)} \sum \frac{(a^{(i)}b^{(k)})(a^{(j)}b^{(l)}) + (a^{(i)}b^{(l)})(a^{(j)}b^{(k)})}{(xa^{(i)})(xa^{(j)})(xb^{(k)})(xb^{(l)})},$$

et l'on pourrait continuer de même; on pourrait aussi réduire les relations $J(f, g) = 0$, $J^2(f, g) = 0$ à ne dépendre que de rapports anharmoniques.

Si $g = f$, on a

$$J^2(f, f) = -\frac{2f^2}{p^2(p-1)^2} \sum \left\{ \frac{(a^{(i)}a^{(j)})^2}{(xa^{(i)})^2(xa^{(j)})^2} + \frac{2(a^{(i)}a^{(j)})(a^{(i)}a^{(k)})}{(xa^{(i)})^2(xa^{(j)})(xa^{(k)})} \right\};$$

mais on a des identités telles que

$$\frac{(a^{(j)}a^{(k)})}{(xa^{(j)})(xa^{(k)})} + \frac{(a^{(k)}a^{(i)})}{(xa^{(k)})(xa^{(i)})} + \frac{(a^{(i)}a^{(j)})}{(xa^{(i)})(xa^{(j)})} = 0;$$

élevant au carré et ajoutant, il vient

$$(p-2)\sum \frac{(a^{(i)}a^{(j)})^2}{(xa^{(i)})^2(xa^{(j)})^2} - \sum \frac{2(a^{(i)}a^{(j)})(a^{(i)}a^{(k)})}{(xa^{(i)})^2(xa^{(j)})(xa^{(k)})} = 0,$$

et par suite, on a la formule plus simple

$$J^2(f, f) = -\frac{2f^2}{p^2(p-1)} \sum \frac{(a^{(i)}a^{(j)})^2}{(xa^{(i)})^2(xa^{(j)})^2}.$$

Si $J^2(f, f) = 0$, l'élément (x) ainsi défini a pour système polaire d'ordre $p-2$ un même élément (y) compté deux fois; de plus, on voit que le premier système polaire de (y) admet (x) comme élément double. Cette interprétation est évidente d'après la définition des systèmes polaires : généralement tous les invariants résultant des polaires pourront être interprétés de façon analogue.

CHAPITRE IV.

LES RÉSULTANTS ET LES DISCRIMINANTS.

I. — Les résultants.

64. Soient deux formes

$$f = a_{x^p} = \Pi(xa^{(i)}), \qquad g = b_{x^{p'}} = \Pi(xb^{(j)}).$$

Le *résultant* de ces deux formes est la fonction

$$R = \Pi a_{(b^{(j)})^p} = (-1)^{pp'} \Pi b_{(a^{(i)})^{p'}} = (-1)^{pp'} \Pi(a^{(i)} b^{(j)}).$$

où $a_{(b^{(j)})^p}$ par exemple désigne ce que devient f quand on y remplace les (x) par les $(b^{(j)})$.

R est un invariant d'ordre pp' du système formé par f, g, et les (x), des degrés p' et p respectivement par rapport aux (a) et aux (b). $R = 0$ est évidemment la condition nécessaire et suffisante pour que f et g aient au moins une racine commune.

Si f est le produit de deux formes f', f'', le résultant de f et g est évidemment le produit des résultants de f' et de g, et de f'' et g.

Si f et g sont deux formes de même degré, le résultant des formes $\lambda_1 f + \lambda_2 g$, $\mu_1 f + \mu_2 g$, les (λ) et les (μ) étant des constantes quelconques est évidemment $(\lambda\mu)^{pp'} R$, R étant le résultant de f et g; R est donc dans ce cas un combinant des formes f et g.

65. On peut calculer le résultant R en partant de sa définition : voici d'autres moyens plus simples.

Les formes f et g sont liées, quand elles ont une racine commune, et seulement dans ce cas, par une relation telle que

$$f'f - g'g = 0,$$

f' et g' étant des formes des degrés $p' - 1$ et $p - 1$ respectivement. Cela revient à dire que les $p - p'$ formes de degré $p + p' - 1$,

$x_1^{p'-1}f$, $x_1^{p'-2}x_2 f$, ..., $x_2^{p'-1}f$, $x_1^{p-1}g$, $x_1^{p-2}x_2 g$, ..., x_2^{p-1}, qui forment deux systèmes invariants, sont liées par une relation linéaire. Le déterminant de leurs coefficients, qui est des degrés p' et p par rapport aux (a) et aux (b) ne diffère donc du résultant que par un facteur numérique.

Supposons maintenant les deux formes f et g du même degré p, et écrivons-les de toutes les façons possibles sous la forme

$$f = f_1 x_1^{p_1} + f_2 x_2^{p_2},$$
$$g = g_1 x_1^{p_1} + g_2 x_2^{p_2},$$

p_1 et p_2 étant deux entiers positifs dont la somme est $p+1$.

Les p formes $f_1 g_2 - f_2 g_1$, de degré $p-1$, s'annulent en même temps, si f et g ont une racine commune, lorsque l'on prend pour (x) cette racine. Le déterminant des coefficients de ces formes, qui est précisément du degré p par rapport aux (a) et aux (b), ne diffère donc du résultant que par un facteur numérique.

Si les formes f et g n'étaient pas du même degré, si l'on avait $p' < p$, par exemple, on pourrait encore appliquer le même procédé : on remplacerait g par gg', g' étant une forme arbitraire de degré $p - p'$; on formerait le résultant de f et de gg' comme nous venons de le dire, et on le débarrasserait du facteur étranger constitué par le résultant de f et de g'; on obtiendrait ainsi le résultant R de f et g. Le facteur étranger est facile à former si l'on choisit g' d'une façon convenable : si par exemple $g' = (xy)^{p-p'}$, le facteur étranger sera $(a_{y^p})^{p-p'}$; si, plus particulièrement, $g' = x_1^{p-p'}$, le facteur étranger est $a_{0,p}^{p-p'}$.

Supposons encore f et g du même degré, et rappelons-nous que si alors f et g ont une racine commune, cette racine est au moins double pour leur jacobien $J(f, g)$, et par suite annule les deux dérivées partielles de ce jacobien.

Si alors on considère les $2p-2$ formes de degré $2p-3$

$$\frac{\partial J(f, g)}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial J(f, g)}{\partial x_2}, \quad x_1^{p-3}f, \quad x_1^{p-4}x_2 f, \quad \ldots, \quad x_2^{p-3}f, \quad x_1^{p-3}g, \quad \ldots, \quad x_2^{p-3}g,$$

il est visible que le déterminant de leurs coefficients ne différera du résultant R de f et g que par un facteur numérique.

On peut ramener le cas général où les formes ne sont pas de

même degré à ce cas particulier, en raisonnant comme précédemment.

On pourrait encore, dans le cas général, écrire comme résultant le déterminant des coefficients des formes J, $x_1^{p'-2}f$, …, $x_2^{p'-2}f$, $x_1^{p-2}g$, …, $x_2^{p-2}g$, de degré $p+p'-2$, et en nombre $p+p'-1$.

L'identité des différentes formes que nous venons de trouver pour le résultant est facile à vérifier directement.

66. Nous allons nous occuper maintenant de la détermination du nombre et du calcul des racines communes à deux formes f et g, lorsque leur résultant R est nul.

On peut partir de deux points de vue différents : on peut, en effet, chercher combien de racines de g appartiennent à f, ou combien de racines de f appartiennent à g; mais on peut aussi chercher le nombre proprement dit des racines communes à f et à g, c'est-à-dire encore le degré du plus grand commun diviseur de f et g. Dans le cas où les formes ont des racines multiples communes, il est clair que ces deux points de vue conduisent à des résultats différents. Si, en effet, (y) est une racine commune à f et à g, multiple des ordres q et q' pour ces deux formes, parmi les racines de g appartenant à f, (y) compte q' fois; parmi les racines de f appartenant à g, (y) compte q fois; parmi les racines communes à f et à g, (y) compte un nombre de fois égal au plus petit des deux nombres q et q'.

Cherchons d'abord combien de racines de g appartiennent à f, et calculons ces racines.

Remplaçons f par $f+\lambda h$, λ étant un paramètre arbitraire et h une forme semblable à f : $h = c_x^p$. Le résultant de $f+\lambda h$ et de g sera

$$R' = R - \lambda \frac{P_{p'}}{P_1 P_{p'-1}} D_{ac}^1 R + \lambda^2 \frac{P_{p'}}{P_2 P_{p'-2}} D_{ac}^2 R - \dots.$$

Supposons que q racines de g soient $(b^{(1)})$, $(b^{(2)})$, … $(b^{(q)})$, appartiennent à f, et pas davantage; alors on a directement

$$R' = \lambda^q c_{b^{(1)}}^p c_{b^{(2)}}^p \dots c_{b^{(q)}}^p (a_{b^{(q+1)}}^p - \lambda c_{b^{(q+1)}}^p) \dots (a_{b^{(p')}}^p - \lambda c_{b^{(p')}}^p).$$

On voit par suite que ce cas est caractérisé par ce fait que la po-

laire $D^k_{ac}R$ est nulle identiquement pour $k < q$, c'est-à-dire que les dérivées partielles de l'ordre $q - 1$ de R par rapport aux (a) sont toutes nulles; en outre $D^q_{ac}R$ n'est pas nulle identiquement, et contient le facteur $c_{(b^{(1)})^p} \ldots c_{(b^{(q)})^p}$; il en est de même d'ailleurs de tous les coefficients des puissances de λ dans R'. Ceci donne donc le moyen de calculer les racines de g qui appartiennent à f, puisque $D^q_{ac}R$ est précisément de degré q par rapport aux (c). Si en particulier on prend $h = (xy)^p$, les (y) étant des variables quelconques, l'invariant $D^{q-1}_{ac}R$ exprime par son évanouissement identique que q racines au moins de g appartiennent à f; et l'invariant $D^q_{ac}R$ est à un facteur près la puissance $p^{\text{ième}}$ du produit

$$(yb^{(1)})(yb^{(2)})\ldots(yb^{(q)}).$$

On raisonnerait de même en renversant les rôles de f et g.

Si les coefficients de f sont considérés comme des formes de même degré par rapport à des variables $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$, et si, lorsque entre ces variables existe l'unique relation irréductible $\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n) = 0$, on suppose que q racines de g appartiennent à f, il résulte de ce qui précède que le résultant R de f et g contiendra le facteur φ à la puissance q.

67. Cherchons maintenant à reconnaître le nombre des racines communes à f et g et à les calculer.

Si les deux formes f et g ont au moins q racines communes, et seulement dans ce cas, on sait que l'on peut déterminer deux autres formes f' et g', respectivement des degrés $p' - q$ et $p - q$, telles que l'on ait identiquement

$$ff' + gg' = 0.$$

Ceci revient à dire qu'il existe une relation linéaire entre les formes $x_1^{p'-q}f$, $x_1^{p'-q-1}x_2 f$, $\ldots$, $x_2^{p'-q}f$, $x_1^{p-q}g$, $\ldots$, $x_2^{p-q}g$, en nombre $p + p' - 2q + 2$, et de degré $p + p' - q$; ces formes constituent deux systèmes invariants. Si alors on procède comme au n° 50, en adjoignant à ces formes les suivantes :

$$x_1^{q-2}h,\quad x_1^{q-2}x_2 h,\quad \ldots,\quad x_2^{q-2}h,$$

h étant une forme arbitraire de degré $p+p'-2q+2$, le déterminant des coefficients des $p+p'-q+1$ formes ainsi obtenues sera un invariant de f, g, h, dont l'évanouissement sera une condition nécessaire et suffisante pour que f et g aient au moins q racines communes. En particulier, on peut prendre $h=(xy)^{p+p'-2q+2}$, et l'on obtient un invariant de f, g et des (y), soit R_q, qu'il est inutile d'écrire : c'est un déterminant d'ordre $p+p'-q+1$, des degrés $(q-1)(p+p'-2q+2)$, $p'-q+1$, $p-q+1$ respectivement par rapport aux (y), aux (a) et aux (b). Pour $q=1$, R_q est le résultant de f et g, tel que nous l'avons calculé au n° 65.

Supposons qu'il y ait précisément q racines communes; alors, h étant arbitraire de degré $p+p'-2q$, les formes $x_1^{p'-q-1}f$, ..., $x_2^{p'-q-1}f$, $x_1^{p-q-1}g$, ..., $x_2^{p-q-1}g$, $x_1^{q-1}h$, ..., $x_2^{q-1}h$, de degré $p+p'-q-1$, et en nombre $p+p'-q$, ne sont pas liées par une relation linéaire quand h reste quelconque; mais si h admet l'une des racines communes $(c^{(1)})$, $(c^{(2)})$, ..., $(c^{(q)})$ à f et à g, une relation linéaire existe évidemment entre les formes considérées; le déterminant qui, égalé à zéro, exprime ce fait est donc divisible par $h(c^{(1)})\,h(c^{(2)})\dots h(c^{(q)})$, et comme il est précisément de degré q par rapport aux coefficients de h, on a ainsi un moyen de calculer les racines communes à f et à g.

Si, en particulier, on prend $h=(xy)^{p+p'-2q}$, le déterminant considéré est R_{q+1}, et est à un facteur près la puissance $(p+p'-2q)^{\text{ième}}$ du produit $(yc^{(1)})(yc^{(2)})\dots(yc^{(q)})$.

Ajoutons qu'il est facile d'exprimer R_q en fonction des racines de f ou g; on a sans peine par exemple, à un facteur près, la valeur de R_q

$$\sum \frac{[(yb^{(1)})(yb^{(2)})\dots(yb^{(q-1)})]^{p+p'-2q+2} f(b'^{(q)})\dots f(b'^{(p')})}{(b^{(1)}b'^{(q)})\dots(b^{(1)}b'^{(p')})(b^{(2)}b'^{(q)})\dots(b'^{(q-1)}b'^{(p')})}.$$

On pourrait encore remarquer que l'on peut toujours vérifier l'identité $ff'+gg'+hh'=0$ où f', g' et h' sont des degrés $p'-q$, $p-q$, $q-1$, et où h est une forme arbitraire du degré $p+p'-2q+1$. Si f et g ont $q-1$ racines communes, l'équation $h'=0$ détermine ces racines, tandis que, si f et g ont au moins q racines communes, h' est nul identiquement. On définit ainsi de nouveaux invariants qui peuvent se ramener aux précédents : pour $q=1$, h' est précisément le résultant.

68. Revenons à la méthode donnée au n° 65 pour former le résultant dans le cas de $p'=p$.

Posons, en changeant les notations,

$$f=f'_1 x_1^p + f''_1 x_2, \qquad g=g'_1 x_1^p + g''_1 x_2,$$
$$f=f'_2 x_1^{p-1} + f''_2 x_2^2, \qquad g=g'_2 x_1^{p-1} + g''_2 x_2^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$f'_i g''_i - f''_i g'_i = h_i.$$

Si nous écrivons

$$f = a_0 x_1^p + a_1 x_1^{p-1} x_2 + a_2 x_1^{p-2} x_2^2 + \ldots,$$
$$g = b_0 x_1^p + b_1 x_1^{p-1} x_2 + b_2 x_1^{p-2} x_2^2 + \ldots,$$

on a

$$h_1 = (a_0 b_1) x_1^{p-1} + (a_0 b_2) x_1^{p-2} x_2 + (a_0 b_3) x_1^{p-3} x_2^2 + \ldots,$$
$$h_2 = (a_0 b_2) x_1^{p-1} + [(a_0 b_3) + (a_1 b_2)] x_1^{p-2} x_2$$
$$+ [(a_0 b_4) + (a_1 b_3)] x_1^{p-3} x_2^2 + \ldots,$$
$$h_3 = (a_0 b_3) x_1^{p-1} + [(a_0 b_4) + (a_1 b_3)] x_1^{p-2} x_2$$
$$+ [(a_0 b_5) + (a_1 b_4) + (a_2 b_3)] x_1^{p-3} x_2^2 + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

où

$$(a_i b_j) = a_i b_j - a_j b_i.$$

On voit que le déterminant des coefficients des h_i, c'est-à-dire le résultant R de f et g, sera un déterminant symétrique.

On voit aussi que la forme

$$h_1 y_1^{p-1} + h_2 y_1^{p-2} y_2 + h_3 y_1^{p-3} y_2^2 + \ldots$$

est égale au quotient $\dfrac{f(x)g(y)-f(y)g(x)}{(xy)}$, symétrique en (x) et (y), et invariant.

De même que le résultant peut se mettre sous la forme du déterminant des coefficients des h_i, le déterminant R_q du numéro précédent peut se mettre sous la forme du déterminant Δ du n° 52, dont l'évanouissement exprime que les h_i sont liées par q relations linéaires, et dans lequel on remplace les (ξ) et les (η) par les (y). Pour le faire voir, il suffit de remarquer que l'on obtient ainsi, d'après ce qui précède, un invariant, et de montrer que cet invariant est du même degré que R_q par rapport aux (y) et a même

source : l'égalité des degrés est évidente ; nous allons montrer l'égalité des sources sur un cas particulier.

Soit $p = 5$, $q = 3$; l'invariant Δ considéré devient

$$\begin{vmatrix} (a_0 b_1) & (a_0 b_2) & (a_0 b_3) & (a_0 b_4) & (a_0 b_5) & y_2^3 & 0 \\ (a_0 b_2) & (a_0 b_3)+(a_1 b_2) & (a_0 b_4)+(a_1 b_3) & (a_0 b_5)+(a_1 b_4) & (a_1 b_5) & -3y_1y_2^2 & y\ldots \\ (a_0 b_3) & (a_0 b_4)+(a_1 b_3) & (a_0 b_5)+(a_1 b_4)+(a_2 b_3) & (a_1 b_5)+(a_2 b_4) & (a_2 b_5) & +3y_1^2y_2 & -3y_1y_2^2 \\ (a_0 b_4) & (a_0 b_5)+(a_1 b_4) & (a_1 b_5)+(a_2 b_4) & (a_2 b_5)+(a_3 b_4) & (a_3 b_5) & -y_1^3 & 3y_1^2y_2 \\ (a_0 b_5) & (a_1 b_5) & (a_2 b_5) & (a_3 b_5) & (a_4 b_5) & 0 & -\ldots \\ y_2^3 & -3y_1y_2^2 & +3y_1^2y_2 & -y_1^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_2^3 & -3y_1y_2^2 & -3y_1^2y_2 & -y_1^3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

tandis que l'on a

$$R_3 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ y_2^6 & -6y_1y_2^5 & 15y_1^2y_2^4 & -20y_1^3y_2^3 & -15y_1^4y_2^2 & -6y_1^5y_2 & y_1^6 & 0 \\ 0 & y_2^6 & -6y_1y_2^5 & 15y_1^2y_2^4 & -20y_1^3y_2^3 & 15y_1^4y_2^2 & -6y_1^5y_2 & y_1^6 \end{vmatrix}$$

Les coefficients de y_1^{12} dans ces deux invariants sont respectivement

$$\begin{vmatrix} (a_0 b_1) & (a_0 b_2) & (a_0 b_3) \\ (a_0 b_2) & (a_0 b_3)+(a_1 b_2) & (a_0 b_4)+(a_1 b_3) \\ (a_0 b_3) & (a_0 b_4)-(a_1 b_3) & (a_0 b_5)+(a_1 b_4)+(a_2 b_3) \end{vmatrix}$$

et

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix};$$

pour montrer leur égalité au signe près, il suffit de multiplier le

second par

$$\begin{vmatrix} -b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b_1 & -b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b_2 & -b_1 & -b_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Comme on le voit, nous sommes encore ici dans un cas où, pour exprimer que les h_i sont liées par q relations linéaires, on obtient une condition nécessaire et suffisante en rendant identiques, dans le déterminant Δ du n° 52, les variables des deux séries. En effet, dès que f et g ont q racines communes, les h_i sont liées par q relations linéaires.

On pourrait multiplier les résultats de ce genre, et varier de bien des façons les moyens de les obtenir : nous ne nous sommes arrêtés qu'aux plus importants.

69. On peut se proposer de chercher des conditions nécessaires pour que q formes données ne dépendant que des (x) et de même degré p, $f_1, f_2, \ldots, f_q$ aient r racines communes.

Il faut et il suffit que les deux formes

$$y_1^{q-1} f_1 + y_1^{q-2} y_2 f_2 + \ldots + y_2^{q-1} f_q$$

et

$$z_1^{q-1} f_1 + z_1^{q-2} z_2 f_2 + \ldots + z_2^{q-1} f_q$$

aient r racines communes, quelles que soient les quantités (y) et (z). On peut employer, pour éviter les puissances de (yz) dans le résultat, les combinaisons évidentes

$$[yz]^{q-2} f_1 + \quad y_2 z_2 [yz]^{q-3} f_2 + \ldots + y_2^{q-2} z_2^{q-2} f_{q-1},$$
$$y_1^{q-2} z_1^{q-2} f_2 + y_1^{q-3} z_1^{q-3} [yz]^1 f_3 + \ldots + [yz]^{q-2} f_q,$$

où la notation $[yz]^i$ désigne le quotient $\dfrac{y_1^{i+1} z_2^{i+1} - y_2^{i+1} z_1^{i+1}}{(yz)}$, facile à développer.

La condition cherchée sera, par suite, en faisant

$$f_1 = a_0 x^p + a_1 x^{p-1} x_2 + \ldots,$$
$$f_2 = b_0 x^p + b_1 x^{p-1} x_2 + \ldots,$$
$$f_3 = c_0 x^p + c_1 x^{p-1} x_2 + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

l'évanouissement identique du déterminant d'ordre $2p-r+1$

$$\begin{vmatrix}
a_0[yz]^{q-2}+b_0y_2z_2[yz]^{q-3}+\ldots & a_1[yz]^{q-2}+b_1y_2z_2[yz]^{q-3}+\ldots & \ldots \\
0 & a_0[yz]^{q-2}+b_0y_2z_2[yz]^{q-3}+\ldots & \ldots \\
. & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\
b_0y_1^{q-2}z_1^{q-2}+c_0y_1^{q-3}z_1^{q-3}[yz]^1+\ldots & b_1y_1^{q-2}z_1^{q-2}+c_1y_1^{q-3}z_1^{q-3}[yz]^1+\ldots & \ldots \\
0 & b_0y_1^{q-2}z_1^{q-2}+c_0y_1^{q-3}z_1^{q-3}[yz]^1+\ldots & \ldots \\
. & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\
t_2^{2p-2r+2} & -(2p-2r+2)t_1t_2^{2p-2r+1} & \ldots \\
0 & t_2^{2p-2r+2} & \ldots \\
. & \ldots\ldots\ldots & \ldots
\end{vmatrix},$$

où les (t) sont de nouvelles variables et où l'on distingue trois groupes contenant chacun respectivement $p-r+1$, $p-r+1$ et $r-1$ lignes. Ce déterminant peut se transformer, à une puissance près de $[yz]^{q-2}$, dans le suivant, d'ordre $r-1+q(p-r+1)$,

$$\begin{vmatrix}
a_0 & a_1 & \ldots & y_2z_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \ldots \\
0 & a_0 & \ldots & 0 & y_2z_2 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \ldots \\
. & .. & .. & . & \ldots. & \ldots & . & . & \ldots & \ldots \\
b_0 & b_1 & .. & -[yz]^1 & 0 & \ldots & y_2z_2 & 0 & \ldots & \ldots \\
0 & b_0 & \ldots & 0 & -[yz]^1 & \ldots & 0 & y_2z_2 & \ldots & \ldots \\
. & .. & \ldots & . & \ldots\ldots & .. & . & \ldots. & \ldots & \ldots \\
c_0 & c_1 & \ldots & y_1z_1 & 0 & \ldots & -[yz]^1 & 0 & \ldots & \ldots \\
0 & c_0 & \ldots & 0 & y_1z_1 & \ldots & 0 & -[yz]^1 & \ldots & \ldots \\
. & .. & \ldots & . & \ldots. & \ldots & . & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\
d_0 & d_1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & y_1z_1 & 0 & \ldots & \ldots \\
0 & d_0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & y_1z_1 & \ldots & \ldots \\
. & .. & \ldots & . & . & \ldots & . & \ldots. & \ldots & \ldots \\
. & .. & \ldots & . & . & \ldots & . & \ldots. & \ldots & \ldots \\
t_2^{2p-2r+2} & .. & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \ldots \\
0 & t_2^{2p-2r+2} & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \ldots \\
. & \ldots\ldots. & \ldots & . & . & \ldots & . & . & \ldots & \ldots
\end{vmatrix},$$

où l'on distingue : 1° q groupes de $p-r+1$ lignes et un groupe de $r-1$ lignes ; 2° un groupe de $2p-r+1$ colonnes et $q-2$ groupes de $p-r+1$ colonnes.

Pour le démontrer, supposons $p = 5$, $q = 4$, $r = 3$; le déterminant précédent s'écrit

$$\begin{vmatrix}
a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 & 0 & y_2 z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 & 0 & y_2 z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 & 0 & y_2 z_2 & 0 & 0 & 0 \\
b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & 0 & 0 & -[yz]^1 & 0 & 0 & y_2 z_2 & 0 & 0 \\
0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & 0 & 0 & -[yz]^1 & 0 & 0 & y_2 z_2 & 0 \\
0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & 0 & 0 & -[yz]^1 & 0 & 0 & y_2 z_2 \\
c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & 0 & 0 & y_1 z_1 & 0 & 0 & -[yz]^1 & 0 & 0 \\
0 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & 0 & 0 & y_1 z_1 & 0 & 0 & -[yz]^1 & 0 \\
0 & 0 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & 0 & 0 & y_1 z_1 & 0 & 0 & -[yz]^1 \\
d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_1 z_1 & 0 & 0 \\
0 & d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_1 z_1 & 0 \\
0 & 0 & d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_1 z_1 \\
t_2^6 & -6 t_1 t_2^5 & 15 t_1^2 t_2^4 & -20 t_1^3 t_2^3 & 15 t_1^4 t_2^2 & -6 t_1^5 t_2 & t_1^6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & t_2^6 & -6 t_1 t_2^5 & 15 t_1^2 t_2^4 & -20 t_1^3 t_2^3 & 15 t_1^2 t_2^4 & -6 t_1^5 t_2 & t_1^6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}$$

en le multipliant par le suivant, analogue

$[yz]^2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	$[yz]^2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	$[yz]^2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$y_2z_2[yz]^1$	0	0	$y_1^2z_1^2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	$y_2z_2[yz]^1$	0	0	$y_1^2z_1^2$	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	$y_2z_2[yz]^1$	0	0	$y_1^2z_1^2$	0	0	0	0	0	0	0
$y_2^2z_2^2$	0	0	$y_1z_1[yz]^1$	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	$y_2^2z_2^2$	0	0	$y_1z_1[yz]^1$	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	$y_2^2z_2^2$	0	0	$y_1z_1[yz]^1$	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	$[yz]^2$	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	$[yz]^2$	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	$[yz]^2$	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

on retrouve le déterminant primitif, à un facteur près.

On fera de même dans le cas général, le déterminant multiplicateur auxiliaire étant toujours facile à former.

Le déterminant obtenu en dernier lieu est un invariant multiple pour la forme

$$y_1^{q-1}f_1 - y_1^{q-2}y_2f_2 - \cdots$$

et les variables (y), (z) et (t), les (y) et les (z) formant un même groupe, les (x) et les (t) un autre.

Dans certains cas, on pourra rendre identiques certaines séries de variables.

II. — Les discriminants

70. Le *discriminant* S d'une forme $f = a_x^p = \Pi(xa^i)$ est le résultant des deux dérivées partielles $f_1 = \frac{1}{p}\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $f_2 = \frac{1}{p}\frac{\partial f}{\partial x_2}$, de cette forme ; ces dérivées partielles formant un système invariant. S est un invariant de f d'ordre $p(p-1)$, de degré $2(p-1)$ par rapport aux (a).

$S = 0$ est la condition nécessaire et suffisante pour que f ait une racine multiple, de sorte que f ne peut différer du produit $\Pi(a^ia^j)^2$ que par un facteur numérique.

D'après cette remarque, le discriminant du produit de deux formes est égal au produit de leurs discriminants multiplié par le carré de leur résultant. C'est ainsi que l'on voit que si dans S on fait $a_{p,0} = 0$, les termes restants ne diffèrent que par un facteur numérique du produit de $a^2_{p-1,1}$ par le discriminant de $\dfrac{f - a_{p,0}x_1^p}{x_2}$.

Plus généralement, si $a_{p,0}$, $a_{p-1,1}$, $a_{p-2,2}$, ... sont divisibles par λ^k, λ^{k-1}, λ^{k-2}, ..., λ étant un paramètre, le discriminant de f sera divisible par $\lambda^{k(k-1)}$: si, en effet, on considère λ comme un infiniment petit, l'équation $f = 0$, en $\dfrac{x_2}{x_1}$, a k racines infiniment petites de l'ordre de λ; et par suite $\Pi(a_i a_j)^2$ est divisible par $\lambda^{k(k-1)}$. Un même raisonnement peut servir dans les cas analogues.

71. Cherchons à déterminer le nombre et la nature des racines multiples de f lorsque son discriminant est nul, et à calculer ces racines.

Soit g une forme quelconque semblable à f, $g = b_{x^p}$, et λ un paramètre arbitraire : le discriminant de $f + \lambda g$ est

$$S' = S + \lambda \frac{P_{2p-2}}{P_1 P_{2p-3}} D^1_{ab} S + \lambda^2 \frac{P_{2p-2}}{P_2 P_{2p-4}} D^2_{ab} S + \ldots;$$

S' est aussi le résultant de formes $f_1 + \lambda g_1$, $f_2 + \lambda g_2$ que nous appellerons k_1 et k_2.

Considérons le résultant R' des formes

$$x_1 k_1 + x_2 k_2 = f + \lambda g,$$
$$k_1 g_2 - k_2 g_1 = J(f, g);$$

il contient S' en facteur, et aussi le résultant R de f et g, puisque si l'on a $x_1 k_1 + x_2 k_2 = 0$ et $k_1 g_2 - k_2 g_1 = 0$ sans que k_1 et k_2 soient nuls, on a $x_1 g_1 + x_2 g_2 = g = 0$, et par suite $f = 0$. En comparant les degrés par rapport aux coefficients, on voit que l'on peut écrire $R' = m R S'$, m étant numérique et indépendant de λ. Cela étant, supposons que $(a^{(1)})$, $(a^{(2)})$, ... $(a^{(i)})$ soient communes respectivement q_1, q_2, ... q_i fois à f_1 et f_2, et par suite soient racines multiples des degrés $q_1 + 1$, $q_2 + 1$, ... pour f; pour abréger, soit $q = q_1 + q_2 + \ldots + q_i$. Appelons aussi $(c^{(1)})$, $(c^{(2)})$, ... $(c^{(2p-2-q)})$ les autres racines de $J(f, g)$. On a

$$R' = \lambda^q b^{q_1}_{(a^{(1)})^p} b^{q_2}_{(a^{(2)})^p} \ldots b^{q_i}_{(a^{(i)})^p} (a_{(c^{(1)})^p} + \lambda b_{(c^{(1)})^p}) \ldots.$$

et le coefficient de λ^q n'est pas nul dans cette expression, si g reste arbitraire; si en effet $a_{(c^{(1)})^p}$ par exemple était nul, on aurait pour les (x) égaux aux $(c^{(1)})$, à la fois

$$x_1 f_1 + x_2 f_2 = 0, \qquad f_1 g_2 - f_2 g_1 = 0,$$

sans que f_1 et f_2 fussent nuls; par suite, on aurait aussi $x_1 g_1 + x_2 g_2 = g = 0$, ce qui est inadmissible.

Donc, f_1 et f_2 ayant q racines communes, distinctes ou non, on voit d'abord que R' et par suite S' contient λ^q en facteur, sans que le coefficient de λ^q soit nul : les dérivées partielles de l'ordre $q-1$ de S par rapport aux (a) sont donc toutes nulles, et $D^q_{ab} S$ n'est pas nul identiquement.

Remarquons maintenant que si l'on pose

$$\varphi = (xc^{(1)})(xc^{(2)})\ldots,$$
$$\psi = (xa^{(1)})^{q_1}(xa^{(2)})^{q_2}\ldots(xa^{(i)})^{q_i},$$

le coefficient de λ^q dans R' est égal au produit du résultant de g et ψ et du résultant de f et φ. Remplaçons alors g par $g + \mu h$, h étant une forme semblable à f, et μ un nouveau paramètre arbitraire, et supposons que g admette la racine $(a^{(1)})$ par exemple. Si R'' désigne ce que devient R' dans ce cas, R'' est divisible par λ^q, et le coefficient de λ^q est le produit du résultant de $g + \mu h$ et de ψ par le résultant de f et de φ', φ' désignant ce que devient φ. Le résultant de $g + \mu h$ et de ψ contient en facteur μ^{q_1}; le résultant de f et φ' contient de même μ^{q_1+1} en facteur, puisque f admet $q_1 + 1$ fois la racine $(a^{(1)})$, que φ admet cette même racine au moins une fois dans notre hypothèse (46), enfin que φ' se développe sous la forme $\varphi + \mu\varphi_1 + \ldots$. Le coefficient de λ^q dans R'' contient donc μ^{2q_1+1} en facteur; le résultant de f et de $g + \mu h$ contient d'ailleurs μ^{q_1+1} en facteur; donc finalement le discriminant S'' de $f + \lambda(g + \mu h)$ contient $\lambda^q \mu^{q_1}$ en facteur. D'après cela, les polaires $D^k_{bc}(D^q_{ab} S)$, qui sont les coefficients des termes $\lambda^q \mu^k$ dans S'', les (c) étant les coefficients de h, sont toutes nulles pour $k < q_1$, dans l'hypothèse faite, et par suite $D^q_{ab} S$ contient le facteur $b^{q_1}_{a^{(1)p}}$. Comme $D^q_{ab} S$ est de degré q par rapport aux (b), cette quantité est donc égale, à un facteur près indépendant des (b), au produit $b^{q_1}_{a^{(1)p}} b^{q_2}_{a^{(2)p}} \ldots$.

On a ainsi le moyen de calculer les racines multiples de f. Si, en

particulier, on prend $g = (xy)^p$, l'invariant $D_{ab}^{q-1}S$ exprime par son évanouissement identique que f_1 et f_2 ont q racines communes au moins, et l'invariant $D_{ab}^{q}S$ est à un facteur près la puissance $p^{\text{ième}}$ du produit $(ya^{(1)})^{q_1}(ya^{(2)})^{q_2}\dots(ya^{(i)})^{q_i}$.

On fera une remarque analogue à celle du n° 66 relative au cas où les coefficients de f seraient des formes de même degré par rapport à des variables $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

72. On peut aussi appliquer à f_1 et f_2 ce que nous avons dit au n° 67; ces deux formes auront q racines communes si un certain déterminant S_q est nul identiquement; S_q est d'ordre $2p - q - 1$, des degrés $2(q-1)(p-q)$ et $2(p-q)$ par rapport aux (y) et aux (a); dans ce même cas, S_{q+1} sera à un facteur près la puissance $2(p-q-1)$ du produit $(ya^{(1)})^{q_1}(ya^{(2)})^{q_2}\dots(ya^{(i)})^{q_i}$, considéré plus haut.

En fonction des racines de f, on trouve, à un facteur près, pour S_q la valeur

$$\Sigma[(ya^{(1)})(ya^{(2)})\dots(ya^{(q-1)})]^{2(p-q)}(a^{(q)}a^{(q+1)})^2\dots(a^{(p-1)}a^p)^2.$$

On peut aussi appliquer ce que nous avons dit au n° 69 de la façon suivante : si l'on veut exprimer que f a q racines d'ordre $h+1$ de multiplicité, on exprimera que les $h+1$ dérivées partielles d'ordre h prises avec les facteurs numériques convenables ont q racines communes. On obtiendra ainsi un invariant représenté par un déterminant d'ordre

$$q - 1 + (h+1)(p - h + q + 1).$$

Nous n'insisterons pas davantage sur ces questions.



CHAPITRE V.

LA FORME BILINÉAIRE.

73. La forme bilinéaire

$$f(x, y) = a_{xy} = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_2y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2,$$

l'écriture des coefficients étant simplifiée, comme nous le ferons toujours dans l'étude des formes particulières, offre cet intérêt particulier que ses propriétés sont celles de l'homographie. Si, en effet, on a $f = 0$, on peut écrire

$$\frac{x_1}{-a_{21}y_1 - a_{22}y_2} = \frac{x_2}{a_{11}y_1 + a_{12}y_2},$$

et si le déterminant $j = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ n'est pas nul, on définit ainsi une homographie entre les éléments (x) et les éléments (y). Si l'on a $j = 0$, nous dirons encore qu'il y a homographie, mais cette homographie sera *singulière;* ses propriétés sont les suivantes : si A est l'élément (x) de coordonnées $(-a_{21}, a_{11})$ ou $(-a_{22}, a_{12})$, et si B est l'élément (y) de coordonnées $(-a_{22}, a_{21})$ ou $(-a_{12}, a_{11})$, à tout élément (y) autre que B correspond toujours A, et à B correspondent tous les éléments (x); à tout élément (x) autre que A correspond B, et à A correspondent tous les éléments (y).

Si les espaces X et Y remplis par les (x) et les (y) sont distincts, les invariants multiples de f, des (x) et des (y) sont seuls intéressants : il est visible qu'il n'y en a pas d'autres que f et j, de signification évidente. On peut alors, si j n'est pas nul, ramener f à la forme canonique simple

$$a'_{12}(x'_1y'_2 - x'_2y'_1),$$

et cela d'une infinité de façons. Si j est nul, f peut se ramener à la forme

$$a'_{11}x'_1y'_1.$$

74. Nous allons nous attacher au cas particulièrement intéressant où l'on suppose les séries X et Y coïncidantes, et rapportées aux mêmes coordonnées, ce qui ne diminue pas la généralité; nous étudierons alors le système formé par f, les (x) et les (y).

Nous avons d'abord, outre f et (xy), l'invariant $g = f(y, x)$, que l'on déduit de f en permutant les (x) et les (y). $g = 0$ est l'équation de (x) de Y correspondant à (y) de X.

Nous avons aussi les invariants $h = f(x, x)$, $k = f(y, y)$; égalés à zéro, ils définissent les éléments qui, considérés comme appartenant à X ou à Y, coïncident avec leurs correspondants. Les identités

$$f - g = (a_{12} - a_{21})(xy),$$
$$fg - hk = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(xy)^2$$

nous conduisent encore aux invariants proprement dits

$$i = a_{12} - a_{21}, \qquad j = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Les invariants f, g, h, k sont d'ordre zéro; (xy), i et j sont respectivement des ordres -1, 1 et 2.

Ces sept invariants, dont cinq seulement sont indépendants, forment un système complet.

Comme on le voit, la forme f seule, qui ne dépend que de quatre coefficients, admet cependant deux invariants distincts i et j, et par suite un invariant absolu géométrique $\frac{i^2}{j}$; c'est là un fait exceptionnel.

La signification de $i = 0$ est facile à trouver : en effet, pour $i = 0$, on a $f = g$, et réciproquement; par suite, (y) a toujours même correspondant, qu'il soit considéré comme appartenant à X ou à Y, et ceci n'a lieu que dans ce cas; on dit qu'il y a *involution*.

h et k sont des formes nulles identiquement, si f se réduit à (xy); alors les séries X et Y sont confondues : c'est un cas que nous pouvons écarter.

75. On peut retrouver les résultats précédents en cherchant directement les éléments *doubles*, c'est-à-dire ceux qui coïncident avec leurs correspondants, qu'on les considère comme appartenant à X ou à Y.

Il faut en effet, pour trouver de tels éléments, résoudre les équations

$$\frac{x_1}{-a_{21}x_1 - a_{22}x_2} = \frac{x_2}{a_{11}x_1 + a_{12}x_2},$$

ce qui conduit aux équations nouvelles, en appelant $\frac{1}{\rho}$ la valeur commune de ces rapports,

$$(a_{21} + \rho)x_1 + a_{22}x_2 = 0,$$
$$a_{11}x_1 + (a_{12} - \rho)x_2 = 0,$$

avec

$$\begin{vmatrix} a_{21} + \rho & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} - \rho \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ou} \quad \rho^2 - i\rho - j = 0.$$

Les racines de l'équation en ρ étant invariantes, puisqu'elles sont telles que la forme $g + \rho(xy)$ ait son invariant j nul, on retrouve ainsi les invariants i et j.

Il y a deux éléments doubles, confondus si l'on a $i^2 - 4j = 0$. Si $j = 0$, l'homographie est singulière et les éléments doubles sont les éléments A et B des deux séries X et Y définies précédemment; si en outre $i = 0$, ces éléments sont confondus, et il y a involution singulière.

76. Si les éléments doubles sont confondus en O'_1, on peut ramener f à la forme canonique

$$a'_{11}x'_1y'_1 + a'_{12}(x'y'),$$

a'_{11} n'étant pas nul.

Les éléments doubles étant distincts, en les prenant pour les nouveaux éléments fondamentaux O'_1 et O'_2, on réduit f à la forme canonique

$$f' = a'_{12}x'_1y'_2 + a'_{21}x'_2y'_1,$$

$a'_{12} + a'_{21}$ n'étant pas nul.

Par quelles transformations arrive-t-on à cette forme simple? Introduisons des variables (z) quelconques; on a

$$\begin{aligned} h(x)h(z) &= f(x, z)g(x, z) + j(xz)^2 \\ &= f^2(x, z) - i(xz)f(x, z) + j(xz)^2 \\ &= \left[f(x, z) - (xz)\frac{i + \sqrt{i^2 - 4j}}{2}\right]\left[f(x, z) - (xz)\frac{i - \sqrt{i^2 - 4j}}{2}\right]; \end{aligned}$$

puisque $h(x)$ doit se transformer en $(a'_{12} + a'_{21}) x'_1 x'_2$, posons

$$x'_1 = f(x, z) - (xz) \frac{i + \sqrt{i^2 - 4j}}{2},$$

$$x'_2 = f(x, z) - (xz) \frac{i - \sqrt{i^2 - 4j}}{2},$$

les formules pour passer des (y) aux (y') étant analogues.

Le déterminant de la substitution linéaire ainsi définie est, les (x) étant les variables primitives, $\frac{-1}{h(z)\sqrt{i^2 - 4j}}$; donc i et h étant des invariants des ordres 1 et 0, on a, en faisant les (x) identiques aux (z),

$$a'_{12} - a'_{21} = -\frac{i}{h(z)\sqrt{i^2 - 4j}},$$

$$a'_{12} + a'_{21} = \frac{1}{h(z)},$$

formules qui déterminent a'_{12} et a'_{21} sans ambiguïté.

77. Sur la forme canonique, (x') et (y') désignant deux éléments correspondants, le rapport anharmonique de ces deux éléments associés aux éléments doubles, soit $(x'y'O'_1 O'_2)$, est égal à $\frac{x'_2 y'_1}{x'_1 y'_2}$, c'est-à-dire à $-\frac{a'_{12}}{a'_{21}}$. On a donc en général

$$(xy O'_1 O'_2) = \frac{i - \sqrt{i^2 - 4j}}{i + \sqrt{i^2 - 4j}};$$

ce rapport anharmonique a une valeur constante k qui dépend de l'invariant absolu géométrique $\frac{i^2}{j}$.

Dans le cas de l'involution, et seulement dans ce cas, on a $i = 0$, et par suite $k = -1$. L'involution est donc caractérisée par ce fait que les éléments doubles sont conjugués harmoniques par rapport à deux éléments correspondants quelconques.

Pour définir une involution, il est nécessaire et suffisant de connaître deux couples d'éléments correspondants, en particulier les deux éléments doubles.

Soient trois couples de deux éléments (x) et $(\bar{x})$, (y) et $(\bar{y})$, (z) et $(\bar{z})$; à quelle condition appartiennent-ils à une involution?

En considérant (x), (y), (z) et $(\bar{z})$ comme appartenant à la série X, leurs correspondants dans Y sont $(\bar{x})$, $(\bar{y})$, $(\bar{z})$ et (z); on doit donc avoir

$$(xyz\bar{z}) = (\bar{x}\bar{y}\bar{z}z).$$

La réciproque est d'ailleurs vraie, car les formules développées plus haut montrent qu'en dehors des éléments doubles il n'y a, dans une homographie, aucun élément ayant même correspondant dans les deux séries, s'il n'y a pas involution.

Comme application, on voit, par exemple, que si (x) et $(\bar{x})$, (y) et $(\bar{y})$ sont deux couples d'éléments correspondants dans une homographie dont O'_1 et O'_2 sont les éléments doubles, (x) et (y) appartenant à une même série, les trois couples (x) et $(\bar{y})$, $(\bar{x})$ et (y), O'_1 et O'_2 appartiennent à une même involution, car on a

$$(x\bar{x}O'_1O'_2) = (y\bar{y}O'_1O'_2) = (\bar{y}yO'_2O'_1).$$

De même, si A est un élément double d'une involution définie par (x) et $(\bar{x})$, (y) et $(\bar{y})$, on a

$$(\mathrm{A}xy\bar{y}) = \frac{1}{(\mathrm{A}\bar{x}y\bar{y})}.$$

78. Soit (y) un élément de la série Y, et (z) son correspondant; considérons (z) comme appartenant à Y, et soit (t) son correspondant, et ainsi de suite.

Sur la forme canonique, on obtient tout de suite

$$\frac{z'_1}{z'_2} = -\frac{a'_{21}}{a'_{12}}\frac{y'_1}{y'_2}, \qquad \frac{t'_1}{t'_2} = \left(-\frac{a'_{21}}{a'_{12}}\right)^2\frac{y'_1}{y'_2}, \qquad \ldots,$$

de sorte que les équations de (z'), (t'), ... sont successivement, en désignant par (x') les coordonnées courantes,

$$a'_{12}x'_1y'_2 + a'_{21}x'_2y'_1 = 0, \qquad a'^2_{12}x'_1y'_2 - a'^2_{21}x'_2y'_1 = 0, \qquad \ldots$$

Introduisant les invariants, on a d'une façon générale, pour les équations de (z), (t), ... successivement,

$$f = 0, \qquad if - j(xy) = 0, \qquad (i^2 - j)f - ij(xy) = 0,$$

$$(i^3 - 2ij)f - j(i^2 - j)(xy) = 0,$$

$$(i^4 - 3i^2j + j^2)f - j(i^3 - 2ij)(xy) = 0, \qquad \ldots$$

la loi de formation étant évidente.

Quand l'un des coefficients de f dans ces formes est nul, cela veut dire que la série des éléments (y), (z), (t), ... devient périodique et se compose de 2, 3, 4, 5, ... éléments seulement; ainsi, pour $i=0$, la série se compose de deux éléments : il y a involution.

D'après ce qu'on a dit précédemment, la série (y), (z), (t), ... se composera encore de n éléments distincts si $\frac{i-\sqrt{i^2-4j}}{i+\sqrt{i^2-4j}}$ est égal à une racine primitive de l'équation $x^n=1$.



CHAPITRE VI.

LES SYSTÈMES QUADRATIQUES.

79. Nous appelons *systèmes quadratiques* ceux qui résultent de la considération de formes quadratiques et de variables, celles-ci pouvant d'ailleurs tenir la place de formes linéaires données.

Soit d'abord une seule forme quadratique dont nous mettons les racines en évidence

$$f = a_{x^2} = a_0 x_1^2 + 2 a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2 = (xa^{(1)})(xa^{(2)}).$$

Cette forme qui ne dépend que de trois coefficients a cependant un invariant d'ordre 2, son hessien; nous poserons, en le divisant par 2,

$$D = a_0 a_2 - a_1^2 = -\frac{1}{4}(a^{(1)} a^{(2)})^2.$$

Si $D = 0$, f est carré parfait et peut se réduire à $a'_{11} x'^2_1$.

Si $D \neq 0$, les racines de f sont distinctes; on peut réduire f à l'une des formes simples

$$2 a'_1 x'_1 x'_2 \quad \text{ou} \quad a'_0 x'^2_1 + a'_2 x'^2_2,$$

en prenant pour O'_1 et O'_2 les racines de f_1 ou bien deux éléments conjugués harmoniques par rapport à ces racines : cette dernière réduction peut, par suite, se faire d'une infinité de façons, indépendamment de la valeur des coefficients.

Si l'on considère le système formé par f et des variables (x), (y), (z), (t), ... un système complet d'invariants est constitué par les quantités D, a_{x^2}, a_{y^2}, ... a_{xy}, a_{xz}, ... (xy), (xz), ..., liées entre elles par de nouvelles relations telles que

$$a_{xz} a_{yt} - a_{xt} a_{yz} = D(xy)(zt).$$

En particulier, on a l'identité

$$a_{x^2}a_{y^2} = a_{xy}^2 + D(xy)^2$$
$$= [a_{xy} + (xy)\sqrt{-D}][a_{xy} - (xy)\sqrt{-D}],$$

qui fournit le moyen le plus général de décomposer f en une somme de deux carrés, et de résoudre l'équation $f = 0$ en ne faisant intervenir que des invariants.

La polaire a_{xy} est égale à $\frac{1}{2}[(xa^{(1)})(ya^{(2)}) + (xa^{(2)})(ya^{(1)})]$; si donc $a_{xy} = 0$, (x) et (y) sont conjugués harmoniques par rapport à $(a^{(1)})$ et $(a^{(2)})$, ainsi que cela résulte d'ailleurs des formules générales relatives aux polaires. En d'autres termes, la forme bilinéaire a_{xy} définit une involution dont $(a^{(1)})$ et $(a^{(2)})$ sont les éléments doubles; réciproquement, toute involution peut être envisagée de cette façon.

80. Considérons deux formes quadratiques

$$f = a_{x^2} = a_0x_1^2 + 2a_1x_1x_2 + a_2x_2^2 = (xa^{(1)})(xa^{(2)}),$$
$$g = b_{x^2} = b_0x_1^2 + 2b_1x_1x_2 + b_2x_2^2 = (xb^{(1)})(xb^{(2)}).$$

Leurs invariants proprement dits, tous d'ordre 2, distincts et formant un système complet, sont

$$D = \frac{1}{2}J^2(f,f) = a_0a_2 - a_1^2, \qquad D' = \frac{1}{2}J^2(g,g) = b_0b_2 - b_1^2,$$
$$H = J^2(f,g) = a_0b_2 - 2a_1b_1 + a_2b_0;$$

d'ailleurs

$$H = \frac{1}{2}[(a^{(1)}b^{(1)})(a^{(2)}b^{(2)}) + (a^{(1)}b^{(2)})(a^{(2)}b^{(1)})],$$

de sorte que si $H = 0$, les racines de f sont conjuguées harmoniques par rapport à celles de g.

L'invariant absolu géométrique $\frac{DD'}{H^2}$ s'interprète facilement de la façon suivante. Si k représente l'un des rapports anharmoniques, $(a^{(1)}a^{(2)}b^{(1)}b^{(2)})$ ou $(a^{(1)}a^{(2)}b^{(2)}b^{(1)})$, des quatre racines de f et g associées deux par deux, on trouve sans peine la relation

$$\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2 = \frac{4DD'}{H^2}.$$

On a $H = 0$ et $k = -1$ en même temps, comme nous l'avons déjà vu.

Si $k = 0$ ou $k = \infty$, on a $4DD' - H^2 = 0$; mais les deux formes ont alors une racine commune, de sorte que leur résultant peut s'écrire

$$R = 4DD' - H^2.$$

81. Envisageons le système formé par f, g et les (x); on aura les invariants nouveaux f, g et le jacobien de f et g d'ordre 1, soit

$$J = J(f, g) = (a_0 b_1 - a_1 b_0) x_1^2 + (a_0 b_2 - a_2 b_0) x_1 x_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) x_2^2,$$

qui avec ceux déjà indiqués forment un système complet.

Ces six invariants sont liés par la relation du n° 48

$$2J^2 = \begin{vmatrix} 2D & H & f \\ H & 2D' & g \\ f & g & 0 \end{vmatrix},$$

ou

$$-J^2 = D'f^2 - Hfg + Dg^2.$$

En fonction des racines, on a

$$J = \frac{1}{4} \Sigma (a^{(1)} b^{(1)})(x a^{(2)})(x b^{(2)}).$$

J est une forme quadratique; son invariant est $\frac{R}{4}$ comme le montre un calcul facile, et comme on devait le prévoir. On a donc aussi

$$R = 4(a_0 b_1 - a_1 b_0)(a_1 b_2 - a_2 b_1) - (a_0 b_2 - a_2 b_0)^2.$$

Les invariants H relatifs à J et f, ou J et g, sont évidemment nuls.

De plus, on a

$$2J(J, f) = -Hf + 2Dg.$$
$$2J(J, g) = Hg - 2D'f.$$

82. J est nul identiquement si f et g sont identiques à un facteur près.

Si f et g ont une racine commune et une seule, de sorte que $R = 0$, J est un carré parfait, dont la racine carrée est le facteur linéaire commun à f et à g; on obtient aussi ce facteur en prenant la polaire J_{xy}, et cela, quels que soient les (y).

Dans le cas général, comme $J^2(J, f) = 0$, et $J^2(J, g) = 0$, on

voit que $J = 0$ représente les éléments doubles de l'involution définie par les deux couples $f = 0$, $g = 0$.

Un couple quelconque de cette involution est représenté par une équation telle que $\lambda_1 f + \lambda_2 g = 0$, et réciproquement. En effet, si les éléments définis par trois formes quadratiques f, g, h sont les couples d'une même involution dont les éléments doubles sont définis par $k = 0$, on a

$$J^2(f, k) = 0, \qquad J^2(g, k) = 0, \qquad J^2(h, k) = 0,$$

et l'on en déduit immédiatement que le déterminant des coefficients de f, g, h est nul, c'est-à-dire que ces formes sont liées par une relation linéaire.

Le *faisceau* de formes $\lambda_1 f + \lambda_2 g$ correspond donc à une involution ; l'étude directe de ce faisceau permet de retrouver quelques-uns des résultats précédents. En effet, l'invariant de $\lambda_1 f + \lambda_2 g$ est $\lambda_1^2 D + \lambda_1 \lambda_2 H + \lambda_2^2 D'$, et l'on en conclut l'invariant H ; si le déterminant ainsi formé est nul, $\lambda_1 f + \lambda_2 g$ est un carré parfait et représente l'un des éléments doubles de l'involution ; éliminant les (λ) entre les relations

$$\lambda_1 f + \lambda_2 g = 0,$$
$$\lambda_1^2 D + \lambda_1 \lambda_2 H + \lambda_2^2 D' = 0,$$

le résultant

$$D' f^2 - H f g + D g^2$$

ne doit donc différer de J^2 que par un facteur numérique, et en effet c'est $-J^2$.

83. Si J n'est pas nul identiquement, et si $R = 0$, f et g ayant une racine commune et une seule peuvent être ramenées à la forme canonique simultanée

$$f' = a'_0 x'^2_1 + 2 a'_1 x'_1 x'_2,$$
$$g' = b'_0 x'^2_1 + 2 b'_1 x'_1 x'_2,$$

que l'on peut encore simplifier, suivant les circonstances.

Dans le cas général où l'on a $R \neq 0$, prenons pour éléments fondamentaux nouveaux, O'_1 et O'_2, les deux éléments distincts définis par $J = 0$; alors f et g deviendront

$$f' = a'_0 x'^2_1 + a'_2 x'^2_2,$$
$$g' = b'_0 x'^2_1 + b'_2 x'^2_2,$$

et l'on aura pour les invariants D, D', H, R, J les valeurs

$$a'_0 a'_2,\quad b'_0 b'_2,\quad a'_0 b'_2 + a'_2 b'_0,\quad -(a'_0 b'_2 - a'_2 b'_0)^2,\quad (a'_0 b'_2 - a'_2 b'_0) x'_1 x'_2.$$

Voici comment on peut exécuter la réduction de f et g à ces formes canoniques. On a

$$J_{x^2} J_{y^2} = \left[J_{xy} + (xy)\sqrt{-\frac{R}{4}}\right]\left[J_{xy} - (xy)\sqrt{-\frac{R}{4}}\right],$$

les (y) étant des indéterminées. Posons

$$x'_1 = J_{xy} + (xy)\sqrt{-\frac{R}{4}},$$
$$x'_2 = J_{xy} - (xy)\sqrt{-\frac{R}{4}};$$

le déterminant de la substitution ainsi définie pour passer des (x) aux (x') est $\frac{1}{J_{y^2}\sqrt{-R}}$; écrivant alors que D, D', H, f, g, J sont des invariants, on a

$$a'_0 a'_2 = -\frac{D}{RJ^2_{y^2}},\qquad b'_0 b'_2 = -\frac{D'}{RJ^2_{y^2}},\qquad a'_0 b'_2 + a'_2 b'_0 = -\frac{H}{RJ^2_{y^2}},$$
$$a'_0 + a'_2 = \frac{a_{y^2}}{J^2_{y^2}},\qquad b'_0 + b'_2 = \frac{b_{y^2}}{J^2_{y^2}},\qquad a'_0 b'_2 - a'_2 b'_0 = \frac{1}{J^2_{y^2}\sqrt{-R}},$$

les deux premières relations de la dernière ligne résultant de ce que l'on a fait les (x) égaux aux (y).

On a par suite, sans ambiguïté,

$$a'_0 = \frac{1}{2J^2_{y^2}\sqrt{-R}}\left(H a_{y^2} - 2D b_{y^2} + a_{y^2}\sqrt{-R}\right),$$
$$a'_2 = \frac{1}{2J^2_{y^2}\sqrt{-R}}\left(-H a_{y^2} + 2D b_{y^2} + a_{y^2}\sqrt{-R}\right),$$
$$b'_0 = \frac{1}{2J^2_{y^2}\sqrt{-R}}\left(-H b_{y^2} + 2D' a_{y^2} + b_{y^2}\sqrt{-R}\right),$$
$$b'_2 = \frac{1}{2J^2_{y^2}\sqrt{-R}}\left(H b_{y^2} - 2D' a_{y^2} + b_{y^2}\sqrt{-R}\right),$$

et l'on peut écrire d'une façon générale, en profitant d'identités

déjà données, et faisant $h = \lambda_1 f + \lambda_2 g = c_{x^2}$:

$$h = \frac{1}{J_{y^2}^2\sqrt{-R}} \left\{ \left[J(c_{y^2}, J_{y^2}) + c_{y^2}\sqrt{-\frac{R}{4}} \right] x_1'^2 + \left[-J(c_{y^2}, J_{y^2}) + c_{y^2}\sqrt{-\frac{R}{4}} \right] x_2'^2 \right\},$$

où l'on a $\sqrt{-R} = 2\sqrt{-\frac{R}{4}}$, et où $J(c_{y^2}, J_{y^2})$ désigne le jacobien des formes h et J, où l'on a remplacé les (x) par les (y).

84. Considérons trois formes quadratiques $f = a_{x^2}$, $g = b_{x^2}$, $h = c_{x^2}$; les invariants proprement dits de f, g, h formant un système complet sont les invariants déjà connus, et en outre

$$K = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix};$$

$K = 0$ exprime que les racines de f, g, h sont trois couples en involution. On a d'ailleurs la relation du n° 48 :

$$2K^2 = \begin{vmatrix} J^2(f,f) & J^2(f,g) & J^2(f,h) \\ J^2(f,g) & J^2(g,g) & J^2(g,h) \\ J^2(f,h) & J^2(g,h) & J^2(h,h) \end{vmatrix}.$$

Pour le système formé par f, g, h et les variables (x), le système complet des invariants comprendra ceux qui précèdent, les formes elles-mêmes, et leurs trois jacobiens $J(g,h)$, $J(h,f)$, $J(f,g)$. Outre les relations déjà connues, on a (48) :

$$0 = \begin{vmatrix} J^2(f,f) & J^2(f,g) & J^2(f,h) & f \\ J^2(f,g) & J^2(g,g) & J^2(g,h) & g \\ J^2(f,h) & J^2(g,h) & J^2(h,h) & h \\ f & g & h & 0 \end{vmatrix}.$$

Si l'on se donne quatre formes quadratiques, ou davantage, on ne trouvera que des invariants des types que nous venons d'indiquer; les relations qui les lieront seront les précédentes, et de nouvelles telles que

$$0 = \begin{vmatrix} J^2(f,f) & J^2(f,g) & J^2(f,h) & J^2(f,k) \\ J^2(f,g) & J^2(g,g) & J^2(g,h) & J^2(g,k) \\ J^2(f,h) & J^2(g,h) & J^2(h,h) & J^2(h,k) \\ J^2(f,k) & J^2(g,k) & J^2(h,k) & J^2(k,k) \end{vmatrix}.$$



CHAPITRE VII.

LES FORMES CANONIQUES EN GÉNÉRAL. LA FORME CUBIQUE, LA FORME BIQUADRATIQUE ET LA FORME QUINTIQUE.

I. — Les formes canoniques en général.

85. Nous allons indiquer brièvement quelques principes généraux relatifs à la réduction des formes telles que $f = a_{x^p}$ à la forme canonique.

Supposons d'abord p impair, et soit $p = 2n - 1$; on peut, en général, écrire f sous la forme d'une somme de n puissances $p^{\text{ièmes}}$

$$f = \Sigma(\alpha^{(i)} \mid x)^p,$$

car les inconnues sont en nombre $2n$, égal à celui des coefficients de f et il n'y a pas incompatibilité en général. Considérons l'invariant

$$K = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^{p-1} f}{\partial x_1^{p-1}} & \dfrac{\partial^{p-1} f}{\partial x_1^{p-2}\, \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^{p-1} f}{\partial x_1^{\frac{p-1}{2}}\, \partial x_2^{\frac{p-1}{2}}} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial^{p-1} f}{\partial x_1^{\frac{p-1}{2}}\, \partial x_2^{\frac{p-1}{2}}} & \cdots\cdots\cdots & \cdots & \dfrac{\partial^{p-1} f}{\partial x_2^{p-1}} \end{vmatrix},$$

indiqué au n° 51.

On a ici

$$\frac{\partial^{p-1} f}{\partial x_1^{q_1}\, \partial x_2^{q_2}} = \mathrm{P}_p\, \Sigma(\alpha_1^{(i)})^{q_1} (\alpha_2^{(i)})^{q_2} (\alpha^{(i)} \mid x),$$

et, par suite,

$$K = (\mathrm{P}_p)^n\, \Pi(\alpha^{(i)} \mid x)\, \Pi(\alpha^{(i)} \mid \alpha^{(j)})^2,$$

comme le montre un calcul facile.

Les formes $(\alpha^{(i)} \mid x)$ sont donc identiques, à des facteurs numériques près, aux facteurs linéaires de l'invariant K, de degré n.

Connaissant les $(\alpha^{(i)} \mid x)$ à des facteurs près, le problème s'achève sans difficulté, et l'on voit que si K n'a pas de racines multiples, la réduction à la forme canonique est possible, et d'une seule façon; dans le cas contraire, cette réduction n'est pas possible.

Rappelons que, à un facteur près, l'équation *canonisante* $K = 0$ peut s'écrire sous la forme

$$\begin{vmatrix} a_{p,0} & a_{p-1,1} & \cdots & a_{\frac{p-1}{2},\frac{p+1}{2}} \\ a_{p-1,1} & a_{p-2,2} & \cdots & a_{\frac{p-3}{2},\frac{p+3}{2}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\frac{p+1}{2},\frac{p-1}{2}} & a_{\frac{p-1}{2},\frac{p+1}{2}} & \cdots & a_{0,p} \\ x_2^n & -x_1 x_2^{n-1} & \cdots & (-1)^n x_2^n \end{vmatrix} = 0.$$

86. Supposons maintenant que p soit pair, égal à $2n$. Avant d'indiquer la forme canonique à laquelle on peut réduire f, nous allons démontrer une proposition auxiliaire.

Soit $g = b_{x^n}$ une forme quelconque de degré n, supérieur à l'unité; g admet un invariant $h = c_{x^n}$ de même degré et tel que l'on ait l'identité

$$J^n(g, gh) = g.$$

En effet, pour déterminer une forme h vérifiant cette relation, on a précisément autant d'équations linéaires que d'inconnues; la fonction h est donc unique et, d'après sa propriété, est évidemment un invariant. Si, par exemple, $n = 2$, on trouvera

$$h = \frac{3g}{4D},$$

où D est l'invariant de g.

Ceci posé, on peut en général écrire f sous la forme

$$f = \Sigma(\alpha^{(i)} \mid x)^p + \lambda g h,$$

le nombre des formes linéaires $(\alpha^{(i)} \mid x)$ étant égal à $\frac{p}{2}$ ou n, g désignant le produit $\Pi(\alpha^{(i)} \mid x)$, h étant l'invariant de g que nous venons de définir, et λ une quantité à déterminer.

Le nombre des inconnues est en effet $p+1$, comme celui des équations de condition, et en général il n'y a pas incompatibilité.

Considérons l'invariant $J^n(g, f)$; un calcul direct donne, en faisant $g = b_{x^n}$,

$$\begin{aligned} J^n(g, f) = {} & b_{n,0}(a_{n,n}x_1^n + n a_{n-1,n+1} x_1^{n-1} x_2 + \ldots) \\ & - n b_{n-1,1}(a_{n+1,n-1} x_1^n + n a_{n,n} x_1^{n-1} x_2 + \ldots) \\ & + \frac{n(n-1)}{1.2} b_{n-2,2}(a_{n+2,n-2} x_1^n + n a_{n+1,n-1} x_1^{n-1} x_2 + \ldots) \\ & - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{aligned}$$

d'autre part,

$$J^n(g, f) = \Sigma J^n[g. (\alpha^{(i)} \mid x)^p] + \lambda J^n(g, gh);$$

or, $J^n[g. (\alpha^{(i)} \mid x)^p] = 0$, d'après la définition de g, et $J^n(g, gh) = g$; donc $J^n(g. f) = \lambda g$; d'où les équations de condition

$$\begin{aligned} & b_{n,0} a_{n,n} - n b_{n-1,1} a_{n+1,n-1} + \ldots = \lambda b_{n,0}, \\ & b_{n,0} a_{n-1,n+1} - n b_{n-1,1} a_{n,n} + \ldots = \lambda b_{n-1,1} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

et par élimination des (b)

$$0 = \begin{vmatrix} a_{p,0} & a_{p-1,1} & \ldots & a_{n+1,n-1} & a_{n,n} - \lambda \\ a_{p-1,1} & a_{p-2,2} & \ldots & a_{n,n} + \dfrac{\lambda}{n} & a_{n-1,n+1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{n+1,n-1} & a_{n,n} + (-1)^n \dfrac{\lambda}{n} & \ldots & \ldots\ldots\ldots & a_{1,p-1} \\ a_{n,n} - (-1)^n \lambda & a_{n-1,n+1} & \ldots & \ldots\ldots\ldots & a_{0,p} \end{vmatrix}$$

Connaissant une racine λ de cette équation de degré $n + 1$, les équations de condition déterminent les (b), et par suite g, à un facteur près. On connaît donc, à des facteurs près, les formes linéaires $(\alpha^{(i)} \mid x)$, et le problème s'achève sans difficulté.

La réduction de f à la forme canonique est donc possible en général de $n + 1$ façons différentes.

Remarquons que les coefficients de l'équation en λ que nous venons d'obtenir sont évidemment, comme les racines de cette équation, des invariants de f. Le coefficient de λ^n est d'ailleurs nul. Le terme constant, égalé à zéro, exprime la condition pour que f puisse se mettre sous la forme d'une somme de n puis-

sances $p^{\text{ièmes}}$: c'est

$$\begin{vmatrix} a_{p,0} & a_{p-1,1} & \cdots & a_{n+1,n-1} & a_{n,n} \\ a_{p-1,1} & a_{p-2,2} & \cdots & a_{n,n} & a_{n-1,n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,n} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{0,p} \end{vmatrix} = 0.$$

II. — La forme cubique.

87. Étudions le système formé par les (x) et une forme cubique

$$f = a_{x^3} = a_0 x_1^3 + 3 a_1 x_1^2 x_2 + 3 a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^3 = (xa^{(1)})(xa^{(2)})(xa^{(3)})$$

Le premier invariant après f est le hessien $J^2(f, f)$ de f; en le divisant par 2, nous l'écrirons

$$H = (a_0 a_2 - a_1^2) x_1^2 + (a_0 a_3 - a_1 a_2) x_1 x_2 + (a_1 a_3 - a_2^2) x_2^2 ;$$

$H = 0$ définit les éléments doubles de l'involution déterminée par la première polaire de f, $a_{x^2 y}$; chacun de ces éléments admet l'autre compté deux fois ou une fois, comme premier ou second système polaire par rapport à f.

On a aussi

$$H = -\frac{1}{18} \Sigma (xa^{(1)})^2 (a^{(2)} a^{(3)})^2 ;$$

à cause de l'identité $\Sigma(xa^{(1)})(a^{(2)} a^{(3)}) = 0$, la condition $H = 0$ peut s'écrire encore

$$(xa^{(2)})^2 (a^{(1)} a^{(3)})^2 - (xa^{(2)})(xa^{(3)})(a^{(1)} a^{(2)})(a^{(1)} a^{(3)}) + (xa^{(3)})^2 (a^{(1)} a^{(2)})^2 = 0,$$

d'où $(xa^{(1)} a^{(2)} a^{(3)}) = -\omega$, ω désignant une racine cubique imaginaire de l'unité; $H = 0$ définit donc les deux éléments qui forment avec $(a^{(1)})$, $(a^{(2)})$, $(a^{(3)})$ une proportion équianharmonique.

Un autre invariant est le hessien de H; nous poserons

$$\begin{aligned} D = 2 J^2(H, H) &= 4 (a_0 a_2 - a_1^2)(a_1 a_3 - a_2^2) - (a_0 a_3 - a_1 a_2)^2 \\ &= - a_0^2 a_3^2 + 6 a_0 a_1 a_2 a_3 - 4 a_0 a_2^3 - 4 a_3 a_1^3 + 3 a_1^2 a_2^2 ; \end{aligned}$$

c'est le seul invariant proprement dit de f; il ne diffère donc du discriminant de f, qui est du même degré par rapport aux (a), que

par un facteur numérique : en fait, on trouve

$$D = \frac{1}{27}(a^{(2)}a^{(3)})^2(a^{(3)}a^{(1)})^2(a^{(1)}a^{(2)})^2.$$

Enfin le système complet des invariants de f et des (x) comprend encore la forme cubique

$$\begin{aligned} J = 2J(f, H) = {} & (a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3)x_1^3 \\ & + 3(a_0 a_1 a_3 + a_1^2 a_2 - 2a_0 a_2^2)x_1^2 x_2 \\ & + 3(-a_0 a_2 a_3 - a_1 a_2^2 + 2a_1^2 a_3)x_1 x_2^2 \\ & - (-a_0 a_3^2 + 3a_1 a_2 a_3 - 2a_2^3)x_2^3. \end{aligned}$$

Les invariants H, D, J sont respectivement des ordres 2, 6 et 3 ; ils sont liés à f par une relation qui résulte du n° 48, si l'on remarque que l'on a $J^2(f, H) = 0$, de sorte que

$$\frac{J^2}{2} = \begin{vmatrix} 2H & 0 & f \\ 0 & \frac{D}{2} & H \\ f & H & 0 \end{vmatrix}$$

ou bien

$$J^2 + 4H^3 + Df^2 = 0;$$

telle est la relation fondamentale qui lie entre eux les invariants de la forme cubique.

Signalons encore les relations

$$J^2(J, J) = 2DH, \qquad J(f, J) = -2H^2, \qquad J^2(f, J) = 0,$$

$$J^3(f, J) = 2D, \qquad J(H, J) = \frac{Df}{2}, \qquad J^2(H, J) = 0.$$

En fonction des racines, on a aussi

$$J = -\frac{1}{27}\Pi[(xa^{(2)})(a^{(1)}a^{(3)}) + (xa^{(3)})(a^{(1)}a^{(2)})],$$

ce qui montre que J représente les trois éléments conjugués harmoniques de chacune des racines de f par rapport aux deux autres : ces éléments sont aussi conjugués harmoniques des racines de f par rapport à celles du hessien.

Toutes ces relations sont faciles à démontrer en se servant de la forme canonique indiquée plus loin.

88. Les résultats qui précèdent peuvent être retrouvés de la façon suivante :

Cherchons les valeurs des rapports anharmoniques déterminés par les éléments (x), $(a^{(1)})$, $(a^{(2)})$ et $(a^{(3)})$. Soit

$$\rho_1 = (xa^{(2)})(a^{(1)}a^{(3)}), \qquad \rho_2 = (xa^{(3)})(a^{(1)}a^{(2)}),$$

de sorte que l'un des rapports cherchés est $\frac{\rho_1}{\rho_2}$.

En se servant de l'identité

$$(xa^{(1)})(a^{(2)}a^{(3)}) + (xa^{(2)})(a^{(3)}a^{(1)}) + (xa^{(3)})(a^{(1)}a^{(2)}) = 0,$$

on a

$$\begin{aligned}
\rho_1 - \rho_2 &= (xa^{(1)})(a^{(2)}a^{(3)}),\\
\rho_1 + \rho_2 &= (xa^{(2)})(a^{(1)}a^{(3)}) + (xa^{(3)})(a^{(1)}a^{(2)}),\\
\rho_1 - 2\rho_2 &= (xa^{(3)})(a^{(2)}a^{(1)}) + (xa^{(1)})(a^{(2)}a^{(3)}),\\
\rho_2 - 2\rho_1 &= (xa^{(1)})(a^{(3)}a^{(2)}) + (xa^{(2)})(a^{(3)}a^{(1)}),\\
\rho_1^2 - \rho_1\rho_2 + \rho_2^2 &= \frac{1}{2}\,\Sigma(xa^{(1)})^2(a^{(2)}a^{(3)})^2;
\end{aligned}$$

donc, par un simple calcul de fonctions symétriques que l'on peut abréger en se servant des propriétés des invariants, il vient

$$\begin{aligned}
\rho_1^2\rho_2^2(\rho_1 - \rho_2)^2 &= f^2\,\Pi(a^{(2)}a^{(3)})^2 = 27\,\mathrm{D}f^2,\\
(\rho_1 + \rho_2)(\rho_1 - 2\rho_2)(\rho_2 - 2\rho_1) &= -27\,\mathrm{J},\\
\rho_1^2 - \rho_1\rho_2 + \rho_2^2 &= -9\,\mathrm{H},
\end{aligned}$$

et, par suite, la double équation

$$\frac{(\rho_1 + \rho_2)^2(\rho_1 - 2\rho_2)^2(\rho_2 - 2\rho_1)^2}{\mathrm{J}^2} = \frac{4(\rho_1^2 - \rho_1\rho_2 + \rho_2^2)^3}{-4\mathrm{H}^3} = \frac{27\rho_1^2\rho_2^2(\rho_1 - \rho_2)^2}{\mathrm{D}f^2};$$

l'identité du n° 59 donne alors la relation

$$\mathrm{J}^2 + 4\mathrm{H}^3 + f^2\mathrm{D} = 0.$$

L'équation du sixième degré que nous venons de former dépend de l'invariant absolu $\frac{\mathrm{J}^2}{\mathrm{H}^3}$ comme unique paramètre; elle met en évidence la signification des conditions $\mathrm{H} = 0$ et $\mathrm{J} = 0$.

On remarquera que les formes cubiques

$$\rho_1\rho_2(\rho_1 - \rho_2)$$

et

$$(\rho_1 + \rho_2)(\rho_1 - 2\rho_2)(\rho_2 - 2\rho_1)$$

admettent, à des facteurs numériques près, le même hessien

$$\rho_1^2 - \rho_1\rho_2 + \rho_2^2,$$

et que chacune d'elles peut être regardée comme l'invariant cubique de l'autre.

89. La forme f a une racine triple quand H est nul identiquement; il en est de même alors de D et J, et l'on peut ramener f à la forme canonique

$$f' = a'_0 x'^3_1.$$

Si H n'est pas nul identiquement, mais si D est nul, f a une racine double, non triple; la forme canonique de f est alors

$$f' = 3 a'_1 x'^2_1 x'_2,$$

en choisissant convenablement les nouveaux éléments de référence, et les valeurs des invariants H et J sont ici

$$-a'^2_1 x'^2_1, \quad 2 a'^3_1 x'^3_1;$$

il est facile, par suite, d'obtenir dans ce cas les racines de f.

Dans le cas général, D n'est pas nul, et f a trois racines simples; les racines de H sont simples aussi, et on peut les faire correspondre aux nouveaux éléments fondamentaux; ceci exige, en appelant comme toujours f' la transformée de f,

$$a'_0 a'_2 - a'^2_1 = 0, \qquad a'_1 a'_3 - a'^2_2 = 0;$$

considérant ces relations comme des équations linéaires en a'_1 et a'_2, leur déterminant $a'_1 a'_2 - a'_0 a'_3$ n'est pas nul, puisque H n'est pas nul identiquement; on doit donc supposer

$$a'_1 = a'_2 = 0,$$

et l'on a la forme canonique

$$f' = a'_0 x'^3_1 + a'_3 x'^3_2,$$

ainsi que cela résulte d'ailleurs des considérations générales du n° 85, puisque l'invariant K de ce numéro n'est autre que H, pour $p = 3$.

En même temps, les invariants H, D, J prennent les valeurs

$$a'_0 a'_3 x'_1 x'_2, \quad -a'^2_0 a'^2_3, \quad a'_0 a'_3 (a'_0 x'^3_1 - a'_3 x'^3_2),$$

ce qui rend intuitif tout ce qui a été dit précédemment.

Voici comment on peut opérer cette réduction à la forme cano-

nique, et en même temps, dans tous les cas, décomposer f en facteurs linéaires. En introduisant les variables (y), on a

$$H_{x^2}H_{y^2} = \left[H_{xy} + (xy)\sqrt{-\frac{D}{4}}\right]\left[H_{xy} - (xy)\sqrt{-\frac{D}{4}}\right];$$

soit donc

$$x'_1 = H_{xy} + (xy)\sqrt{-\frac{D}{4}},$$
$$x'_2 = H_{xy} - (xy)\sqrt{-\frac{D}{4}};$$

le déterminant de la substitution ainsi définie pour passer des (x) aux (x') est $\frac{1}{H_{y^2}\sqrt{-D}}$; écrivons alors que f, H et J sont des invariants, et remplaçons les (x) par les (y); on a

$$a'_0 + a'_3 = \frac{a_{y^3}}{H^3_{y^2}},$$
$$a'_0\, a'_3 = -\frac{1}{DH^3_{y^2}},$$
$$a'_0\, a'_3(a'_0 - a'_3) = -\frac{J_{y^3}}{DH^6_{y^2}\sqrt{-D}},$$

et, par suite, sans ambiguïté

$$a'_0 = \frac{1}{2H^3_{y^2}\sqrt{-D}}\left(J_{y^3} + a_{y^3}\sqrt{-D}\right),$$
$$a'_3 = \frac{1}{2H^3_{y^2}\sqrt{-D}}\left(-J_{y^3} + a_{y^3}\sqrt{-D}\right).$$

90. Décomposons maintenant f en facteurs linéaires; on a

$$f = \frac{1}{2H^3_{y^2}\sqrt{-D}}\,\Pi\left(x'_1\sqrt[3]{J_{y^3} + a_{y^3}\sqrt{-D}} - \varepsilon x'_2\sqrt[3]{J_{y^3} - a_{y^3}\sqrt{-D}}\right),$$

les deux radicaux cubiques ayant des déterminations arbitrairement choisies, et ε désignant successivement chacune des trois racines cubiques de l'unité.

Remplaçant les (x') par leurs valeurs, il vient

$$f = \frac{a_{y^3}}{H^3_{y^2}}\,\Pi\left(H_{xy} + (xy)\sqrt{-\frac{D}{4}}\,\frac{\sqrt[3]{J_{y^3} + a_{y^3}\sqrt{-D}} + \varepsilon\sqrt[3]{J_{y^3} - a_{y^3}\sqrt{-D}}}{\sqrt[3]{J_{y^3} + a_{y^3}\sqrt{-D}} - \varepsilon\sqrt[3]{J_{y^3} - a_{y^3}\sqrt{-D}}}\right);$$

l'identité

$$\frac{p+q\varepsilon}{p-q\varepsilon}=\frac{p^3+q^3+2pq(\varepsilon p+\varepsilon^2 q)}{p^3-q^3}$$

permet d'écrire le coefficient de (xy) sous la forme

$$\frac{\mathrm{J}_{y^3}}{2a_{y^3}}+\frac{1}{2a_{y^3}}\sqrt[3]{\mathrm{J}_{y^3}+a_{y^3}\sqrt{-\mathrm{D}}}\sqrt[3]{\mathrm{J}_{y^3}-a_{y^3}\sqrt{-\mathrm{D}}}\left(\varepsilon\sqrt[3]{\mathrm{J}_{y^3}+a_{y^3}\sqrt{-\mathrm{D}}}+\varepsilon^2\sqrt[3]{\mathrm{J}_{y^3}-a_{y^3}\sqrt{-\mathrm{D}}}\right.$$

à cause de la formule

$$\mathrm{J}^2+4\mathrm{H}^3+\mathrm{D}f^2=0,$$

on peut prendre les deux radicaux cubiques liés par la relation

$$\sqrt[3]{\mathrm{J}_{y^3}+a_{y^3}\sqrt{-\mathrm{D}}}\sqrt[3]{\mathrm{J}_{y^3}-a_{y^3}\sqrt{-\mathrm{D}}}=-\sqrt[3]{4}\,\mathrm{H}_{y^2};$$

on trouve aussi sans peine l'identité

$$2\mathrm{H}_{xy}a_{y^3}+\mathrm{J}_{y^3}(xy)=2a_{xy^2}\mathrm{H}_{y^2},$$

et, par suite, on peut écrire finalement

$$f=\frac{1}{a_{y^3}^{2}}\mathrm{H}\left[a_{xy^2}+(xy)\left(\varepsilon\sqrt[3]{\frac{-\mathrm{J}_{y^3}+a_{y^3}\sqrt{-\mathrm{D}}}{2}}+\varepsilon^2\sqrt[3]{\frac{-\mathrm{J}_{y^3}-a_{y^3}\sqrt{-\mathrm{D}}}{2}}\right)\right],$$

ε ayant été changé en ε^2, et les deux radicaux cubiques étant liés par la relation

$$\sqrt[3]{\frac{-\mathrm{J}_{y^3}+a_{y^3}\sqrt{-\mathrm{D}}}{2}}\sqrt[3]{\frac{-\mathrm{J}_{y^3}-a_{y^3}\sqrt{-\mathrm{D}}}{2}}=-\mathrm{H}_{y^2}.$$

Cette décomposition, où ne figurent que des invariants, est évidemment applicable à tous les cas possibles.

En faisant $y_1=1$, $y_2=0$, on retrouve les formules bien connues de la résolution de l'équation du troisième degré.

91. Envisageons les formes $g=\lambda_1\sqrt{\mathrm{D}}f+\lambda_2\mathrm{J}$ qui forment un faisceau du troisième degré; les invariants H, D, J calculés pour g se trouvent sans peine sur la forme canonique; on a

$$\mathrm{H}_g=\mathrm{DH}(\lambda_1^2+\lambda_2^2),\qquad \mathrm{D}_g=\mathrm{D}^3(\lambda_1^2+\lambda_2^2)^2,$$

$$\mathrm{J}_g=\mathrm{D}\sqrt{\mathrm{D}}(\lambda_1\mathrm{J}-\lambda_2\sqrt{\mathrm{D}}f)(\lambda_1^2+\lambda_2^2).$$

g est un cube parfait pour $\lambda_1^2+\lambda_2^2=0$, ainsi que cela résulte d'ailleurs de la relation entre f, H, D, J; à part ce cas, D_g n'est jamais nul, si D n'est pas nul.

En particulier, on a

$$H_J = DH, \qquad D_J = D^3, \qquad J_J = -fD^2,$$

et l'on voit que f et J sont en quelque sorte conjuguées.

On ramènerait g à la forme canonique, et l'on en trouverait facilement les racines, en profitant des résultats précédents.

III. — La forme biquadratique.

92. Considérons le système formé par les variables (x) et une forme biquadratique

$$\begin{aligned} f = a_{x^4} &= a_0 x_1^4 + 4 a_1 x_1^3 x_2 + 6 a_2 x_1^2 x_2^2 + 4 a_3 x_1 x_2^3 + a_4 x_2^4 \\ &= (xa^{(1)})(xa^{(2)})(xa^{(3)})(xa^{(4)}) \end{aligned}$$

Les invariants suivants constituent avec f un système complet :

1° Le hessien de f d'ordre 2 ; nous écrirons

$$\begin{aligned} H = \frac{1}{2} J^2(f, f) &= (a_0 a_2 - a_1^2) x_1^4 + 2(a_0 a_3 - a_1 a_2) x_1^3 x_2 \\ &+ (a_0 a_4 + 2 a_1 a_3 - 3 a_2^2) x_1^2 x_2^2 + 2(a_1 a_4 - a_2 a_3) x_1 x_2^3 + (a_2 a_4 - a_3^2) x_2^4; \end{aligned}$$

2° L'invariant proprement dit d'ordre 4,

$$i = \frac{1}{2} J^4(f, f) = a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2;$$

3° Le jacobien de f et de H, d'ordre 3 ; nous ferons

$$\begin{aligned} J = 2J(f, H) = &(a_0^2 a_3 - 3 a_0 a_1 a_2 + 2 a_1^3) x_1^6 \\ &+ (a_0^2 a_4 + 2 a_0 a_1 a_3 - 9 a_0 a_2^2 + 6 a_1^2 a_2) x_1^5 x_2 \\ &+ (5 a_0 a_1 a_4 - 15 a_0 a_2 a_3 + 10 a_1^2 a_3) x_1^4 x_2^2 \\ &+ (-10 a_0 a_3^2 + 10 a_1^2 a_4) x_1^3 x_2^3 + \ldots, \end{aligned}$$

où l'on achève par symétrie, en remarquant que J est un invariant gauche ;

4° L'invariant proprement dit d'ordre 6,

$$j = \frac{1}{3} J^4(f, H) = a_0 a_2 a_4 - a_2^3 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_4 a_1^2$$

$$= \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}.$$

Ces cinq invariants sont liés par une relation que nous indiquerons plus bas.

93. Avant d'aller plus loin, indiquons la forme canonique de f; ce sera, d'après le n° 86,

$$f = (\alpha^{(1)} | x)^4 + (\alpha^{(2)} | x)^4 - 3\lambda \frac{(\alpha^{(1)} | x)^2 (\alpha^{(2)} | x)^2}{(\alpha^{(1)} \alpha^{(2)})^2},$$

λ étant déterminé par l'équation

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 - \lambda \\ a_1 & a_2 + \frac{\lambda}{2} & a_3 \\ a_2 - \lambda & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien

$$\lambda^3 - i\lambda - 2j = 0,$$

de sorte que l'on retrouve ainsi les invariants i et j.

Les racines λ', λ'', λ''' de cette équation sont des invariants d'ordre 2.

Nous pourrons prendre par suite, pour forme canonique générale de f,

$$f' = a'_0 x'^4_1 + 6 a'_2 x'^2_1 x'^2_2 + a'_4 x'^4_2,$$

et l'on aura alors

$$i' = a'_0 a'_4 + 3 a'^2_2, \qquad j' = a'_0 a'_2 a'_4 - a'^3_2,$$

$$H' = a'_0 a'_2 x'^4_1 + (a'_0 a'_4 - 3 a'^2_2) x'^2_1 x'^2_2 + a'_2 a'_4 x'^4_2,$$

$$J' = (a'_0 a'_4 - 9 a'^2_2)(a'_0 x'^4_1 - a'_4 x'^4_2) x'_1 x'_2;$$

de plus, pour cette forme, les racines de l'équation canonisante sont

$$-2a'_2, \quad a'_2 \pm \sqrt{a'_0 a'_4}.$$

94. En faisant usage des formules canoniques qui précèdent, on vérifie facilement les identités

$$J^2(f, H) = \frac{1}{6} if, \qquad J^3(f, H) = 0, \qquad J^2(H, H) = \frac{1}{2} jf - \frac{1}{6} iH,$$

$$J^4(H, H) = \frac{i^2}{6}, \qquad J^2(J, J) = -\frac{2}{3} iH^2 + 2jfH - \frac{1}{18} i^2 f^2, \qquad J^4(J, J) = 0,$$

$$J^6(J, J) = -\frac{i^3}{3} + 9j^2, \qquad J(f, J) = \frac{i}{6} f^2 - 2H^2, \qquad J^2(f, J) = 0,$$

$$J^3(f, J) = \frac{3}{2} jf - iH, \qquad J^4(f, J) = 0, \qquad J(H, J) = \frac{j}{2} f^2 - \frac{1}{3} ifH,$$

$$J^2(H, J) = 0, \qquad J^3(H, J) = \frac{1}{12} i^2 f - \frac{3}{2} jH, \qquad J^4(H, J) = 0.$$

En particulier, on en tire l'identité (48),

$$\frac{J^2}{2} = \begin{vmatrix} 2H & \frac{1}{6}if & f \\ \frac{1}{6}if & \frac{1}{2}jf - \frac{1}{6}iH & H \\ f & H & 0 \end{vmatrix},$$

ou

$$J^2 = -4H^3 + if^2H - jf^3 = -\frac{1}{2}(2H + \lambda' f)(2H + \lambda'' f)(2H + \lambda''' f).$$

95. Ceci nous amène à considérer le faisceau de formes

$$g = \lambda_1 jf + \lambda_2 iH;$$

si l'on envisage la forme cubique en (λ) obtenue en remplaçant dans la canonisante λ par $\frac{2j\lambda_1}{i\lambda_2}$ et faisant $k = -\frac{i^3}{4j^2}$, soit

$$\varphi = \lambda_1^3 + k\lambda_1\lambda_2^2 + k\lambda_2^3,$$

les racines de cette forme sont comme k des invariants absolus géométriques. On trouve alors, en appelant η et θ le hessien et l'invariant cubique de cette forme φ, et posant

$$\varphi_1 = \frac{1}{3}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_1}, \qquad \varphi_2 = \frac{1}{3}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_2},$$

les relations

$$i_g = \frac{3ij^2}{k}\eta, \qquad j_g = \frac{j^4}{k}\theta, \qquad H_g = j^2\varphi_1 H - \frac{j^3}{i}\varphi_2 f, \qquad J_g = j^3\varphi J,$$

et l'on a aussi la relation

$$i_g^3 - 27j_g^2 = j^6\varphi^2(i^3 - 27j^2),$$

qui est celle qui existe entre les invariants de la forme cubique φ.

Le hessien de H, en particulier, est $3if - jH$ à un facteur près; pour une forme f de degré n, le hessien H_1 du hessien H de cette forme est évidemment un invariant de la quatrième polaire de f et des (x), lorsque, profitant des propriétés des fonctions homogènes, on n'y laisse subsister que les dérivées du quatrième ordre; alors on vérifie sans peine que l'on a, à un facteur près, pour H_1, l'expression nécessaire $(2n-5)if - jH$, i et j étant les inva-

riants proprement dits de la quatrième polaire de f considérée comme forme biquadratique par rapport aux (y).

96. En fonction des racines, on a

$$\mathrm{H} = -\frac{1}{48}\Sigma(xa^{(1)})^2(xa^{(2)})^2(a^{(3)}a^{(4)})^2,$$

et aussi

$$\mathrm{J} = -\frac{1}{32}\Sigma(xa^{(2)})^2(xa^{(3)})^2(xa^{(4)})^2(a^{(1)}a^{(2)})(a^{(1)}a^{(3)})(a^{(1)}a^{(4)}).$$

De plus on voit sur la forme canonique que J est décomposable en trois facteurs quadratiques qui représentent les éléments doubles des trois involutions définies par les racines de f associées de toutes les façons possibles par couples de deux ; en outre, chacun de ces facteurs quadratiques représente aussi les éléments doubles de l'involution définie par les racines des deux autres. Ces trois facteurs quadratiques sont d'ailleurs des racines carrées de $2\mathrm{H}+\lambda' f$, $2\mathrm{H}+\lambda'' f$ et $2\mathrm{H}+\lambda''' f$.

Posons maintenant

$$\rho' = (a^{(1)}a^{(3)})(a^{(2)}a^{(4)}) + (a^{(1)}a^{(4)})(a^{(2)}a^{(3)}),$$
$$\rho'' = (a^{(1)}a^{(4)})(a^{(3)}a^{(2)}) + (a^{(1)}a^{(2)})(a^{(3)}a^{(4)}),$$
$$\rho''' = (a^{(1)}a^{(2)})(a^{(4)}a^{(3)}) + (a^{(1)}a^{(3)})(a^{(4)}a^{(2)});$$

l'équation qui admet ces trois quantités pour racines est

$$\rho^3 - 36 i \rho - 432 j = 0,$$

que l'on déduit de la canonisante en faisant $\rho = -6\lambda$. On a donc :

$$i = -\frac{1}{36}\Sigma\rho''\rho''', \qquad j = -\frac{1}{432}\rho'\rho''\rho'''.$$

97. Cherchons l'équation qui donne les rapports anharmoniques des quatre racines de f associées d'une façon quelconque. Si l'on fait

$$\rho_1 = (a^{(1)}a^{(3)})(a^{(2)}a^{(4)}), \qquad \rho_2 = (a^{(1)}a^{(4)})(a^{(2)}a^{(3)}),$$

de sorte que $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ est l'un des rapports cherchés, on a d'abord

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\rho' - \rho'''}{\rho' - \rho''};$$

on a aussi, comme au n° 88,

$$\rho_1 - \rho_2 = (a^{(1)}a^{(2)})(a^{(3)}a^{(4)}),$$

$$\rho_1 + \rho_2 = \rho', \qquad \rho_1 - 2\rho_2 = \rho'', \qquad \rho_2 - 2\rho_1 = \rho''',$$

$$\begin{aligned}\rho_1^2 - \rho_1\rho_2 + \rho_2^2 &= -\frac{1}{3}\,[(\rho_1+\rho_2)(\rho_1-2\rho_2)+(\rho_1+\rho_2)(\rho_2-2\rho_1) \\ &\qquad +(\rho_1-2\rho_2)(\rho_2-2\rho_1)] \\ &= -\frac{1}{3}\,\Sigma\rho''\rho''' = 12i,\end{aligned}$$

$$(\rho_1+\rho_2)(\rho_1-2\rho_2)(\rho_2-2\rho_1) = \rho'\rho''\rho''' = -432j.$$

L'équation cherchée est donc

$$\frac{(\rho_1+\rho_2)^2(\rho_1-2\rho_2)^2(\rho_2-2\rho_1)^2}{27j^2} = \frac{4(\rho_1^2-\rho_1\rho_2+\rho_2^2)^3}{i^3};$$

une identité connue donne aussi par suite

$$\rho_1^2\rho_2^2(\rho_1-\rho_2)^2 = \Pi(a^{(1)}a^{(2)})^2 = 256(i^3-27j^2),$$

de sorte que le discriminant de f est, à un facteur près, l'invariant $i^3 - 27j^2$; c'est aussi le discriminant de la canonisante.

Sur la forme canonique, la valeur de cet invariant est

$$a'_0\,a'_4\,(a'_0\,a'_4 - 9a_2'^2)^2.$$

$i = 0$ et $j = 0$ sont respectivement les conditions pour que les quatre racines de f forment une proportion équianharmonique ou harmonique. Le rapport anharmonique des quatre racines de f dépend de l'invariant absolu géométrique k.

98. La forme canonique que nous avons employée est réalisable de trois façons différentes quand $i^3 - 27j^2$ n'est pas nul, puisque alors l'équation canonisante a, comme f, ses racines distinctes. En même temps, toutes les formes du faisceau $\lambda_1 jf + \lambda_2 iH$ sont réduites à la forme canonique.

Voici les divers cas particuliers possibles :

1° Si f a une racine quadruple, H est nul identiquement, et réciproquement; tous les autres invariants sont aussi nuls. La forme canonique de f est $a'_0 x_1'^4$.

2° Si f a une racine triple, on peut lui donner la forme canonique

$$f' = 4a'_1\,x_1'^3\,x'_2;$$

alors on a

$$i = j = 0, \qquad H' = -a_1'^2 x_1'^4, \qquad J' = 2a_1'^3 x_1'^6;$$

réciproquement, ce cas est caractérisé par les conditions $i = j = 0$.

3° Si f a deux racines doubles distinctes, c'est-à-dire est un carré parfait, on peut écrire par exemple

$$f' = 6a_2' x_1'^2 x_2'^2;$$

alors

$$i' = 3a_2'^2, \qquad j' = -a_2'^3, \qquad H' = -3a_2'^2 x_1'^2 x_2'^2, \qquad J = 0;$$

et, par suite,

$$i^3 - 27j^2 = 0, \qquad 3jf - 2iH = 0, \qquad i^2 f - 18jH = 0;$$

réciproquement, i et j n'étant pas nuls, ce cas est caractérisé par l'évanouissement identique de J, ou de $3jf - 2iH$, ou de $i^2 f - 18jH$; la condition la plus simple à employer est

$$3jf - 2iH = 0.$$

4° Si f a une racine double unique, on a simplement

$$i^3 - 27j^2 = 0;$$

on peut employer la forme canonique ordinaire, possible d'une seule façon, avec $a_4' = 0$.

On retrouvera les résultats précédents en appliquant ce que nous avons dit sur les racines multiples d'une forme en général.

99. Voici comment on peut, dans le cas général, exécuter la réduction à la forme canonique qui correspond à une racine λ' de l'équation canonisante. Pour cette forme canonique, λ' devient $-2a_2'$, et l'on a

$$2H' - 2a_2' f' = 2(a_0' a_4' - 9a_2'^2) x_1'^2 x_2'^2:$$

donc la forme $2H + \lambda' f$ est, ainsi que nous l'avons déjà fait remarquer, un carré parfait: et d'ailleurs cette forme et les deux analogues sont les seules formes du faisceau $\lambda_1 jf + \lambda_2 iH$ qui jouissent de cette propriété. Nous écrirons

$$2H + \lambda' f = g' = h'^2;$$

x_1' et x_2' sont les facteurs linéaires de h'. Introduisons alors les

variables (y), et considérons la polaire h'_{xy}, que l'on trouve égale à $\frac{g'_{xy^3}}{h'_{y^2}}$; calculons aussi l'invariant de h' : sur la forme canonique, sa valeur est

$$-\frac{1}{2}(a'_0 a'_4 - 9a'^2_2),$$

et par suite, en général,

$$\frac{1}{2}(\lambda' - \lambda'')(\lambda' - \lambda''').$$

Posons donc

$$x'_1 = g'_{xy^3} + (xy)\sqrt{-\frac{1}{2}(\lambda' - \lambda'')(\lambda' - \lambda''')g'_{y^4}},$$

$$x'_2 = g'_{xy^3} - (xy)\sqrt{-\frac{1}{2}(\lambda' - \lambda'')(\lambda' - \lambda''')g'_{y^4}};$$

le déterminant de la substitution ainsi définie pour passer des (x) aux (x') est

$$\frac{1}{2g'_{y^4}\sqrt{-\frac{1}{2}(\lambda' - \lambda'')(\lambda' - \lambda''')g'_{y^4}}}.$$

λ' est un invariant d'ordre 2 qui devient $-2a'_2$ pour la forme canonique; donc d'abord

$$a'_2 = \frac{\lambda'}{4(\lambda' - \lambda'')(\lambda' - \lambda''')g'^3_{y^4}};$$

se servant ensuite des autres invariants comme nous avons déjà fait souvent, on a sans ambiguïté

$$\left.\begin{matrix} a'_0 \\ a'_4 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2g'^4_{y^4}}\left\{a_{y^4} - \frac{3}{2}\,\frac{\lambda' g'_{y^4}}{(\lambda' - \lambda'')(\lambda' - \lambda''')} \pm \frac{J_{y^6}}{\sqrt{-\frac{1}{2}(\lambda' - \lambda'')(\lambda' - \lambda''')g'_{y^4}}}\right\}.$$

Si l'on ne veut employer que λ', on remarquera que

$$(\lambda' - \lambda'')(\lambda' - \lambda''') = 3\lambda'^2 - i.$$

100. Enfin, décomposons directement f en facteurs linéaires. On a

$$2H + \lambda' f = g' = h'^2, \qquad 2H + \lambda'' f = g'' = h''^2, \qquad 2H + \lambda''' f = g''' = h'''^2$$

d'où

$$\begin{aligned}(\lambda''-\lambda''')f &= (h''+h''')(h''-h'''),\\ (\lambda'''-\lambda')f &= (h'''-h')(h'''-h'),\\ (\lambda'-\lambda'')f &= (h'+h'')(h'-h''),\end{aligned}$$

et l'on a ainsi d'abord, de trois façons différentes, la décomposition de f en facteurs quadratiques.

$h'-h''$ et $h'-h'''$, par exemple, ont un facteur linéaire commun ; sans quoi $h'+h''$ et $h'-h'''$ auraient les mêmes facteurs, ainsi que $h'-h''$ et $h'+h'''$, hypothèses absurdes ; le facteur linéaire commun à $h'-h''$ et $h'-h'''$ est la racine carrée de leur jacobien et est un facteur linéaire de f. On a d'ailleurs

$$\mathrm{J}(h'-h'',\ h'-h''') = \mathrm{J}(h'',\ h''') + \mathrm{J}(h''',\ h') + \mathrm{J}(h',\ h'');$$

de plus, d'après ce qui a été dit, $\mathrm{J}(h'',\ h''')$ doit être proportionnel à h' et, en fait, sur la forme canonique, on trouve

$$\mathrm{J}(h'',\ h''') = \frac{h'}{\sqrt{-2}}(\lambda''-\lambda''');$$

les carrés des facteurs linéaires de f sont donc

$$\pm(\lambda''-\lambda''')h' \pm (\lambda'''-\lambda')h'' \pm (\lambda'-\lambda'')h''',$$

et ces facteurs eux-mêmes peuvent s'écrire, d'après ce qui a été dit plus haut,

$$\frac{\lambda''-\lambda'''}{\sqrt{g'_{y^4}}}\,g'_{xy^3} + \frac{\lambda'''-\lambda'}{\sqrt{g''_{y^4}}}\,g''_{xy^3} + \frac{\lambda'-\lambda''}{\sqrt{g'''_{y^4}}}\,g'''_{xy^3},$$

les radicaux ayant des signes arbitraires.

Si l'on fait

$$\Lambda' = \frac{\lambda''-\lambda'''}{\sqrt{g'_{y^4}}}\,g'_{xy^3}, \quad \ldots$$

on a exactement

$$f = -\frac{1}{4a_{y^4}(i^3-27j^2)}(\Lambda'+\Lambda''+\Lambda''')(-\Lambda'+\Lambda''+\Lambda''')(\Lambda'-\Lambda''+\Lambda''')(\Lambda'+\Lambda''-\Lambda''').$$

Cette formule de résolution de l'équation du quatrième degré devient illusoire quand f a des racines multiples.

On peut la modifier de façon à lui enlever cet inconvénient et, en même temps, à la simplifier.

En remplaçant, en effet, λ', λ'', λ''' par leurs valeurs tirées des

équations telles que

$$2H_{y^4} + \lambda' a_{y^4} = g'_{y^4}$$

dans l'expression des facteurs linéaires de f, celle-ci peut s'écrire, à un facteur près,

$$a_{xy^3}\Sigma(g''_{y^4} - g'''_{y^4})\sqrt{g'_{y^4}} - 2(a_{xy^3}H_{y^4} - a_{y^4}H_{xy^3})\sum \frac{g''_{y^4} - g'''_{y^4}}{\sqrt{g'_{y^4}}},$$

ou encore, en divisant par

$$(\sqrt{g''_{y^4}} - \sqrt{g'''_{y^4}})(\sqrt{g'''_{y^4}} - \sqrt{g'_{y^4}})(\sqrt{g'_{y^4}} - \sqrt{g''_{y^4}}),$$

et remplaçant $2(a_{xy^3}H_{y^4} - a_{y^4}H_{xy^3})$ par $(xy)J_{y^4}$,

$$a_{xy^3} + \frac{(xy)J_{y^4}(\sqrt{g'_{y^4}} + \sqrt{g''_{y^4}} + \sqrt{g'''_{y^4}})}{\sqrt{g'_{y^4}}\sqrt{g''_{y^4}}\sqrt{g'''_{y^4}}}.$$

Mais l'on a

$$g'_{y^4}g''_{y^4}g'''_{y^4} = -2J^2_{y^4};$$

si donc on choisit les radicaux de façon que

$$\sqrt{g'_{y^4}}\sqrt{g''_{y^4}}\sqrt{g'''_{y^4}} = J_{y^4}\sqrt{-2},$$

$\sqrt{-2}$ ayant une détermination fixée arbitrairement, il vient finalement pour l'expression cherchée

$$a_{xy^3} + \frac{(xy)}{\sqrt{-2}}(\sqrt{g'_{y^4}} + \sqrt{g''_{y^4}} + \sqrt{g'''_{y^4}}).$$

et l'on a exactement

$$f = \frac{1}{a^3_{y^4}}\Pi\left[a_{xy^3} + \frac{(xy)}{\sqrt{-2}}(\sqrt{g'_{y^4}} + \sqrt{g''_{y^4}} + \sqrt{g'''_{y^4}})\right].$$

Pour le calcul numérique, on pourra faire $y_1 = 1$, $y_2 = 0$. On obtiendrait aussi facilement des formules analogues pour les formes du faisceau $\lambda_1 jf + \lambda_2 iH$.

IV. — La forme quintique.

101. Ce n'est que d'une façon sommaire que nous allons étudier la forme quintique

$$f = a_{x^5} = a_0x_1^5 + 5a_1x_1^4x_2 + 10a_2x_1^3x_2^2 + 10a_3x_1^2x_2^3 + 5a_4x_1x_2^4 + a_5x_2^5 = (xa^{(1)})(xa^{(2)})(xa^{(3)})(xa^{(4)})(xa^{(5)}).$$

Nous ne formerons explicitement les invariants de cette forme qu'en nous servant de la forme canonique générale

$$f = \alpha_1 x_1'^5 + \alpha_2 x_2'^5 + \alpha_3 x_3'^5,$$

où x'_1, x'_2, x'_3 sont, d'après le n° 83, à des facteurs numériques près, les facteurs linéaires de l'invariant

$$\begin{vmatrix} a_0 x_1 + a_1 x_2 & a_1 x_1 + a_2 x_2 & a_2 x_1 + a_3 x_2 \\ a_1 x_1 + a_2 x_2 & a_2 x_1 + a_3 x_2 & a_3 x_1 + a_4 x_2 \\ a_2 x_1 + a_3 x_2 & a_3 x_1 + a_4 x_2 & a_4 x_1 + a_5 x_2 \end{vmatrix}$$

ou

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ x_2^3 & -x_1 x_2^2 & x_1^2 x_2 & -x_1^3 \end{vmatrix}.$$

Nous supposerons aussi, ce qui est possible, que x'_1, x'_2, x'_3 sont choisis de telle façon que l'on ait identiquement

$$x'_1 + x'_2 + x'_3 = 0.$$

Soient alors, x'_1 et x'_2 étant pris pour variables, g et k deux invariants de f et des (x'), des degrés p et p' par rapport aux (x'); exprimons g et k à l'aide de x'_1, x'_2 et x'_3 d'une façon quelconque, de manière à obtenir des formes ternaires des mêmes degrés p et p'; de plus, dans l'expression nouvelle de k, remplaçons x'_1, x'_2 et x'_3 respectivement par $\xi'_3 - \xi'_2$, $\xi'_1 - \xi'_3$, $\xi'_2 - \xi'_1$; il n'est pas difficile de voir que l'on aura

$$J^h(g, k) = \frac{P_{p-h}}{P_p} \frac{P_{p'-h}}{P_{p'}} \left(\frac{\partial g}{\partial x'_1} \frac{\partial k}{\partial \xi'_1} + \frac{\partial g}{\partial x'_2} \frac{\partial k}{\partial \xi'_2} + \frac{\partial g}{\partial x'_3} \frac{\partial k}{\partial \xi'_3} \right)^h,$$

la puissance qui figure dans le second membre étant symbolique : en effet, on a évidemment

$$\frac{\partial g}{\partial x'_1} \frac{\partial k}{\partial \xi'_1} + \frac{\partial g}{\partial x'_2} \frac{\partial k}{\partial \xi'_2} + \frac{\partial g}{\partial x'_3} \frac{\partial k}{\partial \xi'_3} = \frac{\partial g}{\partial x'_1} \frac{\partial k}{\partial x'_2} - \frac{\partial g}{\partial x'_2} \frac{\partial k}{\partial x'_1},$$

où, dans le second membre, g et k sont exprimés en fonction des seules variables x'_1 et x'_2.

Nous allons appliquer ce procédé, dont l'importance est évidente, à la formation des invariants de la forme quintique.

102. Nous avons

$$f = \alpha_1 x_1'^5 + \alpha_2 x_2'^5 + \alpha_3 x_3'^5$$
$$= \alpha_1(\xi_3' - \xi_2')^5 + \alpha_2(\xi_1' - \xi_3')^5 + \alpha_3(\xi_2' - \xi_1')^5.$$

On en déduit sans peine

$$q_2 = \frac{1}{2} J^4(f, f) = \Sigma\alpha_2\alpha_3 x_2' x_3';$$
$$h_2 = \frac{1}{2} J^2(f, f) = \Sigma\alpha_2\alpha_3 x_2'^3 x_3'^3;$$
$$t_3 = -J^2(f, q_2) = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \Sigma x_1'^3 = 3\alpha_1\alpha_2\alpha_3 x_1' x_2' x_3' \text{ (c'est l'invariant canonisant)};$$
$$f_3 = 2J(f, q_2) = \Sigma\alpha_1^2(\alpha_2 - \alpha_3)x_1'^5 - \alpha_1\alpha_2\alpha_3(x_2' - x_3')(x_3' - x_1')(x_1' - x_2')\Sigma x_2' x_3';$$
$$m_3 = 2J(f, h_2) = \Sigma\alpha_1^2(\alpha_2 x_2'^2 - \alpha_3 x_3'^2)x_1'^7 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3 x_1'^2 x_2'^2 x_3'^2(x_2' - x_3')(x_3' - x_1')(x_1' - x_2');$$
$$i_4 = -2J^2(q_2, q_2) = (\Sigma\alpha_2\alpha_3)^2 - 4\alpha_1\alpha_2\alpha_3\Sigma\alpha_1;$$
$$g_4 = -J^2(f, t_3) = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\Sigma\alpha_1 x_1'^4;$$
$$h_4 = -J(f, t_3) = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\Sigma\alpha_1 x_1'^5(x_2' - x_3');$$
$$l_5 = -J^4(f, g_4) = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\Sigma\alpha_2\alpha_3 x_1';$$
$$t_5 = J^3(f, g_4) = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\Sigma\alpha_2\alpha_3 x_2' x_3'(x_2' - x_3');$$
$$k_5 = J(f, g_4) = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\Sigma\alpha_2\alpha_3 x_2'^3 x_3'^3(x_2' - x_3');$$
$$q_6 = -J^2(t_3, t_3) = \alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2\Sigma x_1'^2;$$
$$g_6 = -J(f, l_5) = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\Sigma\alpha_1^2(\alpha_2 - \alpha_3)x_1'^4;$$
$$l_7 = -J^4(f, g_6) = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\Sigma\alpha_1(\alpha_2 - \alpha_3)(-\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2)x_1';$$
$$f_7 = J(f, q_6) = \alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2\Sigma\alpha_1 x_1'^4(x_1' - x_2');$$
$$i_8 = \frac{1}{2} J^4(g_4, g_4) = \alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2\Sigma\alpha_2\alpha_3;$$
$$q_8 = -J(t_3, l_5) = \alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2\Sigma\alpha_1(\alpha_2 - \alpha_3)x_1'^2;$$
$$t_9 = -J(t_3, q_6) = \alpha_1^3\alpha_2^3\alpha_3^3(x_2' - x_3')(x_3' - x_1')(x_1' - x_2');$$
$$l_{11} = -J^2(t_3, q_8) = \alpha_1^3\alpha_2^3\alpha_3^3\Sigma\alpha_1(\alpha_2 - \alpha_3)x_1';$$
$$i_{12} = \frac{1}{6} J^2(q_6, q_6) = \alpha_1^4\alpha_2^4\alpha_3^4;$$
$$l_{13} = -\frac{1}{3}[J(l_5, q_8) + i_8 l_5] = \alpha_1^4\alpha_2^4\alpha_3^4\Sigma\alpha_1 x_1';$$
$$i_{18} = -J(l_5, l_{13}) = \alpha_1^5\alpha_2^5\alpha_3^5(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_2).$$

On a ainsi le système complet de la forme quintique et des (x) : il est composé de vingt-trois formes, liées par des relations qu'il serait facile de développer.

103. Les invariants précédents peuvent être retrouvés de bien des façons : nous ne signalerons que quelques applications. Pour former le discriminant de f, il faut éliminer les (x') entre les équations

$$\alpha_1 x_1'^4 = \alpha_2 x_2'^4 = \alpha_3 x_3'^4,$$

et

$$x'_1 + x'_2 + x'_3 = 0,$$

d'où le résultant

$$\Sigma(\alpha_2 \alpha_3)^{\frac{1}{4}},$$

ou sous forme rationnelle

$$i_4^2 - 128\, i_8.$$

On pourra de même exprimer, à l'aide des invariants fondamentaux, les invariants qui, égalés à zéro, expriment que la forme f a des racines multiples, de toutes les façons possibles.

On peut considérer α_1, α_2, α_3 comme les racines de l'équation

$$\alpha^3 - \frac{i_4 i_{12} - i_8^2}{4\, i_{12}^{\frac{5}{4}}}\, \alpha^2 + \frac{i_8}{i_{12}^{\frac{1}{2}}}\, \alpha - i_{12}^{\frac{1}{4}} = 0;$$

et par suite, on a facilement

$$16\, i_{18}^2 = -432\, i_{12}^3 - 72\, i_4 i_8 i_{12}^2 + 8\, i_8^3 i_{12} - i_4 (i_4 i_{12} - i_8^2)^2 :$$

telle est la relation qui existe entre les invariants proprement dits de f.

Le résultant de f et de l_5 est $i_{18}(i_4^2 - 3\, i_8)$; donc on pourra résoudre l'équation $f = 0$ algébriquement dès que l'un des facteurs de ce résultant sera nul.

Remarquons enfin que le procédé qui nous a servi pour étudier la forme quintique pourrait servir, convenablement généralisé, dans beaucoup d'autres cas.

CHAPITRE VIII.

LA FORME LINÉO-QUADRATIQUE ET LA FORME DOUBLEMENT QUADRATIQUE.

I. — La forme linéo-quadratique.

104. Dans ce Chapitre, nous allons étudier les deux formes les plus simples, après la forme bilinéaire, parmi celles qui contiennent deux séries de variables (x) et (y) : la forme doublement quadratique offre un intérêt tout particulier, comme nous le verrons par la suite.

Soit d'abord une forme linéo-quadratique

$$f = (a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2) y_1 + (b_0 x_1^2 + 2b_1 x_1 x_2 + b_2 x_2^2) y_2;$$

on peut envisager cette forme comme établissant une correspondance entre les éléments (x) et (y) de deux séries X et Y, telles qu'à chaque élément (x) corresponde un seul élément (y), et à chaque élément (y) correspondent deux éléments (x), et l'on voit tout de suite que les divers couples d'éléments (x) qui correspondent aux divers éléments (y) sont les couples d'une involution.

Si les séries X et Y constituent des espaces distincts, les invariants multiples de f sont seuls intéressants; ce sont : 1° la forme f elle-même; 2° le résultant R des deux formes quadratiques $a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2$ et $b_0 x_1^2 + 2b_1 x_1 x_2 + b_2 x_2^2$; 3° le jacobien de ces deux formes, dont la signification géométrique est immédiate; 4° le discriminant de la forme f, considérée comme ne dépendant que des (x), et dont la signification est évidente aussi.

Au surplus, si le résultant R n'est pas nul, on peut ramener f à la forme canonique simple

$$a'_2 (x'^2_2 y'_1 - x'^2_1 y'_2),$$

et l'on en peut déduire une relation simple entre rapports anharmoniques faciles à définir.

105. Supposons maintenant les séries X et Y coïncidantes, et rapportées aux mêmes coordonnées. Les invariants précédemment définis subsistent; ce sont avec f :

$$\mathrm{R} = 4(a_0a_2 - a_1^2)(b_0b_2 - b_1^2) - (a_0b_2 + a_2b_0 - 2a_1b_1)^2,$$
$$\mathrm{J} = (a_0b_1 - a_1b_0)x_1^2 - (a_0b_2 - a_2b_0)x_1x_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)x_2^2.$$
$$\mathrm{D} = (a_0a_2 - a_1^2)x_1^2 + (a_0b_2 + a_2b_0 - 2a_1b_1)x_1x_2 + (b_0b_2 - b_1^2)x_2^2.$$

ce dernier étant exprimé à l'aide des (x).

L'invariant simultané de J et D donne encore

$$\mathrm{H} = (a_0b_1 - a_1b_0)(b_0b_2 - b_1^2) + (a_1b_2 - a_2b_1)(a_0a_2 - a_1^2)$$
$$- \frac{1}{2}(a_0b_2 - a_2b_0)(a_0b_2 + a_2b_0 - 2a_1b_1).$$

Si dans f on fait les (y) égaux aux (x), on a

$$f_1 = a_0x_1^3 + (2a_1 + b_0)x_1^2x_2 + (a_2 + 2b_1)x_1x_2^2 + b_2x_2^3,$$

et, par suite, un nouvel invariant

$$g = \frac{3}{2}\,\frac{f - \mathrm{D}^1_{(x)}f_1}{(xy)} = (b_0 - a_1)x_1 - (b_1 - a_2)x_2;$$

le résultant de f_1 et g sera

$$\mathrm{K} = a_0(a_2 - b_1)^3 + (2a_1 + b_0)(b_0 - a_1)(a_2 - b_1)^2$$
$$+ (a_2 + 2b_1)(b_0 - a_1)^2(a_2 - b_1) + b_2(b_0 - a_1)^3,$$

et le jacobien de J et g sera

$$h = [2(a_0b_1 - a_1b_0)(b_1 - a_2) - (a_0b_2 - a_2b_0)(b_0 - a_1)]x_1$$
$$+ [(a_0b_2 - a_2b_0)(b_1 - a_2) - 2(a_1b_2 - a_2b_1)(b_0 - a_1)]x_2.$$

Les invariants indépendants R, H, K, g, h forment un système fondamental simple pour le système formé de f et des (x).

Si l'on prend la forme canonique

$$f = (a'_0x'^2_1 + a'_2x'^2_2)y'_1 + (b'_0x'^2_1 + b'_2x'^2_2)y'_2,$$

possible si $\mathrm{R} \neq 0$, on aura

$$\mathrm{R}' = -(a'_0b'_2 - a'_2b'_0)^2, \qquad \mathrm{H}' = -\frac{1}{2}(a'^2_0b'^2_2 - a'^2_2b'^2_0),$$
$$\mathrm{K}' = a'_0a'^3_2 + b'^3_0b'_2 + 2a'^2_2b'^2_0,$$
$$g' = b'_0x'_1 - a'_2x'_2, \qquad h' = -(a'_0b'_2 - a'_2b'_0)(b'_0x'_1 + a'_2x'_2).$$

Ces formes simples permettent plusieurs remarques géométriques sur lesquelles il est inutile d'insister.

II. — La forme doublement quadratique.

106. Soit la forme

$$f=(a_0x_1^2+2a_1x_1x_2+a_2x_2^2)y_1^2+2(b_0x_1^2+2b_1x_1x_2+b_2x_2^2)y_1y_2$$
$$+(c_0x_1^2+2c_1x_1x_2+c_2x_2^2)y_2^2;$$

égalée à zéro, elle définit une correspondance entre les éléments (x) et (y) de deux séries X et Y, telle qu'à chaque élément de l'une des deux séries correspondent deux éléments de l'autre. Nous supposerons d'abord distincts les espaces X et Y, de sorte que les invariants multiples de f soient seuls à considérer.

Regardons successivement f comme ne dépendant que des (y) ou des (x); nous obtenons d'abord comme invariants les deux discriminants

$$d_1=(a_0x_1^2+2a_1x_1x_2+a_2x_2^2)(c_0x_1^2+2c_1x_1x_2+c_2x_2^2)$$
$$-(b_0x_1^2+2b_1x_1x_2+b_2x_2^2)^2,$$
$$d_2=(a_0y_1^2+2b_0y_1y_2+c_0y_2^2)(a_2y_1^2+2b_2y_1y_2+c_2y_2^2)$$
$$-(a_1y_1^2+2b_1y_1y_2+c_1y_2^2)^2,$$

qui sont deux formes biquadratiques par rapport aux (x) et aux (y); si $d_2=0$, l'équation $f=0$, où les (x) sont inconnues, a une racine double définie par

$$(a_0x_1+a_1x_2)y_1^2+2(b_0x_1+b_1x_2)y_1y_2+(c_0x_1+c_1x_2)y_2^2=0,$$
$$(a_1x_1+a_2x_2)y_1^2+2(b_1x_1+b_2x_2)y_1y_2+(c_1x_1+c_2x_2)y_2^2=0,$$

de sorte qu'en éliminant les (y), on a le nouvel invariant g_1, qui égalé à zéro définit les (x) doubles correspondant aux racines de d_2 :

$$g_1=[(a_0c_1)x_1^2+(a_0c_2)x_1x_2+(a_1c_2)x_2^2]^2$$
$$-4[(a_0b_1)x_1^2+(a_0b_2)x_1x_2+(a_1b_2)x_2^2][(b_0c_1)x_1^2+(b_0c_2)x_1x_2+(b_1c_2)x_2^2],$$

où (a_0c_1) par exemple désigne le déterminant $a_0c_1-a_1c_0$; des

considérations toutes semblables conduisent à l'invariant analogue

$$g_2=[(a_0b_2)y_1^2+(a_0c_2)y_1y_2+(b_0c_2)y_2^2]^2$$
$$-4[(a_0b_1)y_1^2+(a_0c_1)y_1y_2+(b_0c_1)y_2^2][(a_1b_2)y_1^2+(a_1c_2)y_1y_2+(b_1c_2)y_2^2].$$

Imaginons que d_1 et d_2 soient réduites à la forme canonique, ce qui exige, comme on le voit tout de suite, en restant dans le cas le plus général, et désignant toujours les éléments transformés par des lettres accentuées

$$a_1=c'_1=b'_0=b'_2=0;$$

on a alors

$$f=(a'_0x'^2_1+a'_2x'^2_2)y'^2_1+4b'_1x'_1x'_2y'_1y'_2+(c'_0x'^2_1+c'_2x'^2_2)y'^2_2,$$
$$d'_1=a'_0c'_0x'^4_1+(a'_0c'_2+a'_2c'_0-4b'^2_1)x'^2_1x'^2_2+a'_2c'_2x'^4_2,$$
$$d'_2=a'_0a'_2y'^4_1-(a'_0c'_2+a'_2c'_0-4b'^2_1)y'^2_1y'^2_2+c'_0c'_2y'^4_2,$$
$$g'_1=4a'_0c'_0b'^2_1x'^4_1+[(a'_0c'_2-a'_2c'_0)^2-4b'^2_1(a'_0c'_2+a'_2c'_0)]x'^2_1x'^2_2$$
$$+4a'_2c'_2b'^2_1x'^4_2,$$
$$g'_2=4a'_0a'_2b'^2_1y'^4_1+[(a'_0c'_2-a'_2c'_0)^2-4b'^2_1(a'_0c'_2+a'_2c'_0)]y'^2_1y'^2_2$$
$$+4c'_0c'_2y'^4_2.$$

On voit que g'_1 et g'_2 sont aussi réduites à la forme canonique. Considérons le hessien h_1 de d_1; il appartient à un même faisceau avec d_1 et g_1; sur la forme canonique, on a

$$h'_1=\frac{1}{6}(a_0c'_2+a'_2c_0+2b'^2_1)d_1-\frac{1}{4}g'_1,$$

et l'on obtient ainsi l'invariant proprement dit

$$i_2=a'_0c'_2+a'_2c'_0+2b'^2_1,$$

qui, en général, serait

$$i_2=a_0c_2+a_2c_0+2b_1^2-2a_1c_1-2b_0b_2.$$

Cet invariant est obtenu plus rapidement comme invariant J : on a

$$i_2=\frac{1}{32}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f'}{\partial x_2}-\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f'}{\partial x_2}\right)^2\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial f'}{\partial y_2}-\frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial f'}{\partial y_2}\right)^2,$$

les puissances et produit indiqués étant symboliques, et f' étant identique à f.

Un autre invariant proprement dit est évidemment

$$i_3=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix},$$

ou, sur la forme canonique,

$$i''_3 = b'_1 (a'_0 c'_2 - a'_2 c'_0).$$

Enfin considérons f et g_2 comme des formes en (y), et formons $J^4(f^2, g_2)$; on reproduit d_1 à $\frac{i_4}{3}$ près, en désignant par i_4 un invariant proprement dit dont l'expression canonique est

$$i'_4 = (a'_0 c'_2 - a'_2 c'_0)^2 + 8 b'^2_1 (a'_0 c'_2 + a'_2 c'_0),$$

et que des formules données plus bas permettent de calculer différemment.

107. Nous avons ainsi un système fondamental de sept invariants indépendants, en laissant la forme f de côté.

En fonction de ces invariants s'exprimeront facilement tous les autres. Nous remarquerons, à cet effet, que l'on a

$$a'_0 c'_2 + a'_2 c'_0 = i''_2 - 2 b'^2_1,$$
$$a'_0 c'_2 - a'_2 c'_0 = \frac{i''_3}{b'_1},$$

et, par suite,

$$16 b'^6_1 - 8 i''_2 b'^4_1 + i''_4 b'^2_1 - i''^2_3 = 0.$$

On est ainsi amené à considérer une équation canonisante

$$16 \lambda^6 - 8 i_2 \lambda^4 + i_4 \lambda^2 - i_3^2 = 0,$$

dont les racines sont des invariants du second ordre et déterminent immédiatement les coefficients de la forme canonique, lorsque les nouvelles variables sont connues.

Calculons les invariants i et j des deux formes biquadratiques d_1 et d_2; il est évident qu'ils sont les mêmes pour ces deux formes et, d'après les formes canoniques, on trouve sans peine

$$12 i = 4 i_2^2 - 3 i_4, \qquad 216 j = 8 i_2^3 + 54 i_3^2 - 9 i_2 i_4.$$

De même, les invariants correspondants des deux formes biquadratiques g_1 et g_2 sont $\bar{i}$ et $\bar{j}$, déterminés par

$$12 \bar{i} = i_1^2 - 24 i_2 i_3^2, \qquad 216 \bar{j} = -216 i_3^4 + 36 i_2 i_3^2 i_4 - i_4^3.$$

La canonisante de d_1 et d_2 est

$$\lambda_1^3 - i \lambda_1 - 2 j = 0.$$

et l'on a

$$\lambda_1 = \frac{i_2}{3} - 2\lambda^2;$$

la canonisante de g_1 et g_2 est

$$\lambda_2^3 - \bar{i}\lambda_2 - 2\bar{j} = 0,$$

et l'on a

$$\lambda_2 = \frac{i_4}{6} - \frac{i_3^2}{2\lambda^2}.$$

Les rapports anharmoniques des racines de d_1 et d_2 sont donc égaux entre eux et de la forme $\frac{\lambda'^2 - \lambda''^2}{\lambda'^2 - \lambda'''^2}$, en appelant $\lambda'^2, \lambda''^2, \lambda'''^2$ les trois racines de l'équation canonisante en λ^2; et les rapports anharmoniques correspondants des racines de g_1 et g_2 sont $\frac{\lambda'''^2(\lambda'^2 - \lambda''^2)}{\lambda''^2(\lambda'^2 - \lambda''^2)}$.

108. Envisageons maintenant le cas où les séries X et Y sont coïncidantes et rapportées aux mêmes coordonnées. Les invariants précédemment définis subsistent, mais la forme canonique employée ne peut être considérée comme générale.

Si, dans f, on fait les (y) égaux aux (x), on a

$$f_1 = a_0 x_1^4 + 2(a_1 + b_0)x_1^3 x_2 + (a_2 + 4b_1 + c_0)x_1^2 x_2^2 + 2(b_2 + c_1)x_1 x_2^3 + c_2 x_2^4$$

et, par suite,

$$\frac{f - D^2_{xy} f_1}{(xy)} = (b_0 - a_1)x_1 y_1 + \frac{-5a_2 + 4b_1 + c_0}{6} x_2 y_1 + \frac{-a_2 - 4b_1 + 5c_0}{6} x_1 y_2 + (c_1 - b_2)x_2 y_2.$$

Cette forme bilinéaire conduit aux nouveaux invariants

$$k = (b_0 - a_1)x_1^2 + (c_0 - a_2)x_1 x_2 + (c_1 - b_2)x_2^2,$$

$$j_1 = a_2 - 2b_1 + c_0, \qquad j_2 = 4(b_0 - a_1)(c_1 - b_2) - (a_2 - c_0)^2;$$

$6J^4(k^2, f_1)$ donne enfin l'invariant proprement dit

$$\begin{aligned} j_3 = {} & 6a_0(c_1 - b_2)^2 - 6(a_1 + b_0)(c_0 - a_2)(c_1 - b_2) \\ & + (a_2 + 4b_1 + c_0)[(c_0 - a_2)^2 + 2(b_0 - a_1)(c_1 - b_2)] \\ & - 6(b_2 + c_1)(c_0 - a_2)(b_0 - a_1) + 6c_2(b_0 - a_1)^2. \end{aligned}$$

Les invariants proprement dits i_2, i_3, i_4, j_1, j_2, j_3 forment un système fondamental. C'est ainsi que les invariants I et J de la forme biquadratique f_1 sont donnés par

$$12\,\mathrm{I} = 12 i_2 - 3 j_2 - 2 j_1^2, \qquad 216\,\mathrm{J} = 216 i_3 - 9 j_3 + 36 i_2 j_1 - 18 j_1 j_2 - 10 j_1^3.$$

Si à la forme f on adjoint les variables (x), puis (y), on aura encore facilement des systèmes fondamentaux d'invariants.

109. Considérons le cas particulièrement intéressant où la forme f est symétrique par rapport aux (x) et aux (y). On a alors

$$b_0 - a_1 = 0, \qquad c_0 - a_2 = 0, \qquad c_1 - b_2 = 0.$$

Les invariants k, j_2, j_3 sont nuls identiquement, et de plus

$$f = \mathrm{D}_{xy}^2 f_1 + \frac{1}{3} j_1 (xy)^2;$$

réciproquement, si l'on a cette identité, ou bien si k est nul identiquement, la forme f est symétrique.

La forme canonique des n°s 106 et 107 subsiste dans ce cas, avec $c'_0 = a'_2$. On obtient alors la relation

$$4 b_1'^3 + 2 j'_1 b_1'^2 + \left(\frac{j_1'^2}{2} - i'_2\right) b'_1 + i'_3 = 0,$$

et l'on en déduit d'abord

$$i_4 = \left(\frac{j_1^2}{2} - i_2\right)^2 - 4 i_3 j_1;$$

de plus on doit alors prendre comme équation canonisante

$$4\lambda^3 + 2 j_1 \lambda^2 + \left(\frac{j_1^2}{2} - i_2\right)\lambda + i_3 = 0;$$

on vérifiera enfin que dans ce cas, si λ', λ'', λ''' sont les racines de cette canonisante, de sorte que $(a^{(1)})$, $(a^{(2)})$, $(a^{(3)})$, $(a^{(4)})$ étant les racines de d_1, par exemple, on ait

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = (a^{(1)} a^{(2)} a^{(3)} a^{(4)}) = \frac{\lambda'^2 - \lambda''^2}{\lambda'^2 - \lambda'''^2},$$

et si de plus $(b^{(1)})$, $(b^{(2)})$, $(b^{(3)})$, $(b^{(4)})$ sont les racines correspon-

dantes de g_2, on a

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = (b^{(1)}a^{(2)}a^{(3)}a^{(4)}) = \frac{\lambda' - \lambda''}{\lambda' - \lambda'''}.$$

Ce dernier rapport anharmonique n'a donc aussi que six valeurs, comme le premier, et non vingt-quatre, comme il arrive dans le cas général où f n'est pas symétrique. Au surplus, il n'est pas difficile, de même que dans les cas analogues, d'exprimer ce second rapport en fonction rationnelle du premier et des invariants de f. En effet, si l'on permute les racines λ', λ'', λ''' d'une façon quelconque, les variables (ρ) et (σ) sont échangées par les mêmes transformations linéaires. En ne considérant que les (ρ), les fonctions

$$\rho_1^2 - \rho_1\rho_2 + \rho_2^2, \qquad (\rho_1 + \rho_2)(\rho_1 - 2\rho_2)(\rho_2 - 2\rho_1), \qquad \rho_1\rho_2(\rho_1 - \rho_2)$$

restent invariables au signe près; il en est de même de leurs polaires par rapport aux (σ) et de $(\rho\sigma)$, de sorte que la fonction

$$\frac{(\rho_1^2 - \rho_1\rho_2 + \rho_2^2)[\sigma_1\rho_2(2\rho_1 - \rho_2) + \sigma_2\rho_1(\rho_1 - 2\rho_2)]}{(\rho_1 + \rho_2)(\rho_1 - 2\rho_2)(\rho_2 - 2\rho_1)(\rho\sigma)},$$

par exemple, est complètement invariable et, par suite, s'exprime rationnellement en fonction des coefficients de f.

110. La forme f étant symétrique, soit (x) un élément : il lui correspond deux éléments (y) en vertu de $f = 0$; l'un d'eux étant $(x^{(1)})$, il lui correspond de même deux éléments (y) dont l'un est (x) et l'autre $(x^{(2)})$; de même, à $(x^{(2)})$ correspondent, en vertu de $f = 0$, $(x^{(1)})$ et $(x^{(3)})$; et ainsi de suite. Ceci posé, cherchons les relations entre (x) et $(x^{(2)})$, (x) et $(x^{(3)})$, et ainsi de suite.

Ces relations sont doublement quadratiques et symétriques comme f, car à (x) correspondent deux éléments $(x^{(n)})$, et à $(x^{(n)})$, pris comme point de départ, correspondent deux éléments, dont l'un est (x) lui-même.

En appelant f_n le premier membre de la relation qui lie (x) et $(x^{(n)})$ et se servant des formes canoniques, on a d'abord

$$f_2 = 12\,\mathrm{D}^2_{xx^{(2)}}\,g_1 - i_4(xx^{(2)})^2;$$

il était d'ailleurs facile de prévoir que pour $(xx^{(2)}) = 0$ on devait

retrouver g_1. Il serait de même aisé de déterminer à l'avance la forme à laquelle doit se réduire f_n quand on y fait les $(x^{(n)})$ égaux aux (x); il suffirait de partir, pour (x), d'une des racines de f_1 ou de d_1.

Appelons g la forme $D^2_{xy}d_1$, de sorte que, pour les formules canoniques, on a

$$\begin{aligned} g' = & \left(a'_0 a'_2 x'^2_1 + \frac{a'_0 c'_2 + a'^2_2 - 4b'^2_1}{6} x'^2_2\right) y'^2_1 \\ & + \frac{2}{3}(a'_0 c'_2 + a'^2_2 - 4b'^2_1) x'_1 x'_2 y'_1 y'_2 \\ & + \left(\frac{a'_0 c'_2 + a'^2_2 - 4b'^2_1}{6} x'^2_1 + a'_2 c'_2 x'^2_2\right) y'^2_2, \end{aligned}$$

et que l'on peut écrire, en remplaçant les $(x^{(2)})$ par les (y),

$$f_2 = (-12 i_3 - 6 i_2 j_1 + 3 j_1^3) f + 12\left(i_2 - \frac{j_1^2}{2}\right) g + \left(i_2 - \frac{j_1^2}{2}\right)\left(i_2 + \frac{3}{2} j_1^2\right)(xy)^2.$$

Le discriminant de la forme f_2, en général f_n, considérée comme forme quadratique par rapport aux (y), coïncide manifestement avec d_1; donc, comme on peut écrire évidemment

$$f_n = \lambda f + \mu g + \nu (xy)^2,$$

les $(x^{(n)})$ étant, bien entendu, remplacés par les (y), en exprimant la condition qui précède, on trouve sans peine, à l'aide des formes canoniques, la relation

$$\lambda\nu + \mu^2\left(\frac{i_3}{4} + \frac{i_2 j_1}{8} - \frac{j_1^3}{16}\right) + \lambda\mu\left(\frac{i_2}{6} - \frac{j_1^2}{4}\right) = 0,$$

de sorte qu'il vient, en faisant

$$h = g - \left(\frac{i^2}{6} - \frac{j_1^2}{4}\right)(xy)^2$$

et changeant les notations,

$$f_n = f + \omega_n h - \omega_n^2\left(\frac{i_3}{4} + \frac{i_2 j_1}{8} - \frac{j_1^3}{16}\right)(xy)^2;$$

pour la forme canonique, on a d'ailleurs

$$\begin{aligned} h' = & [a'_0 a'_2 x'^2_1 + a'_2(a'_2 - 2b'_1) x'^2_2] y'^2_1 \\ & + (a'_0 c'_2 - a'^2_2 + 4a'_2 b'_1 - 4b'^2_1) x'_1 x'_2 y'_1 y'_2 \\ & + [a'_2(a'_2 - 2b'_1) x'^2_1 + a'_2 c'_2 x'^2_2] y'^2_2. \end{aligned}$$

Pour $n = 2$, on a, d'après ce qui précède,

$$\omega_2 = \frac{-\left(i_2 - \frac{j_1^2}{2}\right)}{i_3 + \frac{i_2 j_1}{2} - \frac{j_1^3}{4}}.$$

Ceci posé, il est évident que si l'on élimine les (z) entre les équations $f_n(x, z) = 0$, $f(y, z) = 0$, le résultant sera le produit de f_{n-1} par f_{n+1}. Nous pouvons, d'après cela, trouver une loi de récurrence pour déterminer les ω_n.

Pour faire le calcul simplement, faisons les (y) égaux aux (x); il faut éliminer (z) entre $f(x, z) = 0$ et $h(x, z) - \omega_n \rho(x, z)^2 = 0$, en faisant $\rho = \frac{i_3}{4} + \frac{i_2 j_1}{8} - \frac{j_1^3}{16}$, et exprimer que le résultant est, à un facteur près, le produit $(f_1 + \omega_{n-1} d_1)(f_1 + \omega_{n+1} d_1)$. Or, en se servant des formes canoniques, le résultant s'écrit comme forme quadratique de f_1 et d_1

$$f_1^2 \omega_n^2 \rho^2 - f_1 d_1 \left(2 j_1 \omega_n \rho + i_3 + \frac{i_2 j_1}{2} - \frac{j_1^3}{4}\right) + d_1^2 \left(4 \omega_n \rho + i_2 - \frac{1}{2} j_1^2\right) = 0;$$

on a donc, par exemple,

$$\omega_n^2 \omega_{n+1} \omega_{n-1} = 16 \frac{\omega_n \left(i_3 + \frac{i_2 j_1}{2} - \frac{j_1^2}{4}\right) + i_2 - \frac{1}{2} j_1^2}{\left(i_3 + \frac{i_2 j_1}{2} - \frac{j_1^2}{4}\right)^2}.$$

Pour $n = 2$, cette formule est inapplicable, car on doit prendre $\omega_1 = 0$: elle détermine simplement ω_2; mais on a aussi

$$\omega_n^2 (\omega_{n-1} + \omega_{n+1}) = -8 \frac{j_1 \omega_n + 2}{i_3 + \frac{i_2 j_1}{2} - \frac{j_1^2}{4}};$$

donc

$$\omega_3 = -\frac{16 i_3}{\left(i_2 - \frac{j_1^2}{2}\right)^2}.$$

Quand ω_n est nul, f_n coïncide avec f et $x^{(n+1)}$ avec (x), toujours. Ceci arrive pour $n = 2$, si $i_2 - \frac{1}{2} j_1^2 = 0$; pour $n = 3$, si $i_3 = 0$; .... Si $n = 3$, l'équation canonisante a une racine λ' qui est nulle; alors on a $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^2$, et le rapport anharmonique correspondant des racines de g_1 est 1 : ces racines sont confondues deux à deux.

111. En général, les équations $f = 0$ et $f_n = 0$ ont quatre systèmes de solutions communes, qu'il est facile de définir *a priori*, en partant, comme nous l'avons déjà dit, pour (x) d'une racine de f_1 ou de d_1.

Supposons d'abord en effet que (x) vérifie $d_1 = 0$; à cette valeur de (x) correspondent des valeurs uniques pour $(x^{(1)})$, $(x^{(2)})$, ..., $(x^{(n)})$, ...; soient $(a^{(0)})$, $(a^{(1)})$, $(a^{(2)})$, ..., $(a^{(n)})$, ... ces valeurs successives. Soit n impair, égal à $2n' - 1$, et choisissons, comme valeurs de (x) et $(x^{(1)})$, $(a^{(n')})$ et $(a^{(n'-1)})$; on retrouve alors pour $(x^{(n)})$ la valeur $(a^{(n'-1)})$, et par suite $(a^{(n')})$ et $(a^{(n'-1)})$ sont un système de solutions communes pour $f = 0$ et $f_n = 0$. De plus, $(a^{(n')})$ est racine de l'équation à laquelle se réduit $f_{n+1} = 0$, si les (y) deviennent égaux aux (x). Si $\omega_{n+1} = 0$, il faut donc que $(a^{(n')})$ soit racine de $f_1 = 0$; si $\omega_n = 0$, on voit, en partant de $(a^{(0)})$ pour (x), que l'on doit retrouver $(a^{(0)})$ pour $(x^{(n+1)})$, et par suite $(a^{(n')})$ est racine de $d_1 = 0$.

Supposons maintenant que (x) vérifie $f_1 = 0$; à cette valeur $(b^{(0)})$ de (x), correspond une seule valeur de $(x^{(1)})$ différente de $(b^{(0)})$, soit $(b^{(1)})$; on en déduit successivement ensuite $(b^{(2)})$, $(b^{(3)})$, ... Soit n pair, égal à $2n'$, et choisissons pour (x) et $(x^{(1)})$ les valeurs $(b^{(n')})$ et $(b^{(n'-1)})$; on retrouve alors pour $(x^{(n)})$ la valeur $(b^{(n'-1)})$, et par suite $(b^{(n')})$ et $(b^{(n'-1)})$ sont un système de solutions communes pour $f = 0$ et $f_n = 0$. De plus, $(b^{(n')})$ est racine de l'équation à laquelle se réduit $f_{n+1} = 0$ pour $(xy) = 0$. Si $\omega_{n+1} = 0$, il faut donc que $(b^{(n')})$ soit racine de $f_1 = 0$; si $\omega_n = 0$, on voit, en partant de $(b^{(0)})$ pour (x), que l'on doit retrouver $(b^{(0)})$ pour $(x^{(n+1)})$, et par suite $(b^{(n')})$ est racine de $d_1 = 0$.

Ces résultats concordent avec les précédents.

112. Revenons au cas d'une forme non symétrique, ou bien encore au cas où les espaces X et Y sont supposés différents.

Appelons (x) et $(x^{(1)})$ les deux valeurs de (x) qui correspondent à une même valeur de (y); ces deux valeurs sont liées par une relation doublement quadratique symétrique, facile à calculer; avec les formules canoniques, on obtient

$$\begin{aligned}[16 a'_0 c'_0 b'^2_1 x'^2_1 + (a'_0 c'_2 - a'_2 c'_0)^2 x'^2_2](x'^{(1)}_1)^2 \\ + 2[(a'_0 c'_2 - a'_2 c'_0)^2 - 8 b'^2_1 (a'_0 c'_2 + a'_2 c'_0)] x'_1 x'_2 x'^{(1)}_1 x'^{(2)}_2 \\ + [(a'_0 c'_2 - a'_2 c'_0)^2 x'^2_1 + 16 a'_2 c'_2 b'^2_1 x'^2_2](x'^{(1)}_2)^2 = 0.\end{aligned}$$

On peut alors résoudre un problème analogue à celui du n° 110.

Si nous désignons J_1, I_2, I_3 les invariants de cette nouvelle forme, on aura, en fonction des invariants de la forme primitive,

$$J_1 = i_4, \qquad I_2 = \frac{3}{2}\, i_4^2 + 32\, i_2 i_3^2,$$

$$I_3 = -\frac{1}{2}\, i_4^3 - 64\, i_3^4 + 16\, i_2 i_4 i_3^2.$$

On remarquera aussi que la forme précédente est un carré parfait dès que $i_3 = 0$: dans ce cas, les seconds éléments de Y qui correspondent à (x) et $(x^{(1)})$ coïncident : il y a homographie entre deux involutions.

CHAPITRE IX.

ÉTUDE DIRECTE DES FORMES A DEUX SÉRIES DE VARIABLES.

I. — Les couples d'éléments communs à deux formes.

113. Nous nous sommes bornés presque exclusivement, dans l'étude des formations invariantes des systèmes binaires, à la considération des formes à une seule série de variables, et c'est à ces formes que nous avons rattaché l'étude des quelques formes à deux séries de variables que nous avons envisagées. Cependant, l'étude directe des formes à deux séries de variables présente un grand intérêt et des particularités importantes. Nous allons en traiter quelques points.

Considérons deux formes à deux séries de variables $f = a_{x^p y^q}$, $g = a_{x^{p'} y^{q'}}$; égalées à zéro, elles définissent un certain nombre de couples d'éléments (x) et (y), qui leur appartiennent simultanément; ce nombre est évidemment $pq' + p'q$, comme on le voit en éliminant les (x) ou les (y) entre $f = 0$ et $g = 0$. Il peut être avantageux, au lieu de faire cette élimination pour définir les couples communs à f et à g, de procéder d'une façon différente, de façon à obtenir simultanément les valeurs d'un même couple. A cet effet, considérons une forme bilinéaire quelconque

$$\varphi = \alpha_{xy} = \alpha_{11} x_1 y_1 + \alpha_{12} x_1 y_2 + \alpha_{21} x_2 y_1 + \alpha_{22} x_2 y_2,$$

et cherchons la condition pour que φ contienne un couple commun à f et g; nous tirerons de $\varphi = 0$

$$\frac{y_1}{y_2} = -\frac{\alpha_{12} x_1 + \alpha_{22} x_2}{\alpha_{11} x_1 + \alpha_{21} x_2};$$

portant dans f et g et éliminant les (x), on a un résultant de degré $pq' + p'q + 2qq'$ par rapport aux (α), et qui, égalé à zéro, exprime la condition cherchée. Toutefois, ceci n'est vrai que si

l'on a $\delta \neq 0$, en faisant $\delta = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$; et si l'on a $\delta = 0$, les équations entre lesquelles on a éliminé les (x) admettent l'une q fois, l'autre q' fois, le même facteur $\alpha_{12}x_1 - \alpha_{22}x_2$; donc, d'après un raisonnement qui nous a déjà servi, le résultant trouvé plus haut contient le facteur $\delta^{qq'}$; si on l'en débarrasse, il reste une forme Φ, de degré $pq' + p'q$, dont l'évanouissement est la condition cherchée, sans facteur étranger.

D'ailleurs, si $(a^{(i)})$, $(b^{(i)})$ est un couple commun à f et g, il est clair que l'on peut écrire

$$\Phi = \Pi(\alpha_{11}a_1^{(i)}b_1^{(i)} + \alpha_{12}a_1^{(i)}b_2^{(i)} + \alpha_{21}a_2^{(i)}b_1^{(i)} + \alpha_{22}a_2^{(i)}b_2^{(i)});$$

donc Φ est décomposable en $pq' + p'q$ facteurs linéaires, et chacun de ces facteurs linéaires fournit immédiatement un couple tel que $(a^{(i)})$, $(b^{(i)})$. Les coefficients (φ) de Φ sont des degrés $p' + q'$ et $p + q$ respectivement par rapport aux (a) et aux (b).

Nous dirons que $\Phi = 0$ est l'équation des couples communs à f et g. Remarquons que les (α) pourraient être considérés comme des variables de seconde espèce par rapport à l'ensemble (x), (y); mais nous n'insisterons pas sur ce point qu'il suffit d'indiquer.

114. Les fonctions symétriques fondamentales des couples communs à f et g sont les coefficients de Φ; si

$$\Phi = \sum \frac{P_r}{P_{r_1}P_{r_2}P_{r_3}P_{r_4}} \varphi_{r_1,r_2,r_3,r_4}\alpha_{11}^{r_1}\alpha_{12}^{r_2}\alpha_{21}^{r_3}\alpha_{22}^{r_4},$$

où $r = pq' + p'q$, on a

$$\begin{aligned}\frac{P_r}{P_{r_1}P_{r_2}P_{r_3}P_{r_4}}\varphi_{r_1,r_2,r_3,r_4} = \Sigma\, & a_1^{(1)}b_1^{(1)}a_1^{(2)}b_1^{(2)}\dots a_1^{(r_1)}b_1^{(r_1)}\\ & a_1^{(r_1+1)}b_2^{(r_1+1)}\dots a_1^{(r_1+r_2)}b_2^{(r_1+r_2)}\\ & a_2^{(r_1+r_2+1)}b_1^{(r_1+r_2+1)}\dots a_2^{(r_1+r_2+r_3)}b_1^{(r_1+r_2+r_3)}\\ & a_2^{(r_1+r_2+r_3+1)}b_2^{(r_1+r_2+r_3+1)}\dots a_2^{(r)}b_2^{(r)}.\end{aligned}$$

Toute fonction symétrique entière des $(a^{(i)})$ et des $(b^{(i)})$ homogène et des mêmes degrés par rapport aux divers couples $(a^{(i)})$ comme par rapport aux divers couples $(b^{(i)})$ s'exprimera en fonction entière des coefficients (a) et (b). En raisonnant comme au n° 8, il suffit de démontrer ce théorème pour les fonctions telles que

$$\Sigma(a_2^{(1)})^m(b_2^{(1)})^n(a_1^{(2)})^m(b_1^{(2)})^n\dots(a_1^{(r)})^m(b_1^{(r)})^n;$$

or, dans Φ, faisons par exemple $\alpha_{22}=0$, $\alpha_{21}=\lambda\alpha_{12}$; on obtient

$$\Pi[(\alpha_{11}a_1^{(i)}b_1^{(i)}+\alpha_{12}(a_1^{(i)}b_2^{(i)}+\lambda a_2^{(i)}b_1^{(i)})];$$

on peut calculer alors, d'après le n° 8,

$$\Sigma(a_1^{(1)}b_2^{(1)}+\lambda a_2^{(1)}b_1^{(1)})^{m+n}(a_1^{(2)})^{m+n}(b_1^{(2)})^{m+n}\ldots(a_1^{(r)})^{m+n}(b_1^{(r)})^{m+n},$$

en fonction entière des (φ); le coefficient de $\frac{P_{m+n}}{P_m P_n}\lambda^m$, dans cette fonction, sera la fonction cherchée, multipliée par $\Pi(a_1^{(i)})^n(b_1^{(i)})^m$; mais $\Pi(a_1^{(i)})$ et $\Pi(b_1^{(i)})$ sont déterminés directement comme fonctions entières des (a) et des (b). La fonction cherchée se présente ainsi comme fonction rationnelle des (φ); mais cette fonction ne pouvant devenir infinie est entière; de plus, elle est des degrés $mp'+nq'$ et $mp+nq$ par rapport aux (a) et aux (b).

115. La forme f est définie au point de vue géométrique par la condition de contenir $pq+p+q$ couples (x), (y), puisqu'elle dépend de $(p+1)(q+1)$ coefficients.

Supposons la forme f donnée, et regardons les coefficients (b) de g comme variables; à chaque système de valeurs des (b) correspond un ensemble de $pq'+p'q$ couples (x) et (y) appartenant à f et à g : nous allons chercher si ces $pq'+p'q$ couples peuvent être pris arbitrairement, appartenant à f.

Supposons d'abord $p'\geq p$, $q'\geq q$; pour définir les couples communs à f et g, nous pouvons remplacer g par $g+hf$, h étant une forme quelconque aux variables (x) et (y), des degrés $p'-p$ et $q'-q$; par suite le système des $pq'+p'q$ couples communs à f et g dépend au plus de

$$(p'+1)(q'+1)-(p'-p+1)(q'-q+1)-1$$

paramètres; ce nombre est égal à $pq'+p'q-(p-1)(q-1)$, de sorte que le système de couples considéré ne dépend que de ce nombre de paramètres au plus et que $(p-1)(q-1)$ au moins de ces couples sont déterminés par les autres. Il est facile de voir qu'il n'y en a pas davantage : en effet, les formes g qui contiennent $pq'+p'q-(p-1)(q-1)$ couples appartenant à f dépendent linéairement de

$$(p'+1)(q'+1)-pq'-p'q+(p-1)(q-1)$$

paramètres homogènes et ce nombre étant supérieur à

$$(p' - p + 1)(q' - q + 1),$$

il en résulte que les formes g considérées ne sont pas toutes composées comme fh; en d'autres termes, elles ne contiennent pas toutes f en facteur : elles sont proprement dites dans leur espèce.

Si maintenant on n'a pas à la fois $p' \geqq p$, $q' \geqq q$, alors on voit tout de suite que parmi les $pq' + p'q$ couples communs à f et g, il y en a

$$pq' + p'q - p'q' - p' - q'$$

qui sont déterminés par les autres : ce nombre coïncide avec le précédent pour $p = p' + 1$, ou $q = q' + 1$.

116. Considérons une forme h des degrés p'' et q'' assujettie à contenir les $pq' + p'q$ couples communs à f et g, et montrons d'abord que ces conditions sont distinctes dès que l'on a

$$p'' \geqq p + p' - 1, \qquad q'' \geqq q + q' - 1.$$

Pour cela, il suffit de faire voir que l'on peut trouver une forme h des degrés $p + p' - 1$, $q + q' - 1$, contenant tous les couples communs à f et g, sauf un : supposons donc que celui-ci corresponde à $x_2 = 0$, $y_2 = 0$, de sorte que l'on puisse écrire

$$f = x_2 f_1 + y_2 f_2, \qquad g = x_2 g_1 + y_2 g_2,$$

f_1 et f_2 étant des formes des degrés $p - 1$, q et p, $q - 1$, et g_1, g_2 étant des formes des degrés $p' - 1$, q' et p', $q' - 1$; alors il est clair que la forme $f_1 g_2 - f_2 g_1$ des degrés $p + p' - 1$ et $q + q' - 1$ contient tous les couples communs à f et g, sauf celui que nous avons mis à part.

Ceci posé, supposons que la forme h des degrés p'' et q'', au moins égaux à $p + p' - 1$ et $q + q' - 1$, contienne tous les couples communs à f et g et formons la combinaison $h_1 = h - ff_1 - gg_1$, f_1 et g_1 étant des formes des degrés respectifs $p'' - p$, $q'' - q$, et $p'' - p'$, $q'' - q'$; h_1 contient comme h tous les couples communs à f et g et cela quelles que soient f_1 et g_1. En disposant convenablement des coefficients arbitraires de f_1 et g_1, on peut réduire le nombre des paramètres homogènes dont dépend linéaire-

ment h_1; mais il faudra faire attention que, si l'on a

$$p'' \geqq p + p', \quad q'' \geqq q + q',$$

l'identité $kfg = kgf$, où k est une forme arbitraire des degrés $p'' - p - p'$, $q'' - q - q'$, et où l'on remplace le second facteur de chaque membre par son développement, établit des relations identiques entre les termes de ff_1 et de gg_1, lorsque f_1 et g_1 y sont développées. Finalement, on voit donc que le nombre des paramètres dont dépend h_1 est

$$(p''+1)(q''+1)-(p''-p+1)(q''-q+1)-(p''-p'+1)(q''-q'+1)$$
$$+(p''-p-p'+1)(q''-q-q'+1),$$

le dernier terme étant applicable encore si l'on a $p'' = p + p' - 1$, puisqu'alors il s'annule.

Ce nombre se réduit précisément à $pq' + p'q$; donc, puisque h_1 est assujettie à $pq' + p'q$ conditions distinctes, il faut que cette forme soit nulle identiquement; par suite nous obtenons ce théorème : la forme h est nécessairement une combinaison telle que $ff_1 + gg_1$.

Bien entendu, ce théorème n'est vrai que d'une façon générale, si l'on conserve aux coefficients de f et g tout leur degré d'arbitraire : cette hypothèse domine toute cette théorie.

Le résultat obtenu suppose que l'on a

$$p'' \geqq p + p' - 1, \quad q'' \geqq q + q' - 1;$$

il est facile d'en déduire qu'il est vrai dans tous les cas, à une exception près. Supposons, en effet, que h, des degrés quelconques p'' et q'', contienne tous les couples communs à f et g: il en sera de même de hx_1 par exemple; si donc le théorème est vrai pour les degrés $p''+1$ et q'', hx_1 sera de la forme $ff_1 + gg_1$; cette combinaison contenant le facteur x_1, si l'on désigne par

$$x_2^p \varphi, \quad x_2^{p''-p+1} \varphi_1, \quad x_2^{p'} \psi, \quad x_2^{p''-p'+1} \psi_1$$

ce que deviennent les fonctions f, f_1, g, g_1, quand on y fait $x_1 = 0$, il faut avoir identiquement $\varphi\varphi_1 + \psi\psi_1 = 0$; si q'' est inférieur à $q + q'$, φ_1 et ψ_1 sont nuls identiquement et le théorème est démontré évidemment, en supposant toutefois, ce qui est possible, que les formes φ et ψ en (y) n'ont pas de racines communes; si l'on a $q'' \geqq q + q'$, on peut écrire

$$\varphi_1 = \omega\psi, \qquad \psi_1 = -\omega\varphi,$$

ω étant une forme en (y) de degré $q'' - q - q'$: mais alors en faisant

$$f = x_2^p \varphi + x_1 f', \qquad g = x_2^{p'} \psi + x_1 g',$$
$$f_1 = x_2^{p''-p-1} \varphi_1 + x_1 f'_1, \qquad g_1 = x_2^{p''-p'+1} \psi_1 + x_1 g'_1,$$

on a sans peine

$$h = f(f'_1 - g' \omega x_2^{p''-p-p'+1}) - g(g'_1 + f' \omega x_2^{p''-p-p'+1}),$$

et cette expression n'est entière que si p'' est au moins égal à $p + p' - 1$. D'après cela, on voit que le théorème n'est en défaut que si les deux nombres p'' et q'' sont l'un supérieur, l'autre inférieur aux nombres $p + p' - 1$, $q + q' - 1$: dans ces cas, on peut mettre h sous la forme du quotient de $ff_1 + gg_1$ par une puissance convenable de x_2 ou y_2, par exemple.

C'est ainsi que, en éliminant les (y) entre f et g, on a une forme h, pour laquelle $p'' = pq' + p'q$, $q'' = 0$; on peut l'écrire, comme on le sait déjà, sous la forme $\frac{ff_1 + gg_1}{y_2^{q+q'-1}}$, et il ne serait pas difficile d'obtenir plus de symétrie.

Si l'on prend $p'' = p + p' - 1 - r$, $q'' = q + q' - 1 - s$, la forme $f_1 f + g_1 g$ contient linéairement $(p' - r)(q' - s) + (p - r)(q - s)$ paramètres homogènes : on en déduit sans peine que la condition de contenir tous les couples communs à f et g équivaut, pour une forme des degrés p'' et q'', à $pq' + p'q - rs$ conditions seulement ; en d'autres termes, dès qu'une telle forme contiendra $pq' + p'q - rs$ couples communs à f et g, elle contiendra nécessairement les rs autres, en général.

II. — Le résultant de trois formes.

117. Soient les trois formes f, g, h, des degrés p et q, p' et q', p'' et q''. Si $(a^{(i)})$, $(b^{(i)})$ sont les couples communs à f et g, formons le produit $\Pi h(a^{(i)}, b^{(i)})$; comme c'est une fonction symétrique des $(a^{(i)})$ et des $(b^{(i)})$, il s'exprimera en fonction entière des coefficients (a) et (b) de f et g; de plus, ce sera une fonction entière, de degré $pq' + p'q$, des coefficients (c) de h.

La condition nécessaire et suffisante pour que les formes f, g, h aient un couple commun est $R = 0$, en appelant R ce produit.

R est le *résultant* des formes f, g, h; il est des degrés $p'q''+p''q'$, $p''q+pq''$, $pq'+p'q$ respectivement par rapport aux coefficients (a), (b), (c) des trois formes, d'après ce qui a été dit précédemment et au n° 114. On obtiendrait donc tout aussi bien R en écrivant que f contient un couple commun à g et h, ou que g contient un couple commun à f et h.

R est un invariant multiple pour les formes f, g, h, des ordres respectifs $\Sigma p'p''q$ et $\Sigma pq'q''$.

118. Considérons l'identité

$$ff_1+gg_1+hh_1=0,$$

où f_1, g_1, h_1 sont des formes des degrés $p'+p''-1$ et $q'+q''-1$, $p''+p-1$ et $q''+q-1$, $p+p'-1$ et $q+q'-1$.

Si f, g, h n'ont pas de couple commun, et si cette identité est vérifiée, il faut que h_1 contienne tous les éléments communs à f et g; donc h_1 est de la forme

$$h_1=ff_2+gg_2,$$

f_2 et g_2 étant des degrés $p'-1$ et $q'-1$, $p-1$ et $q-1$; alors il vient

$$f(f_1+f_2h)+g(g_1+g_2h)=0;$$

si f et g n'ont pas de facteur commun, ce que l'on peut supposer, on a par suite

$$f_1+f_2h=gk,$$
$$g_1+g_2h=-fk,$$

k étant des degrés $p''-1$ et $q''-1$, et l'identité s'écrit

$$k(fg-gf)+f_2(fh-hf)+g_2(gh-hg)=0;$$

elle n'exprime donc aucun fait nouveau : elle résulte seulement des relations identiques qui existent entre les termes de ff_1 et gg_1, par exemple, quand f_1 et g_1 y sont développées, et que nous avons déjà signalées.

D'autre part, si f, g, h ont au moins un couple commun, il est clair que l'on peut vérifier l'identité

$$ff_1+gg_1+hh_1=0,$$

par des valeurs autres que les précédentes; en effet, h_1 ne sera plus

assujettie à contenir tous les couples communs à f et g, mais seulement ceux de ces couples qui n'appartiennent pas à h; et h_1 étant ainsi déterminée, hh_1 sera de la forme $-(ff_1+gg_1)$ d'après le n° 116.

Il résulte des considérations précédentes que la condition nécessaire et suffisante pour que f, g, h aient au moins un couple commun est que l'on puisse vérifier l'identité

$$ff_1+gg_1+hh_1=0,$$

par des valeurs autres que celles qui se présentent naturellement.

En d'autres termes, les formes φ

$$x_1^{r_1}x_2^{r_2}y_1^{s_1}y_2^{s_2}f, \quad x_1^{r'_1}x_2^{r'_2}y_1^{s'_1}y_2^{s'_2}g, \quad x_1^{r''_1}x_2^{r''_2}y_1^{s''_1}y_2^{s''_2}h,$$

où $r_1+r_2=p'+p''-1$, $s_1+s_2=q'+q''-1$, ..., et qui sont déjà liées par $pq+p'q'+p''q''$ relations linéaires connues, doivent être liées encore par une nouvelle relation linéaire.

Ces formes sont en nombre $\Sigma(p'+p'')(q'+q'')$ et contiennent chacune $(p+p'+p'')(q+q'+q'')$ termes : la différence entre le nombre précédent et celui-ci est précisément Σpq.

Prenons donc $(p+p'+p'')(q+q'+q'')$ des formes φ, et écrivons le déterminant de leurs coefficients, que nous pouvons, par un choix convenable des formes considérées, supposer non nul : soit R_1 ce déterminant, d'ordre $(p+p'+p'')(q+q'+q'')$.

Écrivons les relations connues entre les formes φ et soit R_2 le déterminant des coefficients des formes non choisies tout à l'heure dans ces relations, déterminant d'ordre Σpq.

Si $R_2=0$, les formes choisies primitivement sont évidemment liées par une relation linéaire, et par suite R_1 contient R_2 en facteur. Si $R_1=0$, sans que $R_2=0$, ces mêmes formes sont liées par une relation qui n'est pas une conséquence de celles que l'on connaît déjà. Le résultant se présente donc finalement sous la forme du quotient des deux déterminants R_1 et R_2; ce quotient est d'ailleurs des degrés voulus par rapport aux coefficients (a), (b), (c).

On remarquera que ce résultat n'a été établi qu'en admettant l'hypothèse signalée au n° 116; mais, d'après la définition du résultant, il subsiste dans tous les cas.

On observera encore que k étant une forme arbitraire des degrés $p+p'+p''-1$, $q+q'+q''-1$, on peut toujours vérifier l'identité

$$ff_1+gg_1+hh_1+kk_1=0,$$

k_1 étant une constante, et cela en dehors des relations connues entre les formes φ; alors on peut évidemment prendre pour k_1 le résultant de R.

119. Comme au n° 66, nous allons chercher à déterminer le nombre et les valeurs des couples communs à trois formes f, g, h, lorsque leur résultant R est nul.

Nous chercherons d'abord combien de couples communs à f, g appartiennent à h; si n, n', n'' désignent combien de fois un couple commun à f, g, h est multiple pour les systèmes (g, h), (h, f), (f, g), la plus petite valeur de ces trois nombres, soit m, indique combien de fois le couple considéré est commun à f, g, h. Les nombres $\Sigma n''$, Σm, où la sommation est étendue à tous les couples distincts communs à f, g, h, indiquent combien de couples communs à f et g appartiennent à h, et combien f, g, h ont de couples communs.

Pour déterminer les couples communs à f et g qui appartiennent à h, on fera comme au n° 66. On remplacera h par $h+\lambda k$, λ étant un paramètre arbitraire, et k une forme semblable à h. Si N'' couples communs à f, g appartiennent à h, on voit tout de suite que les dérivées partielles de l'ordre $N''-1$ de R par rapport aux (c) sont toutes nulles; en outre (d) désignant les coefficients de k, la polaire $D_{cd}^{N''}R$ n'est pas nulle identiquement et est le produit des valeurs de k obtenues en y remplaçant (x) et (y) par les valeurs des N'' couples considérés.

On en déduit la même remarque qu'au n° 66.

On peut en particulier prendre h sous la forme $(\xi\,|\,x)^{p''}(\eta\,|\,y)^{q''}$ par exemple, et obtenir des invariants simples pour résoudre la question proposée.

La détermination directe du nombre des racines communes à f, g, h offre de plus grandes difficultés : nous ne l'entreprendrons pas.

III. — Le discriminant d'une forme. Le jacobien de trois formes.

120. Le *discriminant* d'une forme $f = a_{x^p y^q}$ est une fonction entière des coefficients (a) qui, égalée à zéro, exprime que les quatre formes

$$f_1 = \frac{1}{p}\frac{\partial f}{\partial x_1},\qquad f_2 = \frac{1}{p}\frac{\partial f}{\partial x_2},\qquad f_3 = \frac{1}{q}\frac{\partial f}{\partial y_1},\qquad f_4 = \frac{1}{q}\frac{\partial f}{\partial y_2}$$

ont au moins un couple commun.

Cette définition est légitime, à cause de l'identité

$$f = x_1 f_1 + x_2 f_2 = y_1 f_3 + y_2 f_4.$$

Pour obtenir le discriminant S de f, on calculera d'abord le résultant S_1 des formes f_1, f_2 et f_3 par exemple; S_1 contient S en facteur, et en outre le discriminant de la forme binaire obtenue en faisant, dans f, $y_1 = 1$ et $y_2 = 0$. En supprimant ce facteur on obtient S, qui est une fonction entière des (a) du degré $6pq - 4p - 4q + 4$; c'est aussi un invariant multiple.

$S = 0$ est la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un couple (a), (b) tel que, les (x) étant égaux aux (a), f ait une racine double (b) en (y), et que les (y) étant égaux aux (b), f ait une racine double (a) en (x).

Pour la forme bilinéaire du n° 73, on a $S = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$; pour la forme linéoquadratique du n° 104, S est l'invariant R; pour la forme doublement quadratique du n° 106, S est le discriminant de l'équation canonisante, facile à calculer.

Le discriminant du produit de deux formes f et g s'annule identiquement, car les dérivées partielles de ces deux formes contiennent tout couple commun à f et à g.

On peut facilement prévoir un théorème analogue à celui du n° 71 pour déterminer le nombre et les valeurs des couples communs à f_1, f_2, f_3, f_4 : mais il ne semble pas facile de l'énoncer et de le démontrer d'une façon à la fois précise et générale.

121. Si l'on considère trois formes f, g, h, des degrés p et q, p' et q', p'' et q'', si l'on emploie les mêmes notations que ci-dessus,

et si l'on envisage les quatre déterminants

$$\varphi_1 = \begin{vmatrix} f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \\ f_4 & g_4 & h_4 \end{vmatrix}, \qquad \varphi_2 = \begin{vmatrix} f_3 & g_3 & h_3 \\ f_1 & g_1 & h_1 \\ f_4 & g_4 & h_4 \end{vmatrix},$$

$$\varphi_3 = \begin{vmatrix} f_4 & g_4 & h_4 \\ f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \end{vmatrix}, \qquad \varphi_4 = \begin{vmatrix} f_2 & g_2 & h_2 \\ f_1 & g_1 & h_1 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix},$$

il n'est pas difficile de voir que l'on a

$$\frac{\varphi_1}{x_1} = \frac{\varphi_2}{x_2} = -\frac{\varphi_3}{y_1} = -\frac{\varphi_4}{y_2};$$

si $J(f, g, h)$ désigne la valeur commune de ces quotients, on peut appeler $J(f, g, h)$ le *jacobien* des formes f, g, h; c'est un invariant qui est des degrés $p + p' + p'' - 2$, $q + q' + q'' - 2$ par rapport aux (x) et aux (y); il s'annule quand f, g, h ont un couple commun.

Nous nous bornerons à ces indications qui font suffisamment comprendre l'importance de l'étude directe des formes à deux séries de variables; et nous remarquerons que l'on pourrait, à l'aide de procédés analogues, envisager aussi avec avantage des formes à trois ou plusieurs séries de variables.



CHAPITRE X.

LA GÉOMÉTRIE MÉTRIQUE BINAIRE.

I. — Définitions. Étude du cas général.

122. Soit un espace E rempli par les éléments (x). Considérons une forme quadratique fixe

$$F = A_{x^2} = A_0 x_1^2 + 2 A_1 x_1 x_2 + A_2 x_2^2 = (x a^{(1)})(x a^{(2)});$$

nous dirons des deux éléments $(a^{(1)})$, $(a^{(2)})$, ainsi définis par cette forme, qu'ils constituent l'*absolu* de l'espace E.

Nous supposerons d'abord ces deux éléments distincts, et par suite le discriminant D de F, soit $D = A_0 A_2 - A_1^2$, sera différent de zéro.

123. Envisageons deux éléments quelconques (y) et (z); nous appellerons *distance* du premier de ces éléments, considéré comme *origine*, au second, considéré comme *extrémité*, le produit par une constante m du logarithme népérien du rapport anharmonique k déterminé par les éléments (y), (z), $(a^{(1)})$ et $(a^{(2)})$; si donc $\overline{yz}$ représente cette distance, on a

$$\overline{yz} = m \log(y z a^{(1)} a^{(2)})$$

ou

$$\overline{yz} = m \log k,$$

avec

$$\frac{1-k}{1+k} = \frac{(yz)\sqrt{-D}}{A_{yz}},$$

d'après des formules connues.

On voit que k a deux valeurs inverses l'une de l'autre, à cause de l'indétermination du radical $\sqrt{-D}$; par suite la distance $\overline{yz}$ est

définie seulement à un multiple de $2im\pi$ près (i désignant $\sqrt{-1}$), et au signe près.

Si (x) est quelconque, on a toujours

$$\pm\overline{yz}\pm\overline{zx}\pm\overline{xy}=0 \qquad (\text{mod } 2im\pi),$$

d'après la définition du rapport anharmonique et les propriétés des logarithmes. C'est cette égalité qui justifie le nom de *distance*.

Si (y) et (z) coïncident, et seulement alors, on a

$$\overline{yz}=0 \qquad (\text{mod } 2im\pi).$$

Si (y) et (z) coïncident avec $(a^{(1)})$ ou $(a^{(2)})$, $\overline{yz}$ est indéterminée.

La distance de (y) à l'un des éléments $(a^{(1)})$ ou $(a^{(2)})$ est infinie logarithmiquement.

124. e désignant la base des logarithmes népériens, on a

$$k=e^{\frac{\overline{yz}}{m}},$$

et par suite

$$\frac{(yz)\sqrt{-D}}{A_{yz}}=-i\tang\frac{\overline{yz}}{2im};$$

ceci permet d'écrire

$$\tang\frac{\overline{yz}}{2im}=\frac{(yz)\sqrt{D}}{A_{yz}},$$

et encore, à cause de l'identité

$$A_{y^2}A_{z^2}-A_{yz}^2=D(yz)^2,$$

$$\cos\frac{\overline{yz}}{2im}=\frac{A_{yz}}{\sqrt{A_{y^2}A_{z^2}}}, \qquad \sin\frac{\overline{yz}}{2im}=\frac{(yz)\sqrt{D}}{\sqrt{A_{y^2}A_{z^2}}};$$

dans ces formules, les radicaux $\sqrt{D}$ et $\sqrt{A_{y^2}A_{z^2}}$ ont des déterminations arbitraires.

On peut convenir de choisir toujours la même valeur pour $\sqrt{D}$; alors nous dirons que l'espace E est *orienté;* dans ce cas, $\overline{yz}$ est définie à un multiple de $2im\pi$ près, et l'on a

$$\overline{yz}+\overline{zx}+\overline{xy}=0 \qquad (\text{mod } 2im\pi);$$

ceci revient à supposer que les éléments $(a^{(1)})$ et $(a^{(2)})$ sont distingués l'un de l'autre.

On peut encore supposer que toutes les fois que l'on considère un même élément (y), le radical $\sqrt{A_{y^2}}$ a toujours le même signe : alors, écrivant

$$\cos\frac{\overline{yz}}{2im} = \frac{A_{yz}}{\sqrt{A_{y^2}}\sqrt{A_{z^2}}}, \qquad \sin\frac{\overline{yz}}{2im} = \frac{(yz)\sqrt{D}}{\sqrt{A_{y^2}}\sqrt{A_{z^2}}},$$

on voit que la distance $\overline{yz}$ est définie à un multiple de $4im\pi$ près, et l'on a

$$\overline{yz} + \overline{xz} + \overline{xy} \equiv 0 \pmod{4im\pi}.$$

On dit alors que l'élément (y) est *orienté*.

La distance de (y) à lui-même supposé orienté de façon opposée est $2im\pi$.

Deux éléments (y) et (z) sont *perpendiculaires* quand ils sont conjugués harmoniques par rapport à l'absolu. On a alors $A_{yz} = 0$ et $\overline{yz} \equiv im\pi \pmod{2im\pi}$, quelles que soient les orientations.

Remarquons que le rapport anharmonique $(yztu)$ peut s'écrire, d'après une formule précédente,

$$\frac{\sin\frac{\overline{yt}}{2im}\sin\frac{\overline{zu}}{2im}}{\sin\frac{\overline{yu}}{2im}\sin\frac{\overline{zt}}{2im}}.$$

125. Soient O_1 et O_2 les deux éléments fondamentaux, dont aucun n'appartient à l'absolu. On peut, sans altérer la généralité, faire $A_0 = A_2 = 1$, définir O_1 et O_2 par les coordonnées $(1, 0)$, $(0, 1)$, et orienter ces éléments en faisant les radicaux A_{y^2} correspondants égaux à 1. Si enfin on appelle θ la distance $\overline{O_1 O_2}$, on a

$$\cos\frac{\theta}{2im} = A_1, \qquad \sin\frac{\theta}{2im} = \sqrt{D};$$

par suite

$$F = x_1^2 + 2\cos\frac{\theta}{2im}x_1x_2 + x_2^2,$$

et, en outre, l'orientation de l'espace est déterminée par

$$\sqrt{D} = \sin\frac{\theta}{2im}.$$

On a alors

$$\cos\frac{\overline{yz}}{2im} = \frac{A_{yz}}{\sqrt{A_{y^2}}\sqrt{A_{z^2}}}, \qquad \sin\frac{\overline{yz}}{2im} = \frac{(yz)\sin\frac{\theta}{2im}}{\sqrt{A_{y^2}}\sqrt{A_{z^2}}}.$$

Si l'on suppose O_1 et O_2 perpendiculaires, avec $\theta = im\pi$, les formules se simplifient encore un peu : les coordonnées sont dites *orthogonales*.

Les formules canoniques que nous venons de développer donnent en particulier

$$\sin\frac{\overline{xO_1}}{2im} = \frac{-x_2\sin\frac{\theta}{2im}}{\sqrt{A_{x^2}}}, \qquad \sin\frac{\overline{xO_2}}{2im} = \frac{x_1\sin\frac{\theta}{2im}}{\sqrt{A_{x^2}}},$$

d'où une interprétation métrique immédiate du rapport $\frac{x_1}{x_2}$ des coordonnées.

Si les éléments fondamentaux étaient ceux qui sont définis par l'absolu, on pourrait prendre

$$F = 2ix_1x_2, \qquad \sqrt{D} = 1,$$

et l'on obtiendrait de nouvelles formules simples.

En faisant $m = \frac{1}{2i}$, considérant l'espace E comme rempli par les droites d'un faisceau plan, appelant *angle* la distance de deux de ces droites, et prenant comme absolu les droites isotropes de ce faisceau, la théorie que nous venons de développer coïncide manifestement avec la théorie des angles dans un faisceau : il est inutile d'insister sur ce point évident.

II. — Étude du cas spécial.

126. Supposons maintenant que les éléments $(a^{(1)})$ et $(a^{(2)})$ soient confondus de sorte que

$$F = A_x^2 = (A_1x_1 + A_2x_2)^2.$$

Considérons ce cas comme une limite du précédent; gardons par suite les formules du n° 123, et imaginons que D tende vers

zéro. On a

$$\overline{yz} = m \log \frac{A_{yz} - (yz)\sqrt{-D}}{A_{yz} + (yz)\sqrt{-D}};$$

si D est assez petit pour que $\frac{(yz)\sqrt{-D}}{A_{yz}}$ soit toujours de module inférieur à l'unité, et si l'on convient de considérer l'unique détermination du logarithme qui se réduit à 1 pour $(yz) = 0$, on a, en développant en série,

$$\overline{yz} = -2m \left[\frac{(yz)\sqrt{-D}}{A_{yz}} - \frac{1}{3}\left(\frac{(yz)\sqrt{-D}}{A_{yz}}\right)^3 + \ldots \right];$$

en même temps que D tend vers zéro, faisons augmenter m de façon que le produit $-2m\sqrt{-D}$ tende lui-même vers une certaine limite l; il vient alors, à la limite,

$$\overline{yz} = \frac{l(yz)}{A_{yz}},$$

et c'est là ce qu'on appelle distance $\overline{yz}$ dans le cas spécial envisagé.

Cette distance, comptée de (y) à (z), est définie sans ambiguïté: en remplaçant la forme générale A_{x^2} par ce qu'elle devient ici, soit A_x^2, on a

$$\overline{yz} = \frac{l(yz)}{A_y A_z},$$

et par suite les identités

$$\overline{yy} = 0, \qquad \overline{yz} + \overline{zx} + \overline{xy} = 0;$$

de plus la distance d'un élément quelconque à l'absolu est infinie, et réciproquement.

Le rapport anharmonique $(yztu)$ est égal à $\frac{\overline{yt}.\overline{zu}}{\overline{yu}.\overline{zt}}$.

127. Si les éléments fondamentaux sont O_1 et O_2, et si aucun d'eux ne coïncide avec l'absolu, on peut prendre $A_1 = A_2 = 1$; alors l est la distance O_1O_2; on a aussi

$$\overline{xO_1} = -\frac{lx_2}{x_1 + x_2}, \qquad \overline{xO_2} = \frac{lx_1}{x_1 + x_2},$$

d'où une interprétation métrique immédiate du rapport $\frac{x_1}{x_2}$.

Supposons actuellement que O_2 coïncide avec l'absolu; alors on peut prendre

$$A_x = x_1,$$

et l'on a

$$\overline{yz} = \frac{l(yz)}{y_1 z_1} = l\left(\frac{z_2}{z_1} - \frac{y_2}{y_1}\right),$$

et, en particulier,

$$\overline{O_1 x} = l\,\frac{x_2}{x_1}.$$

Cette théorie coïncide avec la géométrie métrique ordinaire des points en ligne droite. Il n'y a pas ici d'orientation possible.

III. — Les mouvements, les symétries et les similitudes.

128. La distance de deux éléments ne change pas quand on fait un changement de coordonnées, ou une transformation homographique quelconque, puisqu'elle ne dépend que d'un rapport anharmonique, à la condition toutefois que, dans le dernier cas, le nouvel absolu soit l'ancien transformé; de plus, dans le cas général, la constante m doit rester la même, et, dans le cas spécial, la constante l doit se changer en l', telle que l'on ait $l\delta = l'$ δ désignant le déterminant de la substitution que l'on a faite sur les (x).

Transformons maintenant les éléments de l'espace (E) par une homographie quelconque σ

$$x_1 = \lambda_1 x'_1 + \mu_1 x'_2,$$
$$x_2 = \lambda_2 x'_1 - \mu_2 x'_2.$$

les (x') étant rapportés aux mêmes coordonnées que les (x), et laissons l'absolu, $F = A_{x^2}$, invariable, ainsi que la constante m ou l. On peut alors rechercher les homographies (σ) qui sont telles que la distance $\overline{yz}$ de deux éléments quelconques soit égale à la distance $\overline{y'z'}$ des deux éléments correspondants, au degré près d'indétermination qui se présente toujours quand il s'agit de distances, dans le cas général; ou à un facteur constant près, dans le cas spécial.

129. Envisageons d'abord le cas général : la considération des éléments à distance infinie montre tout de suite qu'une condition nécessaire est que, si l'on applique la substitution σ à l'absolu, on retrouve l'absolu lui-même. Cette condition est d'ailleurs suffisante, si on laisse aux formules toute l'indétermination qu'elles comportent, comme on le voit immédiatement en partant de la définition même des distances.

Cherchons donc les substitutions σ qui, appliquées à F, sont telles que les formes F et F′ définissent les mêmes éléments. On a pour cela les conditions immédiates

$$\frac{A_{\lambda^2}}{A_0} = \frac{A_{\lambda\mu}}{A_1} = \frac{A_{\mu^2}}{A_2};$$

d'ailleurs on a l'identité

$$A_{\lambda^2} A_{\mu^2} - A_{\lambda\mu}^2 = D(\lambda\mu)^2;$$

la valeur commune des rapports précédents est donc $\pm(\lambda\mu)$.

Prenons d'abord la valeur $+(\lambda\mu)$; les équations

$$A_{\lambda^2} - A_0(\lambda\mu) = 0, \qquad A_{\lambda\mu} - A_1(\lambda\mu) = 0, \qquad A_{\mu^2} - A_2(\lambda\mu) = 0$$

donnent, en supposant que σ n'est pas la substitution identique et que $(\lambda\mu)$ n'est pas nul,

$$\frac{A_0}{-\lambda_2} = \frac{2A_1}{\lambda_1 - \mu_2} = \frac{A_2}{\mu_1};$$

par suite, les substitutions σ correspondantes peuvent s'écrire, en désignant par ω_1 et ω_2 deux paramètres,

$$x_1 = (\omega_1 + A_1\omega_2)x'_1 + A_2\omega_2 x'_2,$$
$$x_2 = -A_0\omega_2 x'_1 + (\omega_1 - A_1\omega_2)x'_2.$$

Prenons maintenant la valeur $-(\lambda\mu)$; on trouve de même

$$\lambda_1 + \mu_2 = 0 \qquad \text{et} \qquad -\mu_1 A_0 + 2A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2 = 0,$$

$$x_1 = \omega_2 A_0 A_2 x'_1 + A_2(\omega_1 - A_1\omega_2)x'_2,$$
$$x_2 = A_0(\omega_1 - A_1\omega_2)x'_1 - \omega_2 A_0 A_2 x'_2,$$

en supposant le produit $A_0 A_2$ non nul.

Nous trouvons ainsi deux séries distinctes de substitutions σ; mais en supposant $A_0 = A_2 = 1$, $A_1 = 0$, on voit tout de suite que celles de la première série changent en lui-même chacun des élé-

ments qui constituent l'absolu, tandis que celles de la seconde série intervertissent ces deux éléments.

Si donc on suppose l'espace E orienté, les substitutions de la première série donnent

$$\overline{y'z'} = \overline{yz} \qquad (\operatorname{mod} 2im\pi),$$

tandis que celles de la seconde donnent

$$\overline{y'z'} = -\overline{yz} \qquad (\operatorname{mod} 2im\pi).$$

Pour cette raison, nous appellerons les premières des *mouvements,* tandis que les secondes seront des *symétries.* On remarquera que l'on a, suivant le cas,

$$A_{x^2} = \pm(\lambda\mu) A_{x'^2};$$

et dans le premier cas, il vient

$$(\lambda\mu) = \omega_1^2 + D\omega_2^2;$$

dans le second

$$(\lambda\mu) = -A_0 A_2 (\omega_1^2 + D\omega_2^2).$$

Si l'on oriente les éléments (x) et (x'), on pourra convenir de choisir toujours la même détermination pour $\sqrt{\pm(\lambda\mu)}$, et de faire

$$\sqrt{A_{x^2}} = \sqrt{\pm(\lambda\mu)}\sqrt{A_{x'^2}};$$

alors, dans le cas d'un mouvement, on aura

$$\overline{y'z'} = \overline{yz} \qquad (\operatorname{mod} 4im\pi);$$

dans le cas d'une symétrie, on aura de même

$$\overline{y'z'} = -\overline{yz} \qquad (\operatorname{mod} 4im\pi).$$

130. Plaçons-nous maintenant dans le cas spécial. Si nous écrivons que la substitution σ transforme l'absolu en lui-même, ce qui, comme plus haut, est une condition nécessaire et suffisante, en faisant

$$F = A_x^2,$$

nous avons d'abord

$$\frac{A_\lambda}{A_1} = \frac{A_\mu}{A_2},$$

d'où

$$x_1 = \Lambda_2 \omega_1 x'_1 + \Lambda_2(\Lambda_2 \omega_3 - \omega_2) x'_2,$$
$$x_2 = \Lambda_1(\Lambda_1 \omega_3 - \omega_1) x'_1 + \Lambda_1 \omega_2 x'_2,$$

$\Lambda_1 \Lambda_2$ n'étant pas nul, avec

$$(\lambda\mu) = \Lambda_1 \Lambda_2 \omega_3 (\Lambda_1 \omega_2 + \Lambda_2 \omega_1 - \Lambda_1 \Lambda_2 \omega_3),$$

ω_1, ω_2, ω_3 étant trois paramètres arbitraires; la valeur commune des rapports $\frac{\Lambda\lambda}{\Lambda_1}$ et $\frac{\Lambda\mu}{\Lambda_2}$ est d'ailleurs $\Lambda_1 \Lambda_2 \omega_3$.

Dans ce cas on a

$$\overline{yz} = \frac{\Lambda_1 \omega_2 + \Lambda_2 \omega_1 - \Lambda_1 \Lambda_2 \omega_3}{\Lambda_1 \Lambda_2 \omega_3} \overline{y'z'},$$

et le rapport des distances yz et $y'z'$ est constant : la substitution σ est alors dite une *similitude*, caractérisée par le rapport constant $\frac{\overline{yz}}{\overline{y'z'}}$, dit *rapport de similitude*.

Ce rapport est facile à exprimer en fonction des invariants de l'homographie définie par σ.

La substitution σ est un mouvement ou une symétrie, si le rapport de similitude est égal à 1 ou à -1.

131. Dans le cas général, un mouvement est une homographie dont les éléments doubles sont les éléments de l'absolu : il en résulte que la distance de deux éléments correspondants (x) et (x') est constante et s'exprime à l'aide des invariants de cette homographie. On a aisément

$$\cos \frac{\overline{xx'}}{2\,im} = \frac{\omega_1}{\sqrt{(\lambda\mu)}}, \qquad \sin \frac{\overline{xx'}}{2\,im} = \frac{\omega_2 \sqrt{D}}{\sqrt{(\lambda\mu)}};$$

cette constante $\overline{xx'}$ est la grandeur du mouvement.

Quand $\omega_1 = 0$, l'homographie est une involution, et

$$\overline{xx'} = \pm\, im\pi;$$

chaque élément est changé en celui qui lui est perpendiculaire.

Une symétrie est une involution dont l'absolu est un couple particulier; si donc $(b^{(1)})$ et $(b^{(2)})$ en sont les éléments doubles, perpendiculaires entre eux, deux éléments correspondants (x) et

(x') sont conjugués harmoniques par rapport à $(b^{(1)})$ et $(b^{(2)})$; on a aussi, suivant les orientations, les formules

$$\overline{b^{(1)}x} + \overline{b^{(1)}x'} = 0 \qquad (\bmod 4im\pi),$$
$$\overline{b^{(2)}x} + \overline{b^{(2)}x'} = 2im\pi \qquad (\bmod 4im\pi);$$

$(b^{(1)})$ et $(b^{(2)})$ sont les *milieux* de la distance $\overline{xx'}$; ils sont fixes. Dans le cas spécial, une similitude est une homographie dont l'un des éléments doubles est l'absolu; si (b) est l'autre, distinct du premier tant qu'il n'y a pas mouvement, et si r est le rapport de similitude, on a

$$\overline{bx} = r\overline{bx'};$$

il y a involution dans le cas de la symétrie; alors (b) est le *milieu* fixe de toutes les distances $\overline{xx'}$.

Dans le cas du mouvement, les éléments doubles sont confondus avec l'absolu tous les deux. La distance $\overline{xx'}$ de deux éléments correspondants est constante : c'est la grandeur du mouvement.

132. Dans le cas général, les mouvements forment évidemment un groupe à deux paramètres; la grandeur du mouvement résultant est évidemment la somme des grandeurs des mouvements composants. De plus, on voit que deux symétries consécutives équivalent à un mouvement. Dans le cas spécial, les similitudes forment de même un groupe à trois paramètres; le rapport de similitude résultant est le produit des rapports de similitude composants; les mouvements forment un groupe à deux paramètres, comme dans le cas général; deux symétries consécutives équivalent à un mouvement, etc.

IV. — Les invariants métriques.

133. Dans le cas général, les mouvements forment un groupe; on peut donc, pour ce groupe, construire des invariants absolus d'un système binaire S quelconque. En gardant les notations déjà employées au Chapitre I, ces invariants seront distincts en nombre P — 2, en général, et seront les solutions des deux équa-

tions aux dérivées partielles

$$\Delta_{11}F + \Delta_{22}F = 0,$$

$$-A_0\Delta_{21}F + A_1(\Delta_{11}F - \Delta_{22}F) + A_2\Delta_{12}F = 0,$$

qui forment un système complet.

Ces invariants, dits invariants absolus *métriques* du système S, peuvent être choisis rationnels par rapport aux éléments de ce système; au point de vue géométrique, ils correspondent à l'existence de propriétés *métriques absolues* du système S, quand ils sont homogènes et de degré zéro par rapport aux diverses séries de variables et de coefficients qu'ils renferment, ainsi que par rapport aux coefficients (A) de l'absolu. Ils comprennent en particulier les invariants absolus ordinaires du système S.

Pour former les invariants absolus métriques de système S, considérons le système S_1 obtenu en adjoignant au système S l'absolu $F = A_x^2$. Les invariants absolus ordinaires de ce nouveau système S_1 sont distincts, en nombre $P - 1$ en général; ceux d'entre eux qui sont homogènes et de degré zéro par rapport aux coefficients (A) de l'absolu sont distincts, en nombre $P - 2$ en général, et forment évidemment un système fondamental d'invariants absolus métriques pour le système S.

La théorie des invariants absolus métriques est ainsi ramenée à celle des invariants absolus ordinaires, ainsi qu'il était facile de le prévoir.

134. On peut de même envisager des invariants non absolus qui se reproduisent à une fonction près des paramètres des substitutions qui caractérisent les mouvements.

Ils vérifieront les deux équations aux dérivées partielles

$$\Delta_{11}F + \Delta_{22}F = \mu F,$$

$$-A_0\Delta_{21}F + A_1(\Delta_{11}F - \Delta_{22}F) + A_2\Delta_{12}F = \nu F,$$

μ et ν étant des constantes quelconques; leur existence correspondra à celle de propriétés *métriques* accidentelles pour le système S.

Sans insister sur l'étude directe de ces invariants, leurs propriétés sont suffisamment mises en évidence si l'on remarque

qu'on peut les obtenir tous de la façon suivante : on formera d'abord les invariants ordinaires du système S_1 envisagé précédemment, invariants qui sont distincts en nombre $P - 1$, en général, si l'on fait abstraction du discriminant de l'absolu, et se reproduisent à des puissances près du déterminant $(\lambda\mu)$ de la substitution σ, si on les suppose homogènes par rapport aux (A) ; puis on leur adjoindra, par exemple, le premier membre de l'équation de l'un des éléments de l'absolu, soit

$$A_0 x_1 + x_2 (A_1 + \sqrt{-D}),$$

fonction qui se reproduit au facteur $-\frac{1}{\omega_1 - \omega_2\sqrt{-D}}$ près quand on fait la substitution σ.

Avec ces invariants, il est facile de former tous les invariants métriques du système S.

On remarquera que $\omega_1 - \omega_2\sqrt{-D}$ est l'un des facteurs de $(\lambda\mu)$ considéré comme forme quadratique en ω_1 et ω_2.

Dans le cas où le système S ne comprendrait pas de variables (x), il serait facile de remplacer l'invariant particulier que nous avons défini en dernier lieu par un autre analogue.

135. Supposons maintenant que l'on se trouve dans le cas spécial et qu'il s'agisse d'abord des similitudes.

On définira des invariants absolus, métriques, distincts en nombre $P - 3$, en général, vérifiant les équations d'un système complet

$$A_2 \Delta_{11} F - A_1 \Delta_{21} F = 0,$$
$$- A_2 \Delta_{12} F + A_1 \Delta_{22} F = 0,$$
$$A_2^2 \Delta_{12} F + A_1^2 \Delta_{21} F = 0 ;$$

on les formera comme précédemment en adjoignant au système S la forme A_x, et prenant les invariants absolus de ce nouveau système S_1 qui sont homogènes et de degré zéro par rapport aux (A).

Les invariants métriques non absolus vérifieront

$$A_2 \Delta_{11} F - A_1 \Delta_{21} F = \mu A_2,$$
$$- A_2 \Delta_{12} F + A_1 \Delta_{22} F = \mu A_1,$$
$$A_2^2 \Delta_{12} F + A_1^2 \Delta_{21} F = \nu A_2,$$

μ et ν étant deux constantes quelconques.

On les formera comme précédemment, en adjoignant A_x au système S_1. Ils se reproduisent à des puissances près de $(\lambda\mu)$ et du facteur $A_1 A_2 \omega_3$ de $(\lambda\mu)$.

136. Envisageons enfin les mouvements dans le cas spécial, il y a en général $P - 2$ invariants absolus métriques vérifiant les équations du système complet

$$A_2 \Delta_{11} F + \frac{A_2^2}{2A_1} \Delta_{12} F - \frac{A_1}{2} \Delta_{21} F = 0,$$

$$-\frac{A_2}{2} \Delta_{12} F - \frac{A_1^2}{2A_2} \Delta_{21} F + A_1 \Delta_{22} F = 0,$$

obtenues en remplaçant ω_3 par $\frac{\omega_1}{2A_1} + \frac{\omega_2}{2A_2}$.

On formera $P - 3$ invariants distincts comme au numéro précédent, et l'on pourra ensuite en former un dernier en remarquant qu'ici $(\lambda\mu) = \left(\frac{A_1\omega_2 + A_2\omega_1}{2}\right)^2$ et que $A_x = \frac{A_1\omega_2 - A_2\omega_1}{2} A_{x'}$; si donc F est un invariant ordinaire non absolu du système S qui soit d'ordre μ, il est clair que $FA_x^{2\mu}$ est un invariant métrique absolu.

Les invariants métriques non absolus vérifieront les équations

$$A_2 \Delta_{11} F + \frac{A_2^2}{2A_1} \Delta_{12} F - \frac{A_1}{2} \Delta_{21} F = \mu F,$$

$$-\frac{A_2}{2} \Delta_{12} F - \frac{A_1^2}{2A_2} \Delta_{21} F + A_1 \Delta_{22} F = \nu F,$$

μ et ν étant des constantes quelconques.

On en formera $P - 1$ comme au numéro précédent, qui se reproduisent à des puissances près de $(\lambda\mu)$, et on leur adjoindra $e^{\overline{O_1 x}}$, par exemple, puisque la distance $\overline{xx'}$ est constante.

On a

$$\overline{O_1 x'} - \overline{O_1 x} = \overline{xx'} = \frac{l(A_2\omega_1 - A_1\omega_2)}{A_1 A_2 (A_2\omega_1 - A_1\omega_2)}.$$

On aurait pu appliquer le même procédé dans le cas général ; mais il n'aurait rien donné de nouveau.

137. Pour préciser davantage ce que nous venons de dire, supposons que l'on ait dans le cas général $F = 2A_1 x_1 x_2$; alors, on peut en changeant les paramètres, écrire les mouvements sous la

forme

$$x_1 = \omega_1 x'_1,$$
$$x_2 = \omega_2 x'_2;$$

les invariants métriques sont définis par

$$\Delta_{11} F = \mu_1 F, \qquad \Delta_{22} F = \mu_2 F;$$

ils se reproduisent multipliés par $\omega_1^{\mu_1}\omega_2^{\mu_2}$, évidemment; supposés entiers, ils sont isobariques des poids μ_1 et μ_2, et réciproquement.

Pour les similitudes, dans le cas spécial, si $A_1 = 0$, on a

$$x_1 = \omega_1 x'_1 + \omega_3 x'_2,$$
$$x_2 = \qquad\qquad \omega_2 x'_2;$$

un invariant métrique vérifie les équations

$$\Delta_{11} F = \mu_1 F, \qquad \Delta_{12} F = 0, \qquad \Delta_{22} F = \mu_2 F,$$

et se reproduit multiplié par $\omega_1^{\mu_1}\omega_2^{\mu_2}$; supposé entier, c'est un semi-invariant, et réciproquement.

Enfin, pour les mouvements, avec $A_1 = 0$, toujours, on a

$$x_1 = \omega_1 x'_1 + \omega_2 x'_2,$$
$$x_2 = \qquad\qquad \omega_1 x'_2;$$

les invariants métriques sont définis par

$$\Delta_{11} F + \Delta_{22} F = \mu_1 F, \qquad \Delta_{12} F = \mu_2 F,$$

et se reproduisent multipliés par

$$\omega_1^{\mu_1} e^{\mu_2 \frac{\omega_2}{\omega_1}},$$

comme on le voit immédiatement en raisonnant comme au n° 23.

Pour ces formes canoniques, la grandeur du mouvement est donnée, dans le premier cas, par

$$\cos\frac{\overline{xx'}}{2im} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2\sqrt{\omega_1\omega_2}}, \qquad \sin\frac{\overline{xx'}}{2im} = i\,\frac{\omega_1 - \omega_2}{2\sqrt{\omega_1\omega_2}};$$

dans le second cas, le rapport de similitude est $\frac{\omega_1}{\omega_2}$; dans le troisième cas, la grandeur du mouvement est $\frac{l}{A_2^{\frac{1}{2}}}\,\frac{\omega_2}{\omega_1}$.



LIVRE II.

LA GÉOMÉTRIE TERNAIRE.

CHAPITRE I.

THÉORIE GÉNÉRALE DES INVARIANTS DES SYSTÈMES TERNAIRES.

I. — Les formes ternaires. Définitions et généralités.

138. Soient x_1, x_2, x_3 trois variables pouvant prendre toutes les valeurs possibles : en associant ensemble trois valeurs déterminées quelconques y_1, y_2, y_3 attribuées à ces trois variables, on peut définir un *élément géométrique* (y).

Si nous supposons que x_1, x_2, x_3 restent toujours finies et ne s'annulent pas en même temps; si, de plus, nous supposons que deux éléments (y) et (z) sont identiques lorsque les trois déterminants

$$(yz)_1 = y_2 z_3 - y_3 z_2, \qquad (yz)_2 = y_3 z_1 - y_1 z_3, \qquad (yz)_3 = y_1 z_2 - y_2 z_1,$$

que l'on peut tirer de la matrice (yz), c'est-à-dire

$$\begin{Vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{Vmatrix},$$

sont nuls, et seulement dans ce cas, nous aurons ainsi défini un ensemble *doublement infini* et continu d'éléments (x) : à chaque système de valeurs des rapports $\frac{x_2}{x_1}$, $\frac{x_3}{x_1}$ par exemple, correspond un élément (x) et un seul; et réciproquement. Nous dirons, par suite, que ces éléments (x) remplissent un *espace à deux dimensions,* E.

Les *coordonnées* de l'élément (x) sont ρy_1, ρy_2, ρy_3, ρ étant une quantité quelconque finie et non nulle. Les éléments particuliers O_1, O_2, O_3, qui correspondent respectivement aux hypothèses $x_2 = x_3 = 0$, $x_3 = x_1 = 0$, $x_1 = x_2 = 0$, sont les *éléments fondamentaux* ou *éléments de référence*.

139. Une forme linéaire par rapport aux variables (x), soit $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3$, ou pour abréger $(\xi | x)$, définit, quand on l'égale à zéro, une série simplement infinie d'éléments (x), dont les coordonnées vérifient l'équation $(\xi | x) = 0$.

Une telle série est définie par les rapports des quantités (ξ), qui se comportent à son égard absolument comme les coordonnées (x) à l'égard de l'élément (x). Ces séries sont des éléments géométriques nouveaux résultant des premiers et dont les (ξ) sont les coordonnées. Nous dirons de ces éléments (ξ) qu'ils sont de *seconde espèce* par opposition aux éléments (x), qui seront de *première espèce*. Ces deux sortes d'éléments remplissent le même espace E.

La symétrie de l'équation $(\xi | x) = 0$ montre que les (x) jouent le même rôle par rapport aux (ξ) que ceux-ci par rapport aux (x). $(\xi | x) = 0$ est l'*équation* de l'élément (ξ) donné, en ce sens qu'elle définit les éléments (x) variables qui constituent ce (ξ); c'est aussi bien l'*équation* de l'élément (x) donné, en ce sens qu'elle définit les éléments (ξ) variables dont l'ensemble constitue cet (x).

Nous dirons de deux éléments (x) et (ξ) vérifiant la condition $(\xi | x) = 0$ qu'ils se contiennent l'un l'autre, ou qu'ils appartiennent l'un à l'autre.

Comme précédemment, nous affecterons les lettres latines aux éléments de première espèce, les lettres grecques aux éléments de seconde espèce.

Sans aller plus loin, voici des exemples tirés de la Géométrie ordinaire auxquels on peut appliquer ce que nous venons de dire. Si l'espace E est un plan, on peut prendre pour éléments de première espèce les points ou les droites de ce plan; les éléments d'espèce opposée sont les droites ou les points de ce plan. Si l'espace E est un point, on peut prendre pour élément de première espèce les plans ou les droites qui passent par ce point; les

éléments d'espèce opposée sont les droites ou les plans de ce point. On peut encore considérer les (x) comme définissant les coniques d'un réseau; alors aux (ξ) correspondent les faisceaux contenus dans ce réseau, etc.

140. Un élément (ξ) est défini par deux éléments (y) et (z) distincts. Si (x) est un élément de (ξ), on a

$$(xyz) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0,$$

ou ce qui revient au même

$$\frac{\xi_1}{(yz)_1} = \frac{\xi_2}{(yz)_2} = \frac{\xi_3}{(yz)_3}.$$

L'équation de (ξ) étant $(xyz) = 0$, on peut écrire

$$x_1 = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 z_1,$$
$$x_2 = \lambda_1 y_2 + \lambda_2 z_2,$$
$$x_3 = \lambda_1 y_3 + \lambda_2 z_3,$$

ou, pour abréger, $(x = \lambda_1 y + \lambda_2 z)$; réciproquement, un tel élément (x) appartient à l'élément (ξ) défini par (y) et (z), et qui peut se représenter par (yz).

On peut par suite considérer (ξ) comme un espace à une dimension, rempli par des éléments géométriques (x) dont les coordonnées sont les (λ); les éléments fondamentaux y sont (y) et (z).

Tout ce que nous venons de dire peut être répété sans peine en échangeant les éléments des deux espèces : il est inutile de le faire explicitement. C'est là d'ailleurs une remarque faite une fois pour toutes, et qui s'appliquera à tout ce qui suit.

Les éléments fondamentaux de seconde espèce $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ correspondent respectivement aux hypothèses $\xi_2 = \xi_3 = 0$, $\xi_3 = \xi_1 = 0$, $\xi_1 = \xi_2 = 0$. D'après ce qui précède, on voit que Ω_1 et $(O_2 O_3)$ sont un seul et même élément; il en est de même de O_1 et $(\Omega_2 \Omega_3)$.

L'ensemble $O_1 O_2 O_3$ est une *suite* de trois éléments ou *suite triple* de première espèce; l'ensemble $\Omega_1 \Omega_2 \Omega_3$ est une suite triple de deuxième espèce : ces deux suites sont *équivalentes*.

En général, si l'on se donne une suite de première espèce O_1, O_2, O_3, ..., O_n, composée de n éléments, pris dans l'ordre indiqué, on en déduit une suite équivalente de seconde espèce, composée des éléments $(O_1 O_2)$, $(O_2 O_3)$, $(O_3 O_4)$, ..., $(O_{n-1} O_n)$, $(O_n O_1)$.

141. Une *forme ternaire* se définit comme au n° 4; on écrira, en gardant les mêmes notations

$$f = a_{x^p y^q \ldots \xi^\pi \eta^\rho \ldots}$$
$$= \sum \frac{P_p \ldots P_\pi \ldots}{P_{p_1} P_{p_2} P_{p_3} \ldots P_{\pi_1} P_{\pi_2} P_{\pi_3} \ldots} a_{p_1, p_2, p_3; q_1, q_2, q_3; \ldots \pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots} x_1^{p_1} x_2^{p_2} x_3^{p_3} y_1^{q_1} y_2^{q_2} y_3^{q_3} \ldots \xi_1^{\pi_1} \xi_2^{\pi_2} \xi_3^{\pi_3} \ldots$$

p_1, p_2, p_3, par exemple, sont trois entiers non négatifs dont la somme est p.

Nous pouvons répéter ici, presque mot pour mot, ce que nous avons dit au Livre I après avoir défini les formes binaires : les changements à faire sont pour ainsi dire évidents. Nous nous contenterons donc d'insister sur quelques points particuliers.

Si une forme f ne contient qu'une seule série de variables, l'équation $f = 0$ définit un ensemble simplement infini d'éléments (x) ou (ξ) suivant le cas, dont nous dirons qu'ils forment une *série* de première ou de seconde espèce.

Si f est de degré p par rapport aux variables, la série correspondante est dite de degré p : son équation contient $\frac{(p+1)(p+2)}{2}$ coefficients, et par suite elle est déterminée au point de vue géométrique par la condition de contenir $\frac{(p+1)(p+2)}{2} - 1$ éléments donnés d'une façon quelconque.

Une série linéaire de première ou de seconde espèce est un élément de seconde ou de première espèce.

Les définitions relatives au *poids* subsistent entièrement, mais il faut distinguer un poids par rapport à chacun des trois indices 1, 2, 3.

142. Une forme f telle que a_{x^p} ne peut pas se mettre en général sous la forme d'un produit de facteurs linéaires.

Dans certains cas, cependant, cette décomposition est possible, de sorte que l'on peut écrire

$$f = \Pi(\alpha^{(i)} \mid x);$$

alors on a des relations telles que

$$\Sigma \alpha_1^{(1)}\alpha_1^{(2)}\dots\alpha_1^{(p_1)}\alpha_2^{(p_1+1)}\dots\alpha_2^{(p_1+p_2)}\alpha_3^{(p_1+p_2+1)}\dots\alpha_3^{(p)} = \frac{P_p}{P_{p_1}P_{p_2}P_{p_3}}\, a_{p_1,p_2,p_3}.$$

Les premiers membres de ces relations sont les fonctions symétriques fondamentales des coordonnées des p éléments de seconde espèce $(\alpha^{(i)})$ dont l'ensemble est défini par l'équation $f = 0$. Toute fonction symétrique de ces coordonnées, entière et homogène de même degré m par rapport aux divers systèmes $(\alpha^{(i)})$, peut s'exprimer en fonction entière des (a) ou, ce qui revient au même, des fonctions symétriques fondamentales. Comme au n° 8, il suffit de le montrer pour les fonctions de la forme

$$\Sigma(\alpha_2^{(1)})^{m_2}(\alpha_3^{(1)})^{m_3}(\alpha_1^{(2)})^{m}(\alpha_1^{(3)})^{m}\dots(\alpha_1^{(p)})^{m},$$

où l'on a $m_2 + m_3 = m$.

Si alors, dans f, nous faisons $x_3 = \lambda x_2$, on obtient une forme binaire égale au produit $\Pi[\alpha_1^{(i)}x_1 + (\alpha_2^{(i)} + \lambda\alpha_3^{(i)})x_2]$.

Si pour cette forme on calcule la fonction symétrique

$$\Sigma(\alpha_2^{(1)} + \lambda\alpha_3^{(1)})^{m}(\alpha_1^{(2)})^{m}\dots(\alpha_1^{(p)})^{m},$$

le coefficient de $\dfrac{P_m}{P_{m_2}P_{m_3}}\lambda^{m_3}$ dans cette expression sera évidemment la valeur de la fonction considérée.

En général, une fonction symétrique du degré m par rapport à chaque système $(\alpha^{(i)})$ sera du degré m par rapport aux coefficients (a); elle sera de plus isobarique par rapport à chaque indice, et de poids facile à calculer.

143. La considération des polaires conduit en particulier à définir, pour une forme $f = a_{x^p}$ et un élément donné (y), une série dont l'équation est $a_{x^{p-h}y^h} = 0$, et qui est dite la $h^{\text{ième}}$ polaire de (y); elle est de degré $p - h$. Si (x) appartient à la $h^{\text{ième}}$ polaire de (y), inversement (y) appartient à la $(p-h)^{\text{ième}}$ polaire de (x).

La $(p-1)^{\text{ième}}$ polaire de (y) est une série linéaire.

II. — Les substitutions linéaires et les invariants.

144. Transformons un système ternaire S, comme nous avons transformé au n° 11 un système binaire, par une substitution

linéaire σ, de façon à introduire de nouvelles variables (x'), ... définies par

$$x_1 = \lambda_{11} x'_1 + \lambda_{12} x'_2 + \lambda_{13} x'_3,$$
$$x_2 = \lambda_{21} x'_1 + \lambda_{22} x'_2 + \lambda_{23} x'_3,$$
$$x_3 = \lambda_{31} x'_1 + \lambda_{32} x'_2 + \lambda_{33} x'_3;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Le déterminant δ de cette substitution est supposé essentiellement différent de zéro, de façon que l'on puisse écrire inversement, en appelant μ_{ij} le coefficient de λ_{ij} dans le déterminant δ :

$$\delta x'_1 = \mu_{11} x_1 + \mu_{21} x_2 + \mu_{31} x_3,$$
$$\delta x'_2 = \mu_{12} x_1 + \mu_{22} x_2 + \mu_{32} x_3,$$
$$\delta x'_3 = \mu_{13} x_1 + \mu_{23} x_2 + \mu_{33} x_3.$$

Une forme linéaire $(\xi \mid x)$ devient par cette substitution $(\xi' \mid x')$, et, supposant ces deux formes identiques, on a pour définir les (ξ')

$$\xi'_1 = \lambda_{11} \xi_1 + \lambda_{21} \xi_2 + \lambda_{31} \xi_3,$$
$$\xi'_2 = \lambda_{12} \xi_1 + \lambda_{22} \xi_2 + \lambda_{32} \xi_3,$$
$$\xi'_3 = \lambda_{13} \xi_1 + \lambda_{23} \xi_2 + \lambda_{33} \xi_3,$$

ou inversement

$$\delta \xi_1 = \mu_{11} \xi'_1 + \mu_{12} \xi'_2 + \mu_{13} \xi'_3,$$
$$\delta \xi_2 = \mu_{21} \xi'_1 + \mu_{22} \xi'_2 + \mu_{23} \xi'_3,$$
$$\delta \xi_3 = \mu_{31} \xi'_1 + \mu_{32} \xi'_2 + \mu_{33} \xi'_3.$$

Les variables de seconde espèce sont donc transformées par la substitution *transposée* de celle faite sur les (x); le déterminant de cette substitution est $\frac{1}{\delta}$.

Les généralités indiquées à propos de la transformation des systèmes binaires subsistent ici entièrement, à quelques modifications évidentes près.

Les P relations qui existent entre les éléments du système S et les éléments du système transformé S' sont toujours faciles à former : ces relations dépendent d'ailleurs des neuf coefficients (λ) de la substitution σ; elles appellent les mêmes remarques qu'au n° 12. On voit de même que l'ensemble des transformations σ forme un *groupe à neuf paramètres, fini et continu* : deux substitutions σ successives se composent d'ailleurs comme dans le domaine binaire.

Les substitutions σ peuvent être interprétées, au point de vue géométrique, exactement comme au n° 13 : elles définissent soit des changements de coordonnées, soit des *homographies* entre des espaces distincts ou coïncidants. Au point de vue géométrique, une substitution σ ne dépend d'ailleurs que de huit paramètres, de sorte qu'une homographie par exemple est déterminée par la connaissance de quatre couples d'éléments correspondants.

145. Il existe pour le système S et les transformations σ des invariants absolus que l'on peut choisir indépendants en nombre $P - p$, p étant un nombre en général égal à 9, mais qui peut être inférieur à 9 et qui est déterminé par la considération des déterminants tirés d'une matrice analogue à la matrice M du n° 17.

Ces invariants absolus peuvent être choisis rationnels par rapport aux P éléments du système S, ce que nous ferons toujours. Les invariants absolus géométriques se définissent et s'interprètent comme au n° 19.

Le groupe des transformations σ contient neuf groupes particuliers à un seul paramètre, définis par les substitutions des deux types suivants :

$$(\sigma_{11})\quad \begin{cases} x_1 = x'_1 e^{\omega_{11}}, \\ x_2 = x'_2, \\ x_3 = x'_3, \end{cases} \qquad (\sigma_{12})\quad \begin{cases} x_1 = x'_1 + \omega_{12} x'_2, \\ x_2 = x'_2, \\ x_3 = x'_3 ; \end{cases}$$

ces groupes sont engendrés par les substitutions infinitésimales du groupe total, et engendrent eux-mêmes ce groupe.

On en déduit que les invariants absolus du système S sont les solutions du système des neuf équations aux dérivées partielles linéaires et homogènes $\Delta_{ij} F = 0$, où l'on trouve facilement

$$\Delta_{11} F(e) = - x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} - \ldots + \xi_1 \frac{\partial F}{\partial \xi_1} + \ldots$$
$$+ (p_1 + q_1 + \ldots - \pi_1 - \rho_1 - \ldots) a_{p_1, p_2, p_3; \ldots; \pi_1, \pi_2, \pi_3; \ldots} \frac{\partial F}{\partial a_{p_1, p_2, p_3; \ldots; \pi_1, \pi_2, \pi_3; \ldots}} + \ldots,$$

$$\Delta_{12} F(e) = - x_2 \frac{\partial F}{\partial x_1} - \ldots + \xi_1 \frac{\partial F}{\partial \xi_2} + \ldots$$
$$+ \frac{\partial F}{\partial a_{p_1, p_2, p_3; \ldots; \pi_1, \pi_2, \pi_3; \ldots}} [p_2 a_{p_1+1, p_2-1, p_3; \ldots; \pi_1, \pi_2, \pi_3; \ldots} + \ldots$$
$$- \pi_1 a_{p_1, p_2, p_3; \ldots; \pi_1-1, \pi_2+1, \pi_3; \ldots} - \ldots] + \ldots.$$

Ces neuf équations se réduisent à p distinctes, formant un sys-

tème complet; on vérifie aisément les identités des types suivants, où les indices i, j, k désignent des nombres différents

$$\begin{aligned}
&\Delta_{ii}\Delta_{jj}F - \Delta_{jj}\Delta_{ii}F = 0,\\
&\Delta_{ii}\Delta_{ij}F - \Delta_{ij}\Delta_{ii}F = \Delta_{ij}F,\\
&\Delta_{ii}\Delta_{ji}F - \Delta_{ji}\Delta_{ii}F = -\Delta_{ji}F,\\
&\Delta_{ii}\Delta_{jk}F - \Delta_{jk}\Delta_{ii}F = 0,\\
&\Delta_{ij}\Delta_{ji}F - \Delta_{ji}\Delta_{ij}F = \Delta_{ii}F - \Delta_{jj}F,\\
&\Delta_{ij}\Delta_{ik}F - \Delta_{ik}\Delta_{ij}F = 0,\\
&\Delta_{ji}\Delta_{ki}F - \Delta_{ki}\Delta_{ji}F = 0,\\
&\Delta_{ij}\Delta_{ki}F - \Delta_{ki}\Delta_{ij}F = -\Delta_{kj}F.
\end{aligned}$$

146. Le système S admet aussi des invariants proprement dits, qui se reproduisent à une fonction près des seuls coefficients (λ). Ils vérifient les équations

$$\Delta_{ii}F = \mu F, \qquad \Delta_{ij}F = 0,$$

et se reproduisent à δ^μ près.

On peut former un système fondamental d'invariants entiers, par rapport aux éléments du système S; ils sont en nombre $P - p + 1$, sauf exception évidente.

Un invariant non absolu peut toujours être supposé entier et homogène des degrés k, l, ..., $\varkappa$, λ, ..., n, n', ..., par rapport aux diverses séries de variables (x), (y), ..., (ξ), (η), ..., et de coefficients (a), (b), ... qui constituent le système S. Si ces coefficients sont ceux des formes $f = a_{x^p y^q \ldots \xi^\pi \eta^\rho \ldots}$, $g = b_{x^{p'} y^{q'} \ldots \xi^{\pi'} \eta^{\rho'} \ldots}$, ..., et, si μ est l'ordre de l'invariant considéré, on a la relation

$$\begin{aligned}
3\mu = {} & (p + q + \ldots - \pi - \rho \ldots)n\\
& + (p' + q' + \ldots - \pi' - \rho' - \ldots)n' + \ldots - k - l - \ldots + \varkappa + \lambda + \ldots.
\end{aligned}$$

Les invariants non absolus peuvent être pris pour les invariants absolus du groupe particulier formé par les substitutions σ dont le déterminant est égal à 1.

Un invariant entier est isobarique et de poids μ par rapport à chaque indice; il est droit ou gauche suivant que μ est pair ou impair; si l'on permute deux indices, il se multiplie par $(-1)^\mu$.

Le théorème de Gordan relatif à l'existence des systèmes complets d'invariants subsiste dans le domaine ternaire.

Les invariants s'interprètent au point de vue géométrique comme au n° 30.

Les théorèmes généraux des nos 31 et 32 subsistent sans modification.

147. Si l'on considère un invariant d'ordre μ du système S, $F = A_{x^k y^l \ldots \xi^\varkappa \eta^\lambda \ldots}$, ses coefficients vérifient, comme au n° 33, d'importantes relations faciles à former. Regardons-le comme ne dépendant que des trois séries de variables (x), (y), (z), et soit

$$F = A_{x^k y^l z^m};$$

le coefficient $A_{k,0,0,0,l,0;0,0,m}$, des poids respectifs $\mu + k$, $\mu + l$, $\mu + m$, par rapport aux indices 1, 2, 3 est la *source* de l'invariant F; car l'application des opérations Δ_{ij} à ce coefficient permet aisément d'en tirer tous les autres.

Si deux tels invariants ont même source A, des poids respectifs P_1, P_2, P_3, ils coïncident s'ils sont des mêmes degrés; sinon, ils ne diffèrent que par une puissance de l'invariant évident (xyz), car on a simplement

$$\mu + k = P_1, \qquad \mu + l = P_2, \qquad \mu + m = P_3.$$

Soit A une fonction entière quelconque, isobarique des poids respectifs P_1, P_2, P_3, dépendant des éléments du système S autres que les (x), les (y) et les (z). Si on lui applique les opérations Δ_{13} et Δ_{23} plusieurs fois de suite dans un ordre quelconque, on finit nécessairement par tomber sur des résultats nuls; si m est le plus petit nombre tel que les quantités $\Delta_{13}^p \Delta_{23}^q A$, où $p + q = m + 1$, soient toutes nulles simultanément, A est la source d'un invariant dont l'ordre et les degrés sont déterminés par les relations précédemment écrites, m recevant la valeur que l'on vient de trouver, et cet invariant n'est pas divisible par (xyz).

On calculera d'abord les coefficients $A_{k,0,0;0,l,0;m_1,m_2,m_3}$ par l'application des opérations Δ_{13} et Δ_{23}. On pourra ainsi former le coefficient de $x_1^k y_2^l$ dans l'invariant cherché; ce sera une fonction isobarique des poids $\mu + k$, $\mu + l$ et μ, qui vérifiera évidemment les équations $\Delta_{13} F = 0$, $\Delta_{23} F = 0$, ces opérations s'appliquant aussi aux (z); on en déduit sans peine que l'on a $k \geqq 0$, $l \geqq 0$, comme au n° 34.

Cette fonction peut être considérée comme la source de l'invariant cherché, quand on le regarde comme ne dépendant que des (x) et des (y); elle permet d'y calculer le coefficient de x_1^k, qui sera une fonction isobarique des poids $\mu + k$, μ et μ, et qui vérifiera les équations $\Delta_{13} F = 0$, $\Delta_{23} F = 0$, $\Delta_{12} F = 0$, $\Delta_{32} F = 0$, les opérations s'appliquant aux (y) et aux (z); le calcul est possible comme au n° 34.

Enfin ce coefficient peut être considéré comme la source de l'invariant cherché, regardé comme fonction des (x) seuls; et le calcul est possible.

Nous n'insisterons pas davantage sur les nombreuses propositions particulières que l'on peut tirer de ce qui précède. Nous remarquerons seulement qu'on pourrait étendre facilement ce que nous venons de dire au cas où l'on considérerait des invariants F de la forme $A_{\mu\xi\alpha}$; il suffit en effet de remplacer les (ξ) par les déterminants de la matrice (yz) pour être ramené au cas précédent.

La source $A_{k,0,0;\alpha,0,0}$ d'un tel invariant vérifie les équations $\Delta_{23} F = 0$, $\Delta_{32} F = 0$, et l'on a $P_2 = P_3$; la réciproque est vraie.

148. Si l'on considère une fonction entière G des éléments du système S, isobarique des poids P_1, P_2, P_3, l'opération Δ_{ij} appliquée successivement à cette fonction conduit toujours à un résultat nul; on en déduit, comme nous l'avons déjà dit, que si l'on a $\Delta_{ij} G = 0$, on a $P_i \geqq P_j$, comme au n° 34; en particulier si $P_i = P_j$, on a aussi $\Delta_{ji} G = 0$.

Si l'on a à la fois $\Delta_{12} G = 0$, $\Delta_{23} G = 0$, on en tire, à cause des identités qui existent entre les opérations Δ_{ij}, $\Delta_{13} G = 0$.

Les fonctions G qui vérifient les deux équations $\Delta_{12} G = 0$, $\Delta_{23} G = 0$ sont dites *semi-invariantes;* ce sont des invariants pour les substitutions définies par $\lambda_{21} = \lambda_{31} = \lambda_{32} = 0$: elles se reproduisent multipliées par $\lambda_{11}^{P_1} \lambda_{22}^{P_2} \lambda_{33}^{P_3}$. Si l'on a $P_1 = P_2 = P_3$, G est un invariant proprement dit du système S, d'après les remarques faites plus haut.

149. Enfin nous remarquerons que les notions relatives aux systèmes invariants, aux invariants multiples et en particulier aux combinants, s'étendent sans modification aux systèmes ternaires.

III. — Les formations invariantes générales.

150. Comme dans le domaine binaire, les polaires sont des invariants. De même, ce que nous avons dit alors des invariants comme combinaisons de systèmes invariants subsiste et les principaux systèmes invariants s'obtiennent sans peine.

Si l'on se donne deux formes $f = a_{x^p}$, $\psi = \beta_{\xi^\pi}$ d'espèce différente, on en déduit, comme au n° 43, l'invariant

$$K^h(f, \psi) = \frac{P_{p-h}}{P_p} \frac{P_{\pi-h}}{P_\pi} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_2} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_3} \right)^h,$$

la puissance qui figure au second membre étant symbolique.

De même les trois formes de même espèce f, g, k, des degrés p, p', p'', donnent lieu à l'invariant

$$J^h(f, g, k) = \frac{P_{p-h}}{P_p} \frac{P_{p'-h}}{P_{p'}} \frac{P_{p''-h}}{P_{p''}} \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} \\ \frac{\partial k}{\partial x_1} & \frac{\partial k}{\partial x_2} & \frac{\partial k}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial g}{\partial x_3} \end{vmatrix}^h,$$

la puissance qui figure au second membre étant symbolique.

De même encore si f dépendait des (x), des (y) et des (z), on aurait l'invariant

$$\Omega(f) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial y_2 \partial z_3} + \frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial y_3 \partial z_1} + \frac{\partial^3 f}{\partial x_3 \partial y_1 \partial z_2} - \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial y_3 \partial z_2} - \frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial y_1 \partial z_3} - \frac{\partial^3 f}{\partial x_3 \partial z_2 \partial y_1}.$$

De même aussi les invariants K et J se généralisent et s'appliquent encore au cas où les formes contiennent plusieurs groupes de variables.

151. L'invariant J (f, g, h), où l'on supprime l'indice 1, est le *jacobien* des formes f, g, h; si l'on pose $f_1 = \frac{1}{p} \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots$, comme au n° 46, on a

$$J(f, g, h) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{vmatrix}.$$

C'est aussi le déterminant fonctionnel de formes f, g, h ; il est nul identiquement dès qu'il existe une relation entre ces formes, et réciproquement.

Si f, g, h sont des mêmes degrés, leur jacobien est évidemment un combinant.

Si les formes f, g, h admettent en commun l'élément (x), leur jacobien admet aussi cet élément ; si de plus les degrés de f, g, h sont égaux, les dérivées partielles du jacobien admettent elles-mêmes cet élément.

La condition $J(f, g, h) = 0$ exprime que les $(p-1)^{\text{ièmes}}$ polaires de (x) par rapport aux séries f, g, h ont un élément commun.

On a aussi, en particulier,

$$J^2(f, f, f) = 6 \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{12} & f_{22} & f_{23} \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant est le *hessien* de f. Nous le rencontrerons plus loin.

152. On exprimera comme au n° 50 que n formes quelconques semblables renfermant chacune n coefficients sont liées par une relation linéaire à coefficients constants.

Si le nombre des formes données est inférieur au nombre des coefficients, on peut écrire que ces formes sont liées par une relation linéaire, en écrivant qu'il en est ainsi de l'ensemble des formes données et d'autant de formes semblables arbitraires qu'il y a d'unités dans la différence entre le nombre des coefficients et le nombre des formes données.

Mais on ne peut plus, en général, comme dans la géométrie binaire, remplacer cette condition par une autre plus simple, en introduisant une seule forme auxiliaire, et cela pour plusieurs raisons.

En effet, si nous supposons données q formes semblables à une seule série de variables, $f_1, f_2, \ldots, f_q$, de degré p, dépendant par suite chacune de $\frac{(p+1)(p+2)}{2}$ coefficients, et si g est une forme arbitraire de degré $p-r$, de sorte qu'il existe $\frac{(r+1)(r+2)}{2}$

formes telles que $x_1^{r_1}x_2^{r_2}x_3^{r_3}g$, la somme $r_1+r_2+r_3$ étant égale à r, on ne pourra pas en général déterminer le nombre r de façon à avoir

$$q+\frac{(r+1)(r+2)}{2}=\frac{(p+1)(p+2)}{2}.$$

De plus, si cette détermination est possible, on obtient bien un invariant qui est nul lorsque les formes données sont liées par une relation linéaire; mais la réciproque n'est pas toujours vraie. Considérons, par exemple, le cas de $p=2$, $q=3$; on peut alors prendre $r=1$; mais, si l'on a la relation

$$\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+\lambda_3 f_3+(\lambda_4 x_1+\lambda_5 x_2+\lambda_6 x_3)g=0,$$

g étant une forme linéaire quelconque, on ne peut en déduire que f_1, f_2, f_3 sont liées par une relation linéaire : cette identité est en effet vérifiée si f_1, f_2, f_3 ont un facteur linéaire commun.

Si q est de la forme $\frac{(h+1)(h+2)}{2}$, et si les formes f_i sont liées par une relation linéaire, le déterminant de leurs dérivées partielles semblables d'ordre h est un invariant nul; mais, comme précédemment, la réciproque n'est pas toujours vraie. Toutefois, les invariants obtenus de l'une ou l'autre de ces façons sont intéressants dans bien des cas. Considérons par exemple les dérivées partielles d'ordre h, h étant au plus égal à $\frac{p}{2}$, de la forme f; elles sont en nombre $\frac{(h+1)(h+2)}{2}$ et de degré $p-h$, de sorte qu'elles contiennent chacune $\frac{(p-h+1)(p-h+2)}{2}$ coefficients. En leur appliquant ce qui a été dit en dernier lieu, on obtient un invariant analogue au déterminant Δ' du n° 51. Si $h=\frac{p}{2}$, on a de plus

$$\frac{(p-h+1)(p-h+2)}{2}-\frac{(h+1)(h+2)}{2}=0,$$

et, en appliquant ce qui a été dit d'abord, on obtient un invariant proprement dit dont l'évanouissement exprime la dépendance linéaire des dérivées partielles d'ordre $\frac{p}{2}$ d'une forme de degré pair p. Si enfin l'on applique ce résultat particulier à la polaire

d'ordre $2h$ de f par rapport aux (x) remplacés par les (y), considérée comme fonction des (y), on retrouve l'invariant analogue au déterminant Δ' du n° 51.

153. Si, enfin, il faut exprimer que q formes données sont liées par r relations linéaires distinctes, on pourra procéder comme au n° 52, et obtenir des invariants multiples se rapportant en général à une forme à deux séries de variables, les unes ternaires, les autres binaires, et à des formes auxiliaires; dans certains cas particuliers, ces invariants pourront aussi se rapporter à une forme à deux séries de variables ternaires, et aux formes auxiliaires. C'est ainsi que trois formes quadratiques

$$f_1 = a_{x^2} = a_{11}x_1^2 + \ldots + 2a_{23}x_2x_3 + \ldots,$$
$$f_2 = b_{x^2} = b_{11}x_1^2 + \ldots + 2b_{23}x_2x_3 + \ldots,$$
$$f_3 = c_{x^2} = c_{11}x_1^2 + \ldots + 2c_{23}x_2x_3 + \ldots$$

seront liées par deux relations linéaires si l'on a, en introduisant les formes auxiliaires d_{x^2}, e_{x^2}, g_{x^2}, h_{x^2}, et les variables binaires λ_1, λ_2 de seconde espèce,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} & a_{33} & a_{23} & a_{31} & a_{12} & \lambda_1^2 \\ b_{11} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 2\lambda_1\lambda_2 \\ c_{11} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \lambda_2^2 \\ d_{11} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ e_{11} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ g_{11} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ h_{11} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

et ce déterminant est un invariant multiple pour les formes auxiliaires, les (λ) et la forme composée

$$l_1^2 f_1 + l_1 l_2 f_2 + l_2^2 f_3,$$

les (l) étant des variables binaires de première espèce.

On peut aussi introduire des variables ternaires (y) et (η) et

écrire

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{12} & \eta_1 \\ b_{11} & \cdots & \cdots & \eta_2 \\ c_{11} & \cdots & \cdots & \eta_3 \\ d_{11} & \cdots & \cdots & 0 \\ e_{11} & \cdots & \cdots & 0 \\ g_{11} & \cdots & \cdots & 0 \\ h_{11} & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

et ce déterminant est un invariant multiple pour les formes auxiliaires, les (η_i) et la forme composée

$$y_1 f_1 + y_2 f_2 + y_3 f_3 = 0.$$

CHAPITRE II.

LES SYSTÈMES LINÉAIRES.

I. – Les invariants des systèmes linéaires.

154. Un système linéaire est un système S composé uniquement de variables isolées et de formes linéaires. L'étude d'un tel système revient à celle d'un système composé uniquement de variables des deux espèces, évidemment.

Soit donc un système composé de m séries de variables de première espèce (x), (y), (z), (t), ..., et de n séries de variables de seconde espèce (ξ), (η), (ζ) (θ), ...

Les invariants du système sont les déterminants tels que (xyz) ou $(\xi\eta\zeta)$, et les quantités telles que $(\xi|x)$: ils forment, comme nous allons le faire voir, un système complet.

Entre ces invariants existent des relations, car $3m + 3n - 8$ d'entre eux seulement sont indépendants : on peut choisir pour ceux-là

$$\begin{array}{llll} (xyz), & (yzt), & (yzu), & \ldots, \\ & (zxt), & (zxu), & \ldots, \\ & (xyt), & (xyu), & \ldots, \\ (\xi|x), & (\eta|x), & (\zeta|x), & \ldots, \\ (\xi|y), & (\eta|y), & (\zeta|y), & \ldots, \\ (\xi|z), & (\eta|z), & (\zeta|z), & \ldots. \end{array}$$

On obtient alors les autres par les relations des types suivants :

$$(xyz)(xtu) = \begin{vmatrix} (xyt) & (xyu) \\ (xzt) & (xzu) \end{vmatrix},$$

$$(xyz)^2(tuv) = \begin{vmatrix} (yzt) & (yzu) & (yzv) \\ (zxt) & (zxu) & (zxv) \\ (xyt) & (xyu) & (xyv) \end{vmatrix},$$

$$(xyz)(\xi\,|\,t) = (yzt)(\xi\,|\,x) + (zxt)(\xi\,|\,y) + (xyt)(\xi\,|\,z),$$

$$(xyz)(\xi\eta\zeta) = \begin{vmatrix} (\xi\,|\,x) & (\xi\,|\,y) & (\xi\,|\,z) \\ (\eta\,|\,x) & (\eta\,|\,y) & (\eta\,|\,z) \\ (\zeta\,|\,x) & (\zeta\,|\,v) & (\zeta\,|\,z) \end{vmatrix}.$$

155. Pour faire voir que les invariants des types (xyz), $(\xi\eta\zeta)$, $(\xi\,|\,x)$, forment un système complet, nous allons montrer que plus généralement tout semi-invariant du système S, des poids respectifs P_1, P_2, P_3, est une fonction entière des déterminants tels que (xyz) ou $(\xi\eta\zeta)$, des déterminants tels que $(xy)_1$ ou $(\xi\eta)_3$, des variables telles que x_3 ou ξ_1, et des fonctions telles que $(\xi\,|\,x)$, chaque terme contenant $P_2 - P_3$ facteurs tels que x_3 ou $(\xi\eta)_3$, $P_1 - P_2$ facteurs tels que $(xy)_1$ ou ξ_1. Ce théorème, dont la réciproque est évidente, contient le proposé, puisque pour un invariant on a $P_1 = P_2 = P_3$.

Comme au nº 55, il suffit de démontrer la proposition énoncée pour un semi-invariant linéaire par rapport aux diverses séries de variables; elle est manifestement vraie pour le système formé par les (x) seuls, car alors le seul semi-invariant linéaire est x_3. Supposons donc le théorème vrai pour les variables (y), (z), (t), ..., (ξ), (η), (ζ), ... et démontrons qu'il l'est encore si l'on adjoint à ces variables les (x). Le semi-invariant considéré est de la forme $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3$; si $A_1 = A_2 = 0$, A_3 est un semi-invariant du système primitif, et le théorème est démontré.

Si $A_1 = 0$, sans que A_2 soit nul, l'hypothèse faite montre que A_2 est un semi-invariant du système primitif, des poids P_1, $P_2 + 1$, P_3; on peut écrire

$$A_2 = \Sigma\alpha(yzt)\ldots(\xi\eta\zeta)\ldots(\theta\,|\,u)\ldots v_3\ldots(\varkappa\lambda)_3\ldots(ws)_1\ldots\mu_1\ldots,$$

les facteurs affectés de l'indice 3 étant en nombre $P_2 - P_3 + 1$.

S'il existe un facteur tel que v_3, on écrira

$$A_2x_2 + A_3x_3 = \Sigma\alpha(yzt)\ldots(\xi\eta\zeta)\ldots(\theta\,|\,u)\ldots(xv)_1\ldots(\varkappa\lambda)_3\ldots(ws)_1\ldots\mu_1 + B_3x_3,$$

et l'on sera ramené au cas précédent en remarquant que le premier terme du second membre est un semi-invariant pour lequel le théorème est vérifié. De même, s'il existe un facteur tel que $(\varkappa\lambda)_3$, on pourra écrire

$$A_2x_2 + A_3x_3 = \Sigma\alpha(yzt)\ldots(\xi\eta\zeta)\ldots(\theta\,|\,u)\ldots v_3\ldots[\varkappa_1(\lambda\,|\,x) - \lambda_1(\varkappa\,|\,x)]\ldots(ws)_1\ldots\mu_1 + B_3x_3,$$

et les conclusions sont les mêmes.

Si enfin A_1 n'est pas nul, un raisonnement tout semblable ramène aux cas précédents.

On raisonnera de même si l'on suppose le théorème vrai pour les variables (x), (y), (z), ..., (η), (ζ), ... et que l'on adjoigne à ce système les variables (ξ).

Comme conséquence particulière du théorème que nous venons de démontrer, remarquons que si une forme f est décomposable en facteurs linéaires, de sorte que $f = \Pi(\alpha^{(i)} | x)$, tout invariant de f et des variables (x), ..., (ξ), ... s'exprimera en fonction entière des invariants tels que (xyz), $(\xi | x)$, $(\xi\eta\zeta)$, $(\alpha^{(i)} | x)$, $(\alpha^{(i)}\xi\eta)$, $(\alpha^{(i)}\alpha^{(j)}\xi)$, $(\alpha^{(i)}\alpha^{(j)}\alpha^{(k)})$, symétriquement par rapport aux $(\alpha^{(i)})$; et réciproquement.

156. La signification géométrique des conditions obtenues en égalant à zéro les invariants des types (xyz), $(\xi\eta\zeta)$, $(\xi | x)$, est évidente.

Le système linéaire S admet aussi des invariants absolus géométriques tels que $\frac{(\xi | x)(\eta | y)}{(\xi | y)(\eta | x)}$, ou $\frac{(xyt)(xzu)}{(xyu)(xzt)}$, ... Leur signification résultera de ce qui suit.

II. — Les faisceaux d'éléments.

157. Nous avons déjà vu qu'un élément (ξ) par exemple, déterminé par (y) et (z), pouvait être regardé comme un espace à une dimension, rempli par les éléments $(x = \lambda_1 y + \lambda_2 z)$, pour lesquels on peut envisager les (λ) comme des coordonnées binaires.

On dit de ces éléments (x) qu'ils forment un *faisceau*.

Quatre de ces éléments, de coordonnées binaires (λ), (μ), (ν), (ρ), ont un rapport anharmonique tel que $(\lambda\mu\nu\rho) = \frac{(\lambda\nu)(\mu\rho)}{(\lambda\rho)(\mu\nu)}$, qui ne change pas quand on change les éléments fondamentaux (y) et (z) de l'espace (ξ), ou que l'on fait une substitution linéaire sur les variables ternaires; etc. Ainsi est défini ce que l'on doit entendre par rapport anharmonique de quatre éléments de même espèce, appartenant à un même élément d'espèce opposée.

Soient (y), (z), (t), (u) quatre éléments de première espèce

alignés, c'est-à-dire appartenant à un même élément de seconde espèce (ξ); soit (x) un cinquième élément de première espèce n'appartenant pas à (ξ), et considérons les quatre éléments de seconde espèce (xy), (xz), (xt), (xu). Leur rapport anharmonique est égal au rapport anharmonique correspondant des éléments (y), (z), (t), (u) : en effet, si (y) étant quelconque sur (ξ), on lui fait correspondre (xy), on met ainsi les deux espaces (x) et (ξ) en correspondance homographique : c'est pour ainsi dire évident, et d'ailleurs on peut remarquer que si les coordonnées de (y) sont $(\lambda_1 v + \lambda_2 w)$, (v) et (w) étant deux éléments fixes de (ξ), celles de (xy) sont précisément $[\lambda_1(xv) + \lambda_2(xw)]$.

Cette correspondance homographique particulière entre les espaces (x) et (ξ) déterminés par deux éléments d'espèce opposée, qui est telle que chaque élément de l'un contient son correspondant dans l'autre, est dite *homologie*. De ce qui précède on conclut sans peine que l'invariant absolu $\frac{(xyt)(xzu)}{(xyu)(xzt)}$ des cinq séries de variables (x), (y), (z), (t), (u), quelconques, est égal au rapport anharmonique des quatre éléments (xy), (xz), (xt), (xu); de même l'invariant absolu $\frac{(\xi \mid x)(\eta \mid y)}{(\xi \mid y)(\eta \mid x)}$ est égal au rapport anharmonique $(xy\xi\eta)$ des deux éléments (x), (y) associés aux éléments de même espèce déterminés par (xy) et (ξ), (η) successivement.

Le rapport de deux coordonnées $\frac{x_2}{x_3}$ est égal au rapport anharmonique $(xO\Omega_2\Omega_3)$, en désignant par O l'élément de coordonnées $(1, 1, 1)$.

158. Considérons deux faisceaux différents de même espèce, par exemple $(\lambda_1 y + \lambda_2 z)$ et $(\mu_1 t + \mu_2 u)$; ils seront homographiques s'il existe entre les (λ) et les (μ) une relation bilinéaire. Pour simplifier on peut supposer les (μ) égaux aux (λ), l'homographie n'étant pas singulière. Alors, si (ξ) est un élément qui contient deux éléments correspondants des deux faisceaux, on a

$$\lambda_1(\xi \mid y) + \lambda_2(\xi \mid z) = 0, \qquad \lambda_1(\xi \mid t) + \lambda_2(\xi \mid u) = 0;$$

éliminant les (λ), on voit que le *lieu géométrique* de ces

éléments (ξ) est la série quadratique de seconde espèce

$$(\xi\,|\,y)(\xi\,|\,u)-(\xi\,|\,z)(\xi\,|\,t)=0.$$

En particularisant les coordonnées, on voit sans peine que cette série se décompose dans l'unique cas où l'élément commun à (yz) et à (tu) se correspond à lui-même dans les deux faisceaux; alors tous les éléments (ξ) contiennent un élément (x) fixe; on dit que les deux faisceaux sont *homologiques*; ils sont eux-mêmes homologiques à l'espace (x), considéré comme rempli par les éléments correspondants (ξ).

Nous avons énoncé et démontré dans ce paragraphe, d'une façon générale, des théorèmes bien connus de Géométrie ordinaire.

On pourrait aisément retrouver de la même façon les propriétés projectives des transversales dans le triangle, du quadrilatère complet, des polaires relatives aux angles, des polygones dont les côtés passent par des points donnés, tandis que les sommets se déplacent sur des droites données; etc., etc. Il suffit de donner ces indications; traiter ces questions en détail nous écarterait trop du but poursuivi.

CHAPITRE III.

LES ÉLÉMENTS COMMUNS A DEUX OU PLUSIEURS SÉRIES.

I. — Les éléments communs à deux séries.

159. Soient deux formes, à une seule série de variables et de même espèce, $f = a_{x^p}$, $g = b_{x^{p'}}$, définissant deux séries de première espèce, des degrés p et p'. Ces deux séries ont des éléments communs, que l'on peut déterminer de la façon suivante. Considérons un élément (ξ) quelconque, et cherchons la condition pour qu'il contienne un élément commun à f et à g; de $(\xi \mid x) = 0$ on tire

$$x_1 = -\frac{\xi_2 x_2 + \xi_3 x_3}{\xi_1};$$

portant dans f et g, puis éliminant x_2 et x_3 entre les deux formes binaires par rapport à ces variables ainsi obtenues, on obtient un résultant de degré $2pp'$ par rapport aux (ξ), qui, égalé à zéro, exprime la condition cherchée; toutefois cela n'est vrai que si l'on a $\xi_1 \neq 0$; si $\xi_1 = 0$, les équations entre lesquelles on a éliminé x_2 et x_3 contiennent l'une p fois, l'autre p' fois le facteur commun $\xi_2 x_2 + \xi_3 x_3$, et d'après un raisonnement connu, le résultant trouvé plus haut contient le facteur $\xi_1^{pp'}$; si on l'en débarrasse, il reste une forme χ, de deuxième espèce, des degrés pp', p' et p par rapport aux (ξ), aux (a) et aux (b), dont l'évanouissement est la condition cherchée sans facteur étranger. Il est évident que cette forme χ, que nous dirons *équivalente* à l'ensemble (f, g), est décomposable en pp' facteurs linéaires, d'après la façon dont on l'a obtenue.

Les séries f et g ont donc pp' éléments communs dont $\chi = 0$ est l'équation : ces éléments peuvent être confondus en tout ou en partie; si un même facteur $(\xi \mid y)$ figure q fois dans χ, on dit que

(y) est commun q fois à f et à g. Si χ est une forme nulle identiquement, les séries f et g ont une infinité d'éléments communs : elles sont donc identiques, ou bien l'une des formes f, g au moins est décomposable, et admet l'autre ou un facteur de l'autre en facteur.

La forme χ est un invariant, manifestement.

Si l'on a

$$\chi = \Pi(\xi \mid a^{(i)}),$$

on voit qu'une fonction symétrique des éléments communs $(a^{(i)})$ à f et g, entière et homogène de même degré m par rapport aux divers systèmes $(a^{(i)})$, s'exprimera comme une fonction entière des coefficients (a) et (b) de f et de g, des degrés respectifs mp' et mp.

160. Supposons la forme f donnée, et regardons les coefficients g de (b) comme variables ; à chaque système de valeurs des (b) correspond un ensemble de pp' éléments (x) communs à f et à g : nous allons rechercher si ces pp' éléments peuvent être pris arbitrairement, appartenant à f.

Supposons d'abord $p' \geq p$: pour définir les éléments communs à f et à g, nous pouvons remplacer g par $g + hf$, h étant une forme quelconque de degré $p' - p$ par rapport aux (x) ; par suite, le système des pp' éléments communs à f et à g dépend au plus de

$$\frac{(p'+1)(p'+2)}{2} - \frac{(p'-p+1)(p'-p+2)}{2} - 1$$

paramètres ; ce nombre est égal à $pp' - \frac{(p-1)(p-2)}{2}$, de sorte que le système d'éléments considéré ne dépend que de ce nombre de paramètres au plus, et que $\frac{(p-1)(p-2)}{2}$ au moins de ces éléments sont déterminés par les autres. Il est facile de voir qu'il n'y en a pas davantage ; en effet, les séries g qui contiennent $pp' - \frac{(p-1)(p-2)}{2}$ éléments appartenant à f dépendent linéairement de $\frac{(p'+1)(p'+2)}{2} - pp' + \frac{(p-1)(p-2)}{2}$ paramètres homogènes, et, ce nombre étant supérieur à $\frac{(p'-p+1)(p'-p+2)}{2}$, il en

résulte que les formes g considérées ne sont pas toutes composées comme fh; en d'autres termes, elles ne contiennent pas toutes f en facteur.

Si l'on a $p' < p$, on voit tout de suite que, parmi les pp' éléments communs à f et à g, il y en a $\frac{p'(2p - p' - 3)}{2}$ qui sont déterminés par les autres; ce nombre coïncide avec le précédent pour $p' = p - 1$ et $p' = p - 2$.

161. Soit une série $h = c_{xp''}$ de degré p'', assujettie à contenir les pp' éléments communs à f et à g; et montrons d'abord que ces conditions sont distinctes dès que l'on a $p'' \geqq p + p' - 2$. Pour cela, il suffit de faire voir que l'on peut trouver une série h de degré p'', contenant tous les éléments communs à f et à g, sauf un; si celui-ci correspond à $x_2 = x_3 = 0$, on peut écrire

$$f = x_2 f_2 + x_3 f_3, \qquad g = x_2 g_2 + x_3 g_3,$$

f_2 et f_3, g_2 et g_3 étant des formes des degrés $p - 1$, $p' - 1$; alors il est clair que la forme $f_2 g_3 - f_3 g_2$, de degré $p + p' - 2$, contient tous les éléments communs à f et à g, sauf celui mis à part.

Si alors la forme h de degré $p'' \geqq p + p' - 2$ contient tous les éléments communs à f et g, formons la combinaison $h_1 = h - ff_1 - gg_1$, f_1 et g_1 étant des formes de degrés $p'' - p'$, $p'' - p$; h_1 contient comme h tous les éléments communs à f et à g; en disposant convenablement des coefficients arbitraires de f_1 et g_1, on peut réduire le nombre des paramètres homogènes dont dépend linéairement h_1. En faisant attention aux relations qui résultent des identités telles que $fg = gf$, comme au n° 116, ce nombre se réduit à

$$\frac{(p''+1)(p''+2)}{2} - \frac{(p''-p+1)(p''-p+2)}{2} - \frac{(p''-p'+1)(p''-p'+2)}{2} + \frac{(p''-p-p'+1)(p''-p-p'+2)}{2},$$

le dernier terme étant applicable encore lorsque p'' est égal à $p + p' - 1$ ou à $p + p' - 2$, puisque alors il s'annule.

Le nombre précédent est précisément pp'; donc h_1 étant assujettie à pp' conditions distinctes, il faut que cette forme soit nulle

identiquement. Par suite, la forme h est nécessairement une combinaison telle que $ff_1 + gg_1$.

Ce théorème s'étend au cas où l'on a $p'' < p + p' - 2$. Supposons, en effet, que h de degré quelconque p'' contienne tous les éléments communs à f et à g; il en sera de même de hx_1 par exemple; si donc le théorème est vrai pour le degré $p'' + 1$, hx_1 sera de la forme $ff_1 + gg_1$; $ff_1 + gg_1$ contenant le facteur x_1, si l'on désigne par φ, φ_1, ψ, ψ_1, ce que deviennent les fonctions f, f_1, g, g_1, quand on y fait $x_1 = 0$, il faut avoir identiquement $\varphi\varphi_1 + \psi\psi_1 = 0$; comme p'' est inférieur à $p + p' - 2$, ceci entraîne $\varphi_1 = \psi_1 = 0$, et le théorème est démontré évidemment, en supposant toutefois que les formes φ et ψ en x_2 et x_3 n'ont pas de racines communes.

Bien entendu, ce théorème n'est vrai que d'une façon générale, si l'on conserve aux coefficients de f et g tout leur degré d'arbitraire.

Si l'on prend $p'' = p + p' - 2 - r$, la forme $f_1 f + g_1 g$ (p'' étant au moins égal au plus petit des nombres p et p') contient linéairement $\frac{(p-r)(p-r-1)}{2} + \frac{(p-r)(p'-r-1)}{2}$ paramètres homogènes; par suite la condition de contenir tous les éléments communs à f et à g équivaut pour une série h de degré p'' à $pp' - \frac{r(r-1)}{2}$ conditions simples : en d'autres termes, dès qu'une telle série contient $pp' - \frac{r(r-1)}{2}$ des éléments communs à f et à g, elle contient les $\frac{r(r-1)}{2}$ autres, en général. Une autre conséquence du théorème démontré est celle-ci : si deux séries f et h des degrés p et p'' ($p > p''$) sont telles que pp' ($p' > p''$) de leurs éléments communs appartiennent à la série g, de degré p', on peut écrire $h = ff_1 + gg_1$, et par suite les $p(p'' - p')$ autres éléments communs à f et h, appartiennent à une série g_1 de degré $p'' - p'$.

Enfin, nous remarquerons que toutes les séries de degré p qui ont $\frac{(p+1)(p+2)}{2} - 2$ éléments communs, ont p^2 éléments communs, et par suite forment un faisceau; en effet, si l'une d'elles est fixe, les nouveaux éléments communs à celle-ci et à une autre quelconque sont complètement déterminés par ceux qui sont donnés.

II. — Le résultant de trois formes. — Le discriminant d'une forme.

162. Soient les trois formes f, g, h, des degrés p, p', p''. Si les $(a^{(i)})$ sont les éléments communs à f et à g, formons le produit $\Pi h(a^{(i)})$; cette fonction symétrique des $(a^{(i)})$ s'exprimera en fonction entière des coefficients (a) et (b) de f et g, sera respectivement des degrés $p'p''$, $p''p$, pp' par rapport aux coefficients (a), (b), (c) des formes f, g, h.

La condition nécessaire et suffisante pour que les formes f, g, h aient un élément commun est $R = 0$, en appelant R ce produit. R est le *résultant* des formes f, g, h; c'est un invariant d'ordre $pp'p''$; c'est un combinant de ces formes, quand elles sont de même degré.

Si h est le produit de deux formes h_1 et h_2, le résultant de f, g, h est le produit du résultant de f, g, h_1, et de celui de f, g, h_2.

On obtiendrait tout aussi bien R en écrivant que f contient un élément commun à g et h, ou que g contient un élément commun à f et h.

163. Considérons l'identité

$$ff_1 + gg_1 + hh_1 = 0,$$

où f_1, g_1, h_1 sont des formes des degrés $p' + p'' - 2$, $p'' + p - 2$, $p + p' - 2$.

Si f, g, h n'ont pas d'éléments communs, et si cette identité est vérifiée, il faut que h_1 contienne tous les éléments communs à f et g; donc h_1 est de la forme $ff_2 + gg_2$, f_2 et g_2 étant des degrés $p' - 2$ et $p - 2$. Comme au n° 118, on en déduit que l'identité proposée résulte simplement des identités telles que $fg = gf$ déjà signalées.

D'autre part, si f, g, h ont au moins un élément commun, on voit de même que l'on peut vérifier l'identité proposée par des valeurs autres que les précédentes.

La condition nécessaire et suffisante pour que f, g, h aient un élément commun, est donc que l'on puisse vérifier l'identité

$$ff_1 + gg_1 + hh_1 = 0$$

par des valeurs autres que celles qui se présentent naturellement.

En d'autres termes les formes φ

$$x_1^{q_1} x_2^{q_2} x_3^{q_3} f, \quad x_1^{q'_1} x_2^{q'_2} x_3^{q'_3} g, \quad x_1^{q''_1} x_2^{q''_2} x_3^{q''_3} h,$$

où $q_1 + q_2 + q_3 = p' + p'' - 2$, ..., et qui sont déjà liées par $\sum \frac{p(p-1)}{2}$ relations linéaires connues, doivent être liées encore par une nouvelle relation linéaire.

Ces formes sont en nombre $\sum \frac{(p'+p'')(p'+p''-1)}{2}$, et contiennent chacune $\frac{(p+p'+p'')(p+p'+p''-1)}{2}$ termes : la différence entre le nombre précédent et celui-ci est précisément $\sum \frac{p(p-1)}{2}$.

On prendra donc $\frac{(p+p'+p'')(p+p'+p''-1)}{2}$ des formes φ, et l'on écrira le déterminant R_1 de leurs coefficients, déterminant que l'on peut supposer non nul, par un choix convenable des formes considérées. Écrivant alors les relations connues entre les formes φ, et appelant R_2 le déterminant des formes non choisies tout à l'heure dans ces relations, on voit comme au n° 118 que R est précisément le quotient $\frac{R_1}{R_2}$ des déterminants R_1 et R_2, qui sont respectivement des ordres $\frac{(p+p'+p'')(p+p'+p''-1)}{2}$ et $\sum \frac{p(p-1)}{2}$, nombres dont la différence est $\Sigma p'p''$.

Observons que si k est une forme donnée quelconque du degré $p+p'+p''-2$, on peut toujours vérifier l'identité

$$ff_1 + gg_1 + hh_1 + kk_1 = 0,$$

k_1 étant une constante, et cela en dehors des relations connues entre les formes φ ; alors, on peut évidemment prendre pour k_1 le résultant R.

164. Voici d'autres moyens de calculer le résultant des trois formes f, g, h, analogues à ceux du n° 65 dans le cas de deux formes binaires.

Supposons les trois formes f, g, h du même degré p, et

écrivons-les ainsi

$$f = f_1 x_1^{p_1} + f_2 x_2^{p_2} + f_3 x_3^{p_3},$$
$$g = g_1 x_1^{p_1} + g_2 x_2^{p_2} + g_3 x_3^{p_3},$$
$$h = h_1 x_1^{p_1} + h_2 x_2^{p_2} + h_3 x_3^{p_3},$$

p_1, p_2, p_3 étant trois entiers positifs dont la somme est $p+2$; cette décomposition est toujours possible, et même de plusieurs façons, dont on choisira l'une arbitrairement.

Il y a $\frac{p(p+1)}{2}$ systèmes possibles pour les nombres p_1, p_2, p_3: considérons alors les $\frac{p(p+1)}{2}$ déterminants tel que

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{vmatrix};$$

on obtient ainsi $\frac{p(p+1)}{2}$ formes de degré $2p-2$ qui s'annulent en même temps que f, g, h si ces formes ont un élément commun, et si l'on prend (x) pour cet élément.

Adjoignons à ces formes les $\frac{3p(p-1)}{2}$ formes des types

$$x_1^{q_1} x_2^{q_2} x_3^{q_3} f, \quad x_1^{q_1} x_2^{q_2} x_3^{q_3} g, \quad x_1^{q_1} x_2^{q_2} x_3^{q_3} h,$$

où $q_1 + q_2 + q_3 = p-2$, qui sont dans le même cas. Nous avons ainsi en tout $p(2p-1)$ formes de degré $2p-2$, et le déterminant de leurs coefficients, d'ordre $p(2p-1)$ et de degré total $3p^2$ par rapport aux coefficients de f, g, h, est évidemment le résultant R de ces formes.

Autrement, soit J le jacobien des formes f, g, h; les degrés de ces formes étant toujours égaux à p, les dérivées partielles de J s'annulent en même temps que f, g, h. Alors on considérera les formes de degré $3p-4$, en nombre $3(2p^2-5p+4)$, et renfermant chacune $\frac{3}{2}(p-1)(3p-2)$ coefficients

$$\frac{\partial J}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial J}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial J}{\partial x_3}, \quad x_1^{q_1} x_2^{q_2} x_3^{q_3} f, \quad x_1^{q_1} x_2^{q_2} x_3^{q_3} g, \quad x_1^{q_1} x_2^{q_2} x_3^{q_3} h,$$

où $q_1 + q_2 + q_3 = 2p-4$; ces formes sont d'ailleurs liées par

$\frac{3(p-2)(p-3)}{2}$ relations linéaires connues. Les égalités

$$3(2p^2-5p+4) - \frac{3(p-2)(p-3)}{2} = \frac{3(p-1)(3p-2)}{2},$$
$$\frac{3}{2}(p-1)(3p-2) - \frac{3(p-2)(p-3)}{2} + 6 = 3p^2$$

montrent alors qu'on obtient le résultant R sous la forme du quotient de deux déterminants, comme au numéro précédent.

Lorsque les degrés de f, g, h ne sont pas égaux, on ramènera ce cas au précédent comme au n° 65; on introduira ainsi des facteurs étrangers, toujours faciles à déterminer.

On peut encore, dans le cas général, envisager le jacobien J et les formes $x_1^{q_1}x_2^{q_2}x_3^{q_3}f$, ... où $q_1+q_2+q_3 = p'+p''-3$, ..., et l'on voit sans peine que l'on obtient encore le résultant comme quotient de deux déterminants.

165. Lorsque trois formes f, g, h ont leur résultant nul, on peut déterminer le nombre et les coordonnées des éléments communs par des considérations toutes pareilles à celles du n° 119.

Comme dans le cas des formes à deux séries de variables binaires, dont la théorie a de nombreux points communs avec celle qui nous occupe (et ceci n'a pas lieu de surprendre, puisque le nombre de variables indépendantes non homogènes est le même dans les deux cas), nous laisserons de côté la détermination directe du nombre des éléments communs à f, g, h.

166. Le *discriminant* S d'une forme $f = a_x^p$ est le résultant de ses trois dérivées partielles $\frac{1}{p}\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{1}{p}\frac{\partial f}{\partial x_2}$, $\frac{1}{p}\frac{\partial f}{\partial x_3}$.

C'est un invariant d'ordre $p(p-1)^2$, et de degré $3(p-1)^2$ par rapport aux coefficients (a) de f. Nous verrons plus bas quelle est la signification de la condition $S = 0$.

Le discriminant du produit de deux formes est nul identiquement, car les dérivées partielles de ce produit s'annulent pour tout élément commun aux deux formes.

Nous ne ferons que signaler l'extension possible des théories contenues dans ce Chapitre au cas où l'on envisagerait des formes à deux ou plusieurs séries de variables binaires ou ternaires.

CHAPITRE IV.

LES PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES SÉRIES.

I. — Les formes équivalentes. Les polaires. — Les éléments tangents. — Les éléments multiples.

167. Soit une série de première espèce et de degré p, d'équations $f = a_{x^p} = 0$. Si nous cherchons ses éléments communs avec un élément (ξ) quelconque, nous savons qu'ils sont en nombre p, et il est facile de former leur équation. En particulier, on peut former l'équation $f[-(\xi_2 x_2 + \xi_3 x_3), \xi_1 x_2, \xi_1 x_3] = 0$, qui définit les coordonnées $\frac{x_2}{x_3}$ de ces éléments, si ξ_1 n'est pas nul.

Écrivons que, parmi les p éléments communs à f et à (ξ), deux au moins sont confondus; à cet effet, nous formerons le discriminant de l'équation précédente, de degré $2p(p-1)$ par rapport aux (ξ), et nous en supprimerons le facteur étranger évident $\xi_1^{p(p-1)}$. Nous obtiendrons ainsi une forme φ de seconde espèce, de degré $p(p-1)$, qui, égalée à zéro, exprime la condition nécessaire et suffisante pour que (ξ) ait deux éléments communs confondus avec f. φ est clairement un invariant d'ordre $p(p-1)$, de degré $2p(p-1)$ par rapport aux coefficients (a) de f.

Nous dirons de cette forme φ qu'elle est *équivalente* à f. Si f n'est pas irréductible et admet un facteur multiple, la forme φ est nulle identiquement. Si f est décomposable en un produit de facteurs linéaires distincts, $\Pi(\alpha^{(i)}|x)$, il est clair que φ est de la forme $\Pi(\alpha^{(i)}\alpha^{(j)}\xi)^2$.

168. Définissons maintenant l'élément (ξ) par deux éléments de première espèce (y) et (z), de sorte que l'on ait $\xi_i = (yz)_i$, et qu'un élément quelconque de (ξ) soit $(\lambda_1 y + \lambda_2 z)$. Pour définir

les éléments communs à f et à (ξ), on aura l'équation

$$a_{y^p}\lambda_1^p + p a_{y^{p-1}z}\lambda_1^{p-1}\lambda_2 + \frac{p(p-1)}{2} a_{y^{p-2}z^2}\lambda_1^{p-2}\lambda_2^2 + \ldots = 0;$$

le discriminant de cette forme binaire par rapport aux (λ) s'exprimera à l'aide des (ξ) et sera la forme φ équivalente à f.

Cette équation nous donne aussi tout de suite la signification géométrique des polaires de f égalées à zéro. Si l'on appelle $(\lambda^{(i)})$ les racines de cette équation, et si (y) et (z) sont tels que $a_{y^{p-h}z^h} = 0$, on a

$$\Sigma\lambda_1^{(1)}\lambda_1^{(2)}\ldots\lambda_1^{(h)}\lambda_2^{(h+1)}\ldots\lambda_2^{(p)} = 0;$$

si alors $(t^{(i)})$ est l'élément qui, dans l'espace (ξ), a pour coordonnées $(\lambda^{(i)})$, le rapport anharmonique $(yzt^{(i)}t^{(j)})$ est égal à $\frac{\lambda_2^{(i)}\lambda_1^{(j)}}{\lambda_1^{(i)}\lambda_2^{(j)}}$; par suite, la relation précédente peut s'écrire

$$\Sigma(yzt^{(1)}t^{(i_1)})(yzt^{(2)}t^{(i_2)})\ldots(yzt^{(h)}t^{(i_h)}) = 0,$$

la sommation étant étendue à toutes les combinaisons $(t^{(i_1)})$, $(t^{(i_2)})$, ..., $(t^{(i_h)})$ des éléments (t), h à h, et $(t^{(1)})$, $(t^{(2)})$, ..., $(t^{(h)})$ restant fixes. On peut aussi écrire dans les mêmes conditions

$$\Sigma(yzt^{(i_1)}t^{(1)})(yzt^{(i_2)}t^{(2)})\ldots(yzt^{(i_{p-h})}t^{(p-h)}) = 0.$$

L'une ou l'autre de ces équations définit les $p-h$ éléments (y) qui, sur (ξ), appartiennent à la $p^{\text{ième}}$ polaire de (z); d'après le n° 62, ils forment le système polaire d'ordre h de (z) par rapport aux éléments communs à f et à (ξ), dans l'espace (ξ). En particulier, pour $h = 1$, on a

$$\Sigma(yzt^{(1)}t^{(i)}) = 0;$$

pour $h = p-1$, on a

$$\Sigma(yzt^{(i)}t^{(1)}) = 0.$$

169. Supposons que (y) soit un élément déterminé de f, de sorte que $a_{y^p} = 0$; l'élément quelconque (ξ) ou (yz), contenant (y), a (y) commun avec f une seule fois seulement en général, car on n'a pas $a_{y^{p-1}z} = 0$. Si cette condition est vérifiée, sans l'être quel que soit (z), alors (z) appartient à la $(p-1)^{\text{ième}}$ polaire de (y), qui est une série linéaire, ou un élément de seconde espèce (η_1); on voit que cet élément (η_1), et lui seul parmi

les éléments (ξ) qui contiennent (y), admet (y) commun avec f plus d'une fois, et en général deux fois : il est dit *tangent* à f en (y), et (y) est son *élément de contact*.

Cette notion s'étend aux séries linéaires ; en chaque élément (x) d'une telle série (ξ), l'élément tangent est (ξ) lui-même.

170. Généralement, supposons que $a_{y^{p-1}z}, \ldots, a_{y^{p-h+1}z^{h-1}}$ sont des formes nulles identiquement quel que soit (z), sans qu'il en soit de même de $a_{y^{p-h}z^h}$, ce qui exige que les dérivées partielles de l'ordre $h-1$ de f soient toutes nulles pour l'élément (y), sans qu'il en soit de même pour les dérivées partielles d'ordre h ; on dit alors que (y) est un *élément multiple d'ordre* h de f : tout élément (ξ) contenant (y) admet (y) h fois au moins commun avec f.

Les éléments particuliers (z), tels que l'on ait $a_{y^{p-h}z^h}=0$, déterminent des éléments (η) qui ont plus de h éléments confondus en (y) communs avec f, en général $h+1$. Ces éléments (η) sont en nombre h, distincts ou confondus, car ici $a_{y^{p-h}z^h}$ se décompose en h facteurs linéaires par rapport à (z), puisque si (z) vérifie l'équation $a_{y^{p-h}z^h}=0$, il en est de même, d'après ce qui précède, de tout élément appartenant à (yz). Ces éléments (η) sont encore dits *tangents* à f en (y).

En général, une série f n'a pas d'éléments multiples ; si, en effet, (y) est un tel élément, les dérivées partielles du premier ordre de f doivent s'annuler pour (y) ; et réciproquement, si ceci a lieu, (y) est un élément multiple, en général double, pour f. De là résulte la condition nécessaire et suffisante pour que f ait au moins un élément multiple : c'est que son discriminant soit nul.

Les polaires $a_{x^{p-k}y^k}=0$ d'un élément (y) appartenant à f, qui ne disparaissent pas identiquement, admettent cet élément avec le même ordre de multiplicité, et y ont les mêmes éléments tangents. La polaire $a_{x^{p-k}z^k}=0$ d'un élément quelconque (z) admet comme élément multiple d'ordre $h-k$ tout élément multiple (y) d'ordre h de f. Ces propositions se démontrent sans peine, par exemple en supposant que l'élément multiple (y) est O_1 et remarquant que f prend alors la forme

$$f = x_1^{p-h} f_h(x_2, x_3) + x_1^{p-h-1} f_{h+1}(x_2, x_3) + \ldots + f_p(x_2, x_3),$$

les f_i étant des formes en x_2 et x_3 de degré marqué par l'indice. Ici $f_h = 0$ est l'équation des éléments tangents à f en O_1.

171. Si deux séries $f = a_{x^p}$, $g = b_{x^{p'}}$ ont un élément (y) commun, multiple des ordres h et h' respectivement pour ces deux séries, il compte au moins hh' fois parmi les pp' éléments communs à ces deux séries; il ne compte pas davantage si ces deux séries n'ont pas d'élément tangent commun en (y); il compte au moins $hh' + q$ fois, si les éléments tangents en (y) à f et à g coïncident en nombre q.

Pour démontrer ce théorème, supposons que (y) coïncide avec O_1, et écrivons comme tout à l'heure

$$f = x_1^{p-h} f_h + x_1^{p-h-1} f_{h+1} + \ldots + f_p = 0,$$
$$g = x_1^{p'-h'} g_{h'} + x_1^{p'-h'-1} g_{h'+1} + \ldots + g_{p'} = 0.$$

Si dans ces équations nous remplaçons x_1 par $\frac{x_1}{x'_1}$, et si, entre les nouvelles équations obtenues, nous éliminons x_1 et x'_1, nous obtenons un résultant R qui n'est pas nul identiquement si f et g n'ont pas une infinité d'éléments communs, et qui est, d'après les propriétés de poids des résultants, du degré

$$(p-h)(p'-h') + h(p'-h') + h'(p-h)$$

ou $pp' - hh'$ par rapport à x_2 et x_3. Aux racines de $R = 0$ correspondent $pp' - hh'$ éléments communs à f et g, autres que O_1 en général, ce qui démontre la première partie du théorème. Si f_h et $g_{h'}$ n'ont pas de racine commune, aucun de ces éléments ne peut coïncider avec O_1, car pour chacun d'eux on a $x'_1 \neq 0$. Mais si f_h et $g_{h'}$ ont q racines communes, distinctes ou confondues, l'équation $R = 0$, qui peut s'écrire sous la forme $f_h F + g_{h'} G = 0$, évidente d'après la formation du résultant, admet ces q racines, et à chacune d'elles correspond de nouveau O_1 comme élément commun à f et à g. Le théorème est ainsi complètement démontré. On voit en même temps comment on pourra déterminer, sans recourir au procédé général du n° 159, combien de fois O_1 est commun à f et à g dans tous les cas possibles.

172. Si les deux séries f et g ont en commun $q + 1$ fois un élément (y) simple pour chacune d'elles, on dit qu'elles ont

en (y) un *contact d'ordre* q; en général, q est égal à 1, et le contact est simple : les deux séries sont *simplement tangentes*.

Cherchons la condition pour que f et g soient tangentes. Si (x) est l'élément de contact, on a

$$f=0, \qquad g=0, \qquad \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial g}{\partial x_1}} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_2}}{\dfrac{\partial g}{\partial x_2}} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_3}}{\dfrac{\partial g}{\partial x_3}},$$

l'une de ces équations étant d'ailleurs une conséquence des autres. Éliminons les (x) entre les équations

$$f=0, \qquad g=0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial g}{\partial x_3} - \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\partial g}{\partial x_2} = 0;$$

on obtient un résultant T′ des degrés $p'(2p+p'-2)$ et $p(2p'+p-2)$ par rapport aux coefficients (a) et (b) de f et g; mais si x_1 est nul, et seulement dans ce cas, on ne peut rien déduire des équations employées relativement au rapport $\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial g}{\partial x_1}}$; d'ailleurs, si l'on a $f=0$, $g=0$, avec $x_1=0$, la troisième équation employée est vérifiée d'elle-même, puisque

$$x_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0, \qquad x_2\frac{\partial g}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial g}{\partial x_3} = 0.$$

Le résultant T′ contient donc comme facteur étranger le résultant de $f(0, x_2, x_3)$ et $g(0, x_2, x_3)$, des degrés p' et p par rapport aux (a) et aux (b); en l'enlevant, on obtient la condition cherchée $T=0$, où T est un invariant des degrés $p'(2p+p'-3)$ et $p(2p'+p-3)$ par rapport aux (a) et aux (b), d'ordre $pp'(p+p'-2)$.

On voit d'ailleurs que T s'annule aussi dès que f par exemple possède un élément multiple appartenant à g : nous pouvons donc dire que $T=0$ est la condition nécessaire et suffisante pour que deux des éléments communs à f et à g soient confondus.

173. Si trois séries f, g, h des degrés p, p', p'' ont en commun un élément (x), multiple des ordres h, h', h'' respectivement, on voit sans peine que la série jacobienne, obtenue en égalant à zéro le jacobien $J(f, g, h)$, admet cet élément comme multiple de

l'ordre $h + h' + h'' - 2$ au moins ; si $\frac{p}{h} = \frac{p'}{h'} = \frac{p''}{h''}$, l'élément est multiple $h + h' + h'' - 1$ fois au moins ; si l'on a seulement $\frac{p'}{h'} = \frac{p''}{h''}$, il n'est multiple que $h + h' + h'' - 2$ fois en général, mais il admet les éléments tangents à f comme éléments tangents ; etc.

Lorsque $p = p' = p''$, on voit encore que la jacobienne est le lieu des éléments doubles des séries $\lambda_1 f + \lambda_2 g + \lambda_3 h = 0$.

II. — Les séries tangentielles.

174. Cherchons les éléments (ξ) tangents à f qui contiennent un élément donné (y) ; si (x) est l'élément de contact, on a pour déterminer (x) les deux équations $a_{x^p} = 0$, $a_{x^{p-1}y} = 0$, qui donnent $p(p-1)$ solutions. L'équation de ces éléments (ξ) est obtenue en égalant à zéro le discriminant de

$$a_{x^p}\lambda_1^p + p a_{x^{p-1}y}\lambda_1^{p-1}\lambda_2 + \ldots + a_{y^p}\lambda_2^p = 0 ;$$

elle est de la forme

$$a_{x^p} g + a^2_{x^{p-1}y} h = 0,$$

g et h étant des formes des degrés $p(p-2)$ et $(p-1)(p-2)$, comme l'on sait ; on voit que les éléments communs à f et aux (ξ), autres que les éléments de contact, appartiennent à la série $h = 0$, de degré $(p-1)(p-2)$; d'ailleurs h est le discriminant de

$$p a_{x^{p-1}y}\lambda_1^{p-1} + \ldots + a_{y^p}\lambda_2^{p-1} = 0,$$

de sorte que h est de la forme

$$a_{x^{p-1}y} g_1 + a^2_{x^{p-2}y^2} g_2 = 0 ;$$

donc les séries $h = 0$ et $a_{x^{p-1}y} = 0$ sont tangentes aux éléments communs aux deux premières polaires de (y).

Mais les solutions trouvées comme éléments de contact (x) ne sont acceptables, (y) restant arbitraire, qu'autant que (x) n'est pas un élément multiple, et précisément la série $a_{x^{p-1}y} = 0$, qui est la première polaire de (y), contient tous les éléments multiples de f : il faudra donc ôter les solutions correspondantes pour avoir le nombre véritable de solutions proprement dites, nombre qu'on appelle la *classe* π de la série f.

Si (y) est un élément ordinaire de f, les deux séries $a_{x^p} = 0$,

$a_{x^{p-1}y} = 0$ contiennent (y), et y sont tangentes, d'après ce qui a été dit plus haut; donc (y) compte au moins deux fois comme élément de contact.

175. La forme φ équivalente à f est de degré $p(p-1)$. Il est évident que, égalée à zéro, elle représente la série des éléments (ξ) tangents à f, et en outre les éléments multiples de f, chacun d'eux autant de fois qu'il compte comme commun aux séries $a_{x^p} = 0$, $a_{x^{p-1}y} = 0$, (y) restant arbitraire. Si l'on ôte les facteurs qui correspondent dans φ à ces éléments multiples, le degré du facteur restant φ_0 est la classe π de f; $\varphi_0 = 0$ représente la série des éléments (ξ) tangents à f.

Cette série φ_0 peut être traitée comme f; si (ξ) est un de ses éléments, tangent à f en (y), comme, d'après ce qui a été dit plus haut, (y) et φ_0 ont (ξ) commun au moins deux fois, (y) est tangent à φ_0, et (ξ) est son élément de contact. La forme f_0 équivalente à φ_0 contient donc f, et en outre les éléments multiples de φ_0, ou *éléments tangents multiples* de f, chacun d'eux autant de fois qu'il compte comme commun à φ_0 et à la première polaire de l'élément arbitraire (η) par rapport à φ_0; le degré de f_0 est $\pi(\pi-1)$; la classe de φ_0 est p.

176. On voit que les formes f et φ_0 jouent l'une par rapport à l'autre un rôle parfaitement réciproque; chacune des séries ainsi définies est la série des éléments tangents à l'autre. Aussi dirons-nous que chacune d'elles est la forme *tangentielle* de l'autre.

La forme tangentielle φ_0 d'une forme donnée f ne doit pas être confondue avec sa forme équivalente φ : celle-ci est un invariant de f lorsqu'on laisse aux coefficients de cette forme toute leur généralité, comme nous l'avons toujours fait; la forme tangentielle n'existe, différente de φ, que si les coefficients de f vérifient des relations particulières, et ne peut être regardée comme un invariant de la forme générale f.

Si f n'a aucun élément multiple, φ_0 n'est autre chose que φ; on a alors $\pi = p(p-1)$, et par suite la série φ_0 a nécessairement des éléments multiples, sauf pour $p = 2$, car, hors ce cas, on a $p < \pi(\pi-1)$.

Ce qui précède cesse de s'appliquer dans deux cas :

1° Si f contient des facteurs multiples; alors φ est nulle identiquement;

2° Si f contient des facteurs linéaires; si, en effet, f contient l'élément (ξ), l'élément tangent en (y) sur (ξ) est (ξ) lui-même; mais $\varphi = 0$ ne le représente pas, et f_0 ne le contient pas.

III. — Les éléments inflexionnels. — Les éléments stationnaires.

177. Si (y) est un élément simple de la série $f = 0$, l'élément tangent (ξ), d'équation $a_{xy^{p-1}} = 0$, n'a en général (y) commun avec f que deux fois : mais, en des éléments particuliers, (ξ) et f peuvent avoir un contact d'ordre q supérieur à l'unité : il en sera ainsi, d'après le n° 168, si les polaires successives

$$a_{x^2y^{p-2}} = 0, \qquad \ldots, \qquad a_{x^qy^{p-q}} = 0$$

contiennent l'élément (ξ), sans qu'il en soit de même de la suivante.

Lorsque $q = 2$, ce qui est le cas le plus général, nous dirons que l'élément (y) est *inflexionnel* sur f; l'élément tangent (ξ) lui-même sera dit élément *tangent stationnaire* pour f; on dit aussi que c'est un élément *stationnaire*, ou *cuspidal*, de la série tangentielle φ_0. En général, une série f a un nombre limité d'éléments inflexionnels, et n'a pas d'éléments tels que l'ordre du contact de f avec l'élément tangent soit supérieur à 2.

Voici comment on peut déterminer les éléments inflexionnels : en (y), supposé tel, la polaire $a_{x^2y^{p-2}} = 0$ se décompose, d'après ce qui précède, en deux éléments de seconde espèce, et par suite, d'après la théorie des formes quadratiques, exposée plus loin, on a

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial y_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_3} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y_2^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial y_3} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_3} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial y_3} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y_3^2} \end{vmatrix} = 0,$$

de sorte que (y) appartient à la *hessienne* H de f, définie par le hessien de f égalé à zéro.

Réciproquement, si (y) est un élément simple de f appartenant aussi à H, la polaire $a_{x^2y^{p-2}} = 0$ se décompose en deux éléments de seconde espèce, et, d'après ce qui a été dit à la fin du n° 170, l'un de ces éléments est l'élément tangent (ξ), qui, par suite, a un contact d'ordre supérieur à l'unité avec f, et en général est stationnaire.

Les éléments inflexionnels de f sont donc les éléments simples de f communs à f et à H, pour lesquels l'ordre du contact de f avec l'élément tangent ne dépasse pas 2 ; ils sont en général en nombre $3p(p-2)$, puisque le hessien de f est de degré $3(p-2)$.

Si $p=2$, le hessien est une constante, qui ne s'annule que dans le cas où f se décompose en facteurs linéaires, comme nous le verrons plus loin.

Si f contient un facteur linéaire à la puissance k, H contient ce facteur à la puissance $3k-2$, au moins, ainsi qu'on le vérifie sans peine.

La série H contient évidemment tous les éléments multiples que peut posséder f; la présence de tels éléments diminue donc le nombre normal des éléments inflexionnels indiqué plus haut.

Si (x) est multiple d'ordre h pour f, il le sera en général d'ordre $3h-4$ pour H, et les éléments tangents à f en (x) le seront aussi à H.

Enfin, nous remarquerons qu'un élément (y) pour lequel l'élément tangent a avec f un contact d'ordre supérieur à deux peut être regardé comme la réunion de plusieurs éléments inflexionnels ordinaires, et aussi qu'on peut concevoir de tels éléments coïncidant avec des éléments multiples de f : mais nous n'entrerons pas dans les détails relatifs à ces cas exceptionnels.

178. Si (y) est inflexionnel sur f, la première polaire d'un élément quelconque (z), appartenant à l'élément (ξ) tangent à f en (y), est elle-même tangente à f en (y), et par suite admet (y) commun avec f deux fois. En effet, les éléments communs à (ξ) et à la première polaire de (z) forment le premier système polaire de (z) dans l'espace (ξ) par rapport aux éléments communs à f et à (ξ); trois de ces éléments étant confondus en (y), il est clair, d'après les propriétés des polaires binaires, que la première polaire de (z) a avec (ξ) deux éléments confondus en (y). Si, de

plus, (z) vient en (y) et seulement dans ce cas, (y) devient, par le même raisonnement, trois fois commun à la première polaire de (z) et à (ξ).

Il résulte immédiatement de ce qui précède que (ξ) est un élément double pour la série tangentielle φ_0 de f, et que (y) est l'unique élément tangent correspondant, admettant (ξ) commun avec f trois fois.

Ce résultat est d'accord avec ce qui a été dit plus haut sur la diminution du nombre des éléments inflexionnels causée par la présence des éléments multiples; si, en effet, f n'a pas d'éléments multiples, φ_0 doit en avoir assez pour n'avoir pas d'éléments inflexionnels qui seraient multiples pour f, contrairement à l'hypothèse.

179. Si (y) est un élément quelconque, sa polaire d'ordre $p-2$, $a_{x^2y^{p-2}}=0$, se décompose en éléments linéaires si (y) appartient à la série hessienne H de f, et seulement dans ce cas : telle est la signification géométrique générale de l'équation $H=0$.

Les deux éléments (ξ) dans lesquels se décompose alors la polaire considérée ont en commun un élément (z), qui, d'après la théorie des formes quadratiques, est défini par les équations compatibles

$$z_1\frac{\partial^2 f}{\partial y_1\partial y_i}+z_2\frac{\partial^2 f}{\partial y_2\partial y_i}+z_3\frac{\partial^2 f}{\partial y_3\partial y_i}=0 \qquad (i=1,2,3);$$

la série formée par ces éléments (z) est appelée la série *steinérienne* S de f.

D'autre part $a_{x^{p-1}z}=0$ étant l'équation de la première polaire de (z), on voit que l'on peut dire encore que la série S est le lieu des éléments (z) dont les premières polaires ont un élément pouble (y), puisqu'alors celui-ci doit vérifier les équations précédentes; de plus la hessienne H est la série de ces éléments doubles (y).

La série des éléments (yz) est la série *cayleyenne* de f.

Pour $p=3$, les séries H et S coïncident évidemment; (y) et (z) sont dits *correspondants* sur cette série.

On peut étendre le champ de ces considérations en envisageant encore la série des éléments (ξ) dans lesquels se décomposent les

polaires $a_{x^2} b_{y^{p-2}} = 0$, lorsque (y) appartient à H ; la série des éléments (η) tangents aux polaires $a_{x^{p-1}z} = 0$ en (y) lorsque (z) appartient à S ; etc.

IV. Les singularités ordinaires. — Les formules de Plücker.

180. Soit $f = a_{x^p} = 0$ l'équation d'une série quelconque que nous supposons ne contenir ni séries multiples, ni séries linéaires. Si nous appelons *singularités ordinaires* celles qui se rencontrent nécessairement dans une telle série f ou dans la série tangentielle φ_0, ce qui a été dit nous conduit à considérer quatre espèces de singularités ordinaires pour f :

a. Un élément double avec éléments tangents distincts ;

α. Un élément tangent double avec éléments de contact distincts ;

β. Un élément inflexionnel ;

b. Un élément cuspidal ou stationnaire ; c'est-à-dire encore un élément double, mais avec un élément tangent unique, qui admet l'élément double en commun avec la série trois fois seulement.

D'ailleurs, pour préciser encore davantage, nous supposerons, dans les cas (a) et (α), que de même chacun des éléments tangents en l'élément double admet celui-ci commun avec la série trois fois seulement.

Les singularités des espèces (a), (α), (b), (β) sont respectivement les singularités des espèces (α), (a), (β), (b) pour la série tangentielle φ_0.

Si nous supposons que f n'admet que des singularités ordinaires, et que les nombres de ces singularités soient respectivement d, δ, r, ρ pour les quatre espèces (a), (α), (b), (β), on peut facilement trouver des relations entre ces nombres, le degré p de f, et le degré π de φ_0 qui est aussi la classe de f.

181. On sait que la classe de f, qui serait $p(p-1)$ si f n'avait aucun élément double, n'est diminuée que par le fait de ces éléments doubles. Quelle est l'influence de ces éléments doubles ? Considérons d'abord un élément double à éléments tangents dis-

tincts; en le choisissant pour O_1 et prenant les éléments tangents pour Ω_2 et Ω_3, on peut écrire

$$f = x_2 x_3 x_1^{p-2} + x_1^{p-3} f_3 + x_1^{p-4} f_4 + \ldots + f_p,$$

f_i étant une forme de degré i par rapport aux variables x_2 et x_3. La première polaire de l'élément (y) quelconque peut alors s'écrire

$$(y_3 x_2 + y_2 x_3) x_1^{p-2} + x_1^{p-3} g_2 + \ldots + g_{p-1} = 0,$$

les g_i étant analogues aux f_i. Elle a en O_1 un élément simple, l'élément tangent étant distinct des éléments Ω_2 et Ω_3 tangents en O_1 à f : on voit même qu'il est conjugué harmonique de $O_1 y$ par rapport à Ω_2 et Ω_3. Par suite, O_1 est commun à f et à cette polaire deux fois seulement, et chaque élément analogue à O_1 diminue la classe de deux unités.

Supposons maintenant que f admette en O_1 un élément cuspidal; l'élément tangent étant pris pour Ω_3, on a

$$f = x_2^2 x_1^{p-2} + x_1^{p-3} f_3 + \ldots + f_p,$$

et dans f_3, le coefficient de x_3^3 n'est pas nul, puisque Ω_3 doit avoir O_1 commun avec f trois fois seulement.

La première polaire de (y) est ici

$$2 x_2 y_2 x_1^{p-2} + x_1^{p-3} \left[(p-2) y_1 x_2^2 + y_2 \frac{\partial f_3}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \right] + \ldots + g_{p-1} = 0;$$

elle admet O_1 comme élément simple, avec même élément tangent que f; par suite O_1 est commun trois fois au moins à f et à cette polaire : il ne l'est pas davantage, comme on le voit sur le cas particulier très simple

$$f = x_2^2 x_1 + a x_3^3;$$

donc tout élément analogue à O_1 diminue la classe de trois unités.

Évaluons de même la diminution produite dans le nombre des éléments inflexionnels de f par les éléments doubles.

Prenons les mêmes notations que ci-dessus; pour un élément double ordinaire, situé en O_1, la hessienne s'écrit

$$H = (p-1)(p-2) x_1^{3p-8} x_2 x_3 + x_1^{3p-9} g_3 + \ldots + g_{3p-6};$$

elle admet O_1 comme élément double avec les mêmes éléments tangents que f; donc O_1 est commun six fois au moins à f et à H.

Mais si l'on suppose que les éléments tangents à f en O_1 n'admettent pas O_1 commun plus de trois fois avec f, ce qui revient à dire que les coefficients de x_2^3 et de x_3^3 dans f_3 ne sont pas nuls, f et H n'admettent pas O_1 commun plus de six fois, comme on le voit sur le cas particulier simple

$$f = x_1 x_2 x_3 + a x_2^3 + b x_3^3,$$

dans lequel

$$H = 2 x_1 x_2 x_3 - 6 a x_2^3 - 6 b x_3^3.$$

Un élément double ordinaire diminue donc le nombre des éléments inflexionnels de six unités.

Enfin, pour un élément cuspidal en O_1, on a, dans les mêmes conditions que précédemment,

$$H = -2(p-1)(p-2) x_1^{3p-9} x_2^2 \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_3^2} + x_1^{3p-10} g_4 + \ldots + g_{3p-6},$$

de sorte que la hessienne admet O_1 comme élément triple, deux des éléments tangents étant confondus avec Ω_3 tangent à f, l'autre étant distinct; O_1 est donc commun au moins huit fois à f et à H; il ne l'est pas davantage, comme le montre le cas particulier déjà employé. Par suite un élément cuspidal diminue le nombre des éléments inflexionnels de huit unités.

182. De ce qui précède résultent les relations immédiates

$$\pi = p(p-1) - 2d - 3r,$$
$$\rho = 3p(p-2) - 6d - 8r,$$

et de même

$$p = \pi(\pi-1) - 2\delta - 3\rho,$$
$$r = 3\pi(\pi-2) - 6\delta - 8\rho;$$

l'une ou l'autre de ces dernières formules donne encore

$$2\delta = p(p-2)(p^2-9) - \{d(p^2-p-5) - 3r(2p^2-2p-9) + (2d+3r)^2;$$

on aurait de même $2d$ en fonction de π, δ et ρ.

On peut écrire aussi cette dernière formule

$$\delta = \frac{1}{2} p(p-2)(p^2-9) - 2d(\pi-4)$$
$$- 3r(\pi-3) - 2d(d-1) - 6dr - \frac{9}{2} r(r-1),$$

et, sous cette forme, on pourrait l'obtenir directement : en effet, d'après ce qui sera dit au n° 198, si $d = r = 0$, on trouve

$$\delta = \frac{1}{2} p(p-2)(p^2-9);$$

si maintenant d et r ne sont pas nuls, il faut supprimer les solutions qui correspondent aux éléments tangents menés par les éléments multiples et aux éléments qui contiennent deux éléments multiples : on arrive alors sans peine à la formule ci-dessus.

Telles sont les *formules de Plücker*, reliant les nombres p, d, r, π, δ, ρ; elles sont indépendantes au nombre de trois seulement.

On remarquera les relations

$$3p - r = 3\pi - \rho,$$

$$\frac{(p+1)(p+2)}{2} - d - 2r = \frac{(\pi+1)(\pi+2)}{2} - \delta - 2\rho,$$

dont la seconde exprime que les séries f et φ_0 dépendent d'autant de paramètres indépendants, et surtout celle-ci

$$\frac{(p-1)(p-2)}{2} - d - r = \frac{(\pi-1)(\pi-2)}{2} - \delta - \rho = g;$$

le nombre g est le *genre* des séries f et φ_0.

Il est facile de voir que g n'est pas négatif, c'est-à-dire que $d + r$ n'est pas supérieur à $\frac{(p-1)(p-2)}{2}$, si toutefois la série f ne se décompose pas en séries de degré inférieur. Si, en effet, f avait $\frac{(p-1)(p-2)}{2} + 1$ éléments doubles, prenons une série h contenant tous ces éléments et qui soit de degré $p-2$; cette série pourra encore être assujettie à contenir $p-3$ éléments arbitraires de f, car

$$\frac{(p-1)(p-2)}{2} + 1 + p - 3 = \frac{p(p-1)}{2} - 1;$$

alors f et h ont en commun $2\left[\frac{(p-1)(p-2)}{2} + 1\right] + p - 3$ éléments au moins; ce nombre est égal à $p(p-2) + 1$; donc il faut que f et h aient une infinité d'éléments communs et, par suite, que f se décompose.

Remarquons que si $d = 0$, on ne peut avoir, sauf pour $p = 3$

ou $p = 4$,

$$r = \frac{(p-1)(p-2)}{2};$$

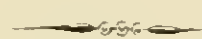
en effet, les formules de Plücker donnent alors

$$r \leq \frac{p(p-1)}{3} \quad \text{et} \quad r \leq \frac{3p(p-2)}{8}.$$

Si $g = 0$, on a $d + r = \frac{(p-1)(p-2)}{2}$; si alors une série h de degré $p - 2$ contient les éléments doubles de f et $p - 3$ éléments arbitraires de f, un raisonnement semblable au précédent montre qu'elle a encore avec f un élément commun et un seul qui, d'ailleurs, peut être choisi à volonté puisque, dans ce cas, h dépend linéairement d'un paramètre; il en résulte que les coordonnées des éléments de f peuvent s'exprimer rationnellement en fonction de ce paramètre; la série f est dite *rationnelle*.

On arrive au même résultat en prenant h de degré $p - 1$, et l'assujettissant à contenir les éléments doubles de f ainsi que $2p - 3$ éléments arbitraires fixes de f.

Nous démontrerons plus loin la réciproque de la proposition que nous venons d'obtenir.



CHAPITRE V.

GÉNÉRATIONS DIVERSES DES SÉRIES TERNAIRES.

I. — Théorie générale de l'élimination.

183. Pour résoudre la plupart des questions que nous nous proposons de traiter dans ce Chapitre, il est tout d'abord nécessaire de donner une théorie générale de l'élimination.

Le problème le plus général de l'élimination peut s'énoncer ainsi :

Considérons m séries de variables homogènes,

$$\begin{array}{cccc} x_1, & x_2, & \ldots & x_{n_1}, \\ y_1, & y_2, & \ldots & y_{n_2}, \\ z_1, & z_2, & \ldots & z_{n_3}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

les nombres $n_1, n_2, n_3, \ldots$ étant distincts ou égaux, peu importe ; posons

$$n_1 + n_2 + n_3 + \ldots - m + 1 = n,$$

et soient n équations entre les variables considérées

$$f_1 = 0, \qquad f_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad f_n = 0,$$

qui soient respectivement des degrés $p_1, p_2, \ldots, p_n$; $q_1, q_2, \ldots, q_n$; $r_1, r_2, \ldots, r_n$; ... par rapport aux (x), (y), (z), ... On cherche la condition nécessaire et suffisante pour que ces équations aient un système de solutions communes.

Nous avons déjà résolu quelques cas particuliers de ce problème général : il suffit de suivre la méthode employée dans ces cas particuliers pour obtenir la solution cherchée.

On démontrera d'abord que la condition nécessaire et suffisante pour que les équations données aient un système de solutions

communes est que l'on puisse vérifier l'identité

$$f_1 g_1 + f_2 g_2 + \ldots + f_n g_n = 0,$$

g_1, par exemple, étant un polynome analogue à f_1, et des degrés $p_2 + p_3 + \ldots + p_n - n_1 + 1$, $q_2 + q_3 + \ldots + q_n - n_2 + 1$, ..., par rapport aux (x), (y), ...; de plus cette identité devra être vérifiée par des solutions autres que celles qui se présentent naturellement, et qui résultent des relations telles que $f_1 f_2 - f_2 f_1 = 0$, où les seconds facteurs sont supposés développés. Les premiers membres de ces relations sont eux-mêmes liés par des relations du *second ordre* telles que

$$f_1(f_2 f_3 - f_3 f_2) + f_2(f_3 f_1 - f_1 f_3) + f_3(f_1 f_2 - f_2 f_1) = 0;$$

et ainsi de suite.

Ceci posé, on voit que l'on est amené à écrire que des formes telles que

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2} \ldots z_1^{\gamma_1} z_2^{\gamma_2} \ldots f_1, \quad \ldots,$$

où

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots = p_2 + p_3 + \ldots + p_n - n_1 + 1, \quad \ldots,$$

sont liées par une relation linéaire, indépendante des relations du premier ordre citées plus haut.

Le nombre de ces formes est

$$= \sum \frac{1}{\mathrm{P}_{n_1 - 1}} (p_2 + p_3 + \ldots + p_n)(p_2 + p_3 + \ldots + p_n - 1) \ldots (p_2 + p_3 + \ldots + p_n - n_1 + 2)$$
$$\times \frac{1}{\mathrm{P}_{n_2 - 1}} (q_2 + q_3 + \ldots + q_n)(q_2 + q_3 + \ldots + q_n - 1) \ldots (q_2 + q_3 + \ldots + q_n - n_2 + 2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

le nombre de termes distincts dans chacune d'elles est

$$= \frac{1}{\mathrm{P}_{n_1 - 1}} (p_1 + p_2 + \ldots + p_n)(p_1 + p_2 + \ldots + p_n - 1) \ldots (p_1 + p_2 + \ldots + p_n - n_1 + 2)$$
$$\times \frac{1}{\mathrm{P}_{n_2 - 1}} (q_1 + q_2 + \ldots + q_n)(q_1 + q_2 + \ldots + q_n - 1) \ldots (q_1 + q_2 + \ldots + q_n - n_2 + 2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

elles sont liées par des relations du premier ordre en nombre

$$= \sum \frac{1}{\mathrm{P}_{n_1 - 1}} (p_3 + p_4 + \ldots + p_n)(p_3 + p_4 + \ldots + p_n - 1) \ldots (p_3 + p_4 + \ldots + p_n - n_1 + 2)$$
$$\times \frac{1}{\mathrm{P}_{n_2 - 1}} (q_3 + q_4 + \ldots + q_n)(q_3 + q_4 + \ldots + q_n - 1) \ldots (q_3 + q_4 + \ldots + q_n - n_2 + 2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

les premiers membres de ces relations sont liés par des relations du second ordre en nombre :

$$\begin{aligned}N_3 = \sum & \frac{1}{P_{n_1-1}}(p_4+p_5+\ldots+p_n)(p_4+p_5+\ldots+p_n-1)\ldots(p_4+p_5+\ldots+p_n-n_1+2)\\ \times & \frac{1}{P_{n_2-1}}(q_4+q_5+\ldots+q_n)(q_4+q_5+\ldots+q_n-1)\ldots(q_4+q_5+\ldots+q_n-n_2+2)\\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

et ainsi de suite, jusqu'à des relations de l'ordre $n-2$, en nombre

$$\begin{aligned}N_{n-1} = \sum & \frac{1}{P_{n_1-1}}p_n(p_n-1)\ldots(p_n-n_1+2)\\ \times & \frac{1}{P_{n_2-1}}q_n(q_n-1)\ldots(q_n-n_2+2)\\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

on vérifie sans peine que l'on a

$$N - N_1 + N_2 - N_3 + \ldots = 0;$$

alors la condition cherchée se présente sous la forme

$$R = \frac{D D_2 D_4 \ldots}{D_1 D_3 D_5 \ldots} = 0,$$

D étant un déterminant d'ordre N tiré des N_1 formes obtenues; D_1 étant un déterminant d'ordre $N_1 - N$ tiré des relations du premier ordre; D_2 étant un déterminant d'ordre $N_2 - N_1 + N$ tiré des relations du second ordre; et ainsi de suite.

Les coefficients des formes et des relations sont linéaires par rapport aux coefficients des formes données; le degré du *résultant* R par rapport à ces coefficients sera donc

$$N - (N_1 - N) + (N_2 - N_1 + N) - \ldots,$$

ou bien, en faisant le calcul,

$$\Sigma p_1 p_2 \ldots p_{n_1-1} q_{n_1} q_{n_1+1} \ldots q_{n_1+n_2-2} r_{n_1+n_2-1} r_{n_1+n_2} \ldots r_{n_1+n_2+n_3-3} \ldots,$$

chaque terme renfermant $n-1$ facteurs d'indices différents, dont $n_1 - 1$ sont des p_i.

Par rapport aux coefficients de f_1 par exemple, on voit sans peine que le résultant R est d'un degré égal à la partie de la somme précédente qui ne contient aucun des nombres p_1, q_1, r_1, ...

Ce degré est évidemment le nombre des solutions des équations

$$f_2 = 0, \qquad f_3 = 0, \qquad \ldots, \qquad f_n = 0;$$

car le résultant est à un facteur numérique près le produit des valeurs de f_1 pour les solutions des équations précédentes.

On exprimera que parmi les systèmes de solutions communes à $f_2 = 0$, $f_3 = 0$, ..., $f_n = 0$, il y en q qui appartiennent à $f_1 = 0$, comme nous l'avons fait dans les cas particuliers déjà traités; et l'on pourra calculer ces solutions communes d'une façon toute pareille.

Ajoutons qu'un système de solutions de $f_2 = 0$, $f_3 = 0$, ..., $f_n = 0$, sera multiple, et en général double, si tous les déterminants d'ordre $n - 1$, tirés de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_{n_1}} & \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial y_{n_2}} & \frac{\partial f_2}{\partial z_1} & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial z_{n_3}} & \ldots \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_3}{\partial x_{n_1}} & \frac{\partial f_3}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial f_3}{\partial y_{n_2}} & \frac{\partial f_3}{\partial z_1} & \ldots & \frac{\partial f_3}{\partial z_{n_3}} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{n_1}} & \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial y_{n_2}} & \frac{\partial f_n}{\partial z_1} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial z_{n_3}} & \ldots \end{matrix} \right\|,$$

sont nuls pour ce système de solutions.

Enfin remarquons que le résultant R est un invariant multiple qui, relativement au groupe des (x) par exemple, est d'ordre

$$\Sigma p_1 p_2 \ldots p_{n_1} q_{n_1+1} q_{n_1+2} \ldots q_{n_1+n_2-1} r_{n_1+n_2} r_{n_1+n_2+1} \ldots r_{n_1+n_2+n_3-2} \ldots,$$

chaque terme renfermant n facteurs d'indices différents, dont n_1 sont des p_i.

II. — Les séries rationnelles.

184. Au lieu de définir une série par une équation $f = 0$, il arrive souvent qu'on la détermine d'une façon différente, plus ou moins simple. Nous allons passer en revue quelques-unes des plus importantes de ces représentations nouvelles.

On peut supposer que les coordonnées d'un élément variable (x) sont exprimées en fonction de deux paramètres λ_1, λ_2, homogènes, comme formes de même degré p par rapport à ces paramètres.

On a ainsi

$$\rho x_i = f_i(\lambda_1, \lambda_2),$$

ρ étant un paramètre d'homogénéité, et les f_i étant des formes de degré p par rapport aux (λ).

Il est clair alors que, si les (λ) varient, l'élément (x) décrit une série f, ternaire, qui est dite *rationnelle*.

Le degré de la série f est p; car l'élément quelconque (ξ) a, avec f, p éléments communs définis par l'équation

$$\xi_1 f_1 + \xi_2 f_2 + \xi_3 f_3 = 0.$$

Nous supposons ici que les f_i n'ont pas de facteur commun, de sorte qu'à tout système de valeur des (λ) correspond un élément (x) déterminé; nous supposons en outre qu'il n'existe pas d'une façon constante plusieurs systèmes de valeurs des (λ) définissant le même élément (x) : sous ces conditions, la série f est indécomposable. Son équation s'obtient en éliminant les (λ) entre les équations

$$\frac{x_1}{f_1} = \frac{x_2}{f_2} = \frac{x_3}{f_3};$$

à cet effet, on éliminera les (λ) entre les équations

$$x_1 f_2 - x_2 f_1 = 0, \qquad x_1 f_3 - x_3 f_1 = 0,$$

par exemple, et l'on supprimera dans le résultant obtenu le facteur évident x_1^p.

On peut encore obtenir l'équation de f sous forme de déterminant en éliminant linéairement les quantités telles que $\lambda_1^{p_1}\lambda_2^{2p-p_1-1}$ et $\rho\lambda_1^{p_1}\lambda_2^{p-p_1-1}$ entre les équations de la forme

$$\rho x_i \lambda_1^{p_1}\lambda_2^{p-p_1-1} = \lambda_1^{p_1}\lambda_2^{p-p_1-1} f_i(\lambda_1, \lambda_2),$$

en nombre $3p$, comme les quantités à éliminer.

185. Les éléments communs à f et à (ξ) sont donnés par

$$\xi_1 f_1 + \xi_2 f_2 + \xi_3 f_3 = 0;$$

si donc (ξ) est tangent à f en (x), correspondant à (λ), ou, pour abréger, tangent en (λ), cette équation a une racine double, de

sorte que

$$\xi_1 \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_1} + \xi_2 \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_1} + \xi_3 \frac{\partial f_3}{\partial \lambda_1} = 0,$$

$$\xi_1 \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_2} + \xi_2 \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_2} + \xi_3 \frac{\partial f_3}{\partial \lambda_2} = 0;$$

on a donc, pour définir la série tangentielle φ_0 de f, les formules

$$\rho\xi_1 = \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_1}\frac{\partial f_3}{\partial \lambda_2} - \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_2}\frac{\partial f_3}{\partial \lambda_1},$$

$$\rho\xi_2 = \frac{\partial f_3}{\partial \lambda_1}\frac{\partial f_1}{\partial \lambda_2} - \frac{\partial f_3}{\partial \lambda_2}\frac{\partial f_1}{\partial \lambda_1},$$

$$\rho\xi_3 = \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_1}\frac{\partial f_2}{\partial \lambda_2} - \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_2}\frac{\partial f_2}{\partial \lambda_1}.$$

Si un couple de valeurs (λ) annule les trois seconds membres de ces formules, tout élément (ξ) contenant (λ) admet cet élément commun deux fois avec f; (λ) est donc double sur f, et l'élément tangent est défini par les équations compatibles

$$\Sigma\xi_i \frac{\partial^2 f_i}{\partial \lambda_1^2} = 0, \qquad \Sigma\xi_i \frac{\partial^2 f_i}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} = 0, \qquad \Sigma\xi_i \frac{\partial^2 f_i}{\partial \lambda_2^2} = 0;$$

(λ) est donc, en restant dans le cas le plus général, un élément cuspidal de f.

Supposons que les valeurs des $\rho\xi_i$ admettent ainsi r facteurs communs; en supprimant ces facteurs, on voit que le degré de φ_0, c'est-à-dire la classe de f, est $2(p-1)-r$.

Les éléments inflexionnels de f sont définis par la condition que (ξ) ait (λ) trois fois commun avec f, c'est-à-dire par l'équation

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial \lambda_1^2} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial \lambda_1^2} & \frac{\partial^2 f_3}{\partial \lambda_1^2} \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} & \frac{\partial^2 f_3}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial \lambda_2^2} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial \lambda_2^2} & \frac{\partial^2 f_3}{\partial \lambda_2^2} \end{vmatrix} = 0;$$

ils sont donc, en général, en nombre $3(p-2)$; mais si f admet, comme précédemment, un élément stationnaire (λ), il est facile de voir que (λ) est racine double de l'équation précédente; celle-ci

peut s'écrire en effet, au facteur λ_2^3 fois près,

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial f_3}{\partial \lambda_1} \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial \lambda_1^2} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial \lambda_1^2} & \frac{\partial^2 f_3}{\partial \lambda_1^2} \end{vmatrix} = 0,$$

et il suffit alors de prendre la dérivée du premier membre par rapport à λ_1 pour vérifier la proposition annoncée.

Si donc f admet r éléments stationnaires, le nombre ρ de ses éléments inflexionnels est $3(p-2)-2r$.

La série f admet aussi des éléments doubles à éléments tangents distincts; pour les déterminer, il faut chercher les couples (λ), (λ') qui donnent aux (x) des valeurs proportionnelles. On a donc à résoudre les équations

$$\frac{f_1(\lambda_1, \lambda_2)}{f_1(\lambda'_1, \lambda'_2)} = \frac{f_2(\lambda_1, \lambda_2)}{f_2(\lambda'_1, \lambda'_2)} = \frac{f_3(\lambda_1, \lambda_2)}{f_3(\lambda'_1, \lambda'_2)};$$

les f_i restant arbitraires, il faut d'ailleurs supposer $(\lambda\lambda') \neq 0$.

Éliminons les (λ') entre les équations entières

$$\frac{f_1(\lambda)f_2(\lambda') - f_1(\lambda')f_2(\lambda)}{(\lambda\lambda')} = 0,$$

$$\frac{f_1(\lambda)f_3(\lambda') - f_1(\lambda')f_3(\lambda)}{(\lambda\lambda')} = 0,$$

et divisons le résultat obtenu par $[f_1(\lambda)]^{p-1}$, qui y entre nécessairement en facteur; le quotient, de degré $(p-1)(p-2)$, donne autant de valeurs pour les (λ); donc, à cause de la symétrie des équations par rapport aux (λ) et aux (λ'), il y a $\frac{(p-1)(p-2)}{2}$ couples de systèmes (λ), (λ'), correspondant à autant d'éléments doubles pour f.

D'autre part, il n'est pas difficile de voir, en appliquant la règle de L'Hospital par exemple, que les équations entre lesquelles nous avons éliminé les (λ') sont vérifiées quand on suppose les (λ) et les (λ') égaux aux paramètres relatifs à un élément stationnaire; donc le résultant trouvé précédemment admet les valeurs de ces

paramètres comme racines doubles, et finalement le nombre des éléments doubles à éléments tangents distincts de f est, en général, $\frac{(p-1)(p-2)}{2} - r$.

Les nombres que nous venons de déterminer sont d'accord avec les formules de Plücker; ils conduisent au nombre des éléments tangents doubles, soit

$$\delta = 2(p-2)(p-3) - 2pr + \frac{r(r+11)}{2}.$$

La formule

$$\rho = 3(p-2) - 2r$$

donne une limite supérieure de r pour les séries rationnelles, soit

$$r \leq \frac{3}{2}(p-2).$$

186. La forme

$$\xi_1 f_1 + \xi_2 f_2 + \xi_3 f_3$$

détermine la série f, et réciproquement, à des substitutions linéaires près. Ses invariants multiples, indépendants des variables binaires (λ) et de celles qui peuvent leur être associées, seront les invariants de la série rationnelle f.

III. — Générations diverses.

187. Les équations

$$f_1(x_1, x_2, x_3; \lambda_1, \lambda_2) = 0,$$
$$f_2(x_1, x_2, x_3; \lambda_1, \lambda_2) = 0,$$

où f_1 et f_2 sont des formes des degrés p_1 et p_2 par rapport aux (x), q_1 et q_2 par rapport aux (λ), définissent, après élimination des (λ), une série f de degré $p_1 q_2 + p_2 q_1$ en général; c'est le lieu des éléments communs aux séries ternaires f_1 et f_2, lorsque les (λ) varient.

Considérons l'élément tangent (ξ) à f, en un élément (x) correspondant aux valeurs (λ) des paramètres. Si (X) est un élément de (ξ), les éléments de (ξ) sont $(\rho_1 x + \rho_2 X)$, et ceux qui

appartiennent à f sont déterminés par les équations

$$f_1(\rho_1 x + \rho_2 X, \lambda) = 0,$$
$$f_2(\rho_1 x + \rho_2 X, \lambda) = 0;$$

ces équations en (ρ) et (λ) sont vérifiées pour $\rho_2 = 0$ et les valeurs considérées pour les (λ), qui correspondent à (x); écrivant que ce système de solutions est double, on obtient l'équation de (ξ) en égalant à zéro l'un des déterminants tirés de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} X_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + X_2 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} + X_3 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_3} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \lambda_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \lambda_2} \\ X_1 \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} + X_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} + X_3 \dfrac{\partial f_2}{\partial x_3} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \lambda_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \lambda_2} \end{matrix} \right\|.$$

En général, la série f n'aura pas d'éléments cuspidaux; car il faudrait que l'équation de (ξ) devînt indéterminée. Mais la série f aura des éléments doubles à éléments tangents distincts; pour les obtenir, écrivons que les équations $f_1 = 0$ et $f_2 = 0$, où les (λ) sont les inconnues, ont deux racines communes.

Leur résultant R, de degré $p_1 q_2 + p_2 q_1$ par rapport aux (x), doit être nul; de plus, la dérivée partielle de R par rapport au coefficient α de $\lambda_1^{q_1}$ dans f_1 doit être nulle; cette dérivée est de degré $p_1(q_2 - 1) + p_2 q_1$ par rapport aux (x), de sorte que ces équations $R = 0$ et $\frac{\partial R}{\partial \alpha} = 0$ ont

$$(p_1 q_2 + p_2 q_1)[p_1(q_2 - 1) + p_2 q_1]$$

racines communes.

Mais ces équations sont encore vérifiées si f_2 a une racine double appartenant à f_1, d'après ce que l'on a dit sur la détermination des racines communes à deux équations; et aussi, si f_1 et f_2 ont pour racine commune $\lambda_1 = 0$. Dans le premier cas, on a simultanément

$$f_1 = 0, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_1} = 0, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_2} = 0,$$

équations qui admettent $2 p_1 p_2 (q_2 - 1) + p_2^2 q_1$ solutions.

Dans le second cas, les coefficients de $\lambda_2^{q_1}$ et $\lambda_2^{q_2}$ dans f_1 et f_2 sont nuls, ce qui donne $p_1 p_2$ solutions; mais ces solutions appartiennent q_1 fois aux équations $R = 0$ et $\frac{\partial R}{\partial \alpha} = 0$; si, en effet,

$(\lambda^{(1)}), (\lambda^{(2)}), \ldots$ sont les racines de $f_2 = 0$, on a

$$R = f_1(\lambda^{(1)}) f_1(\lambda^{(2)}) f_1(\lambda^{(3)}) \ldots = f_1(\lambda^{(1)}) R',$$
$$\frac{\partial R}{\partial x} = \Sigma(\lambda_1^{(1)})^{q_1} f_1(\lambda^{(2)}) f_1(\lambda^{(3)}) \ldots = (\lambda^{(1)})^{q_1} R' + f_1(\lambda^{(1)}) R'';$$

si $\lambda_1^{(1)} = 0$ est racine commune à f_1 et f_2, R' et R'' ne s'annulent pas, et l'on voit bien par ces formules que le système de valeurs (x) correspondant est une solution multiple d'ordre q_1 pour $R = 0$ et $\frac{\partial R}{\partial x} = 0$.

Enfin, si un système de valeurs (x) correspond à deux racines communes pour $f_1 = 0$ et $f_2 = 0$, c'est une solution double pour les équations $R = 0$ et $\frac{\partial R}{\partial x} = 0$, puisque toutes les dérivées de R par rapport aux coefficients de f_1 et f_2 sont nulles. Donc, finalement, le nombre des éléments doubles de f sera

$$\frac{1}{2}\{(p_1 q_2 + p_2 q_1)[p_1(q_2 - 1) + p_2 q_1] - 2 p_1 p_2 (q_2 - 1) - p_2^2 q_1 - p_1 p_2 q_1\},$$

soit

$$p_1^2 \frac{q_2(q_2 - 1)}{2} + p_1 p_2 (q_1 - 1)(q_2 - 1) + p_2^2 \frac{q_1(q_1 - 1)}{2}.$$

188. On peut maintenant envisager une série f définie par les équations

$$\rho x_i = f_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3),$$

les f_i étant des formes de même degré p, et les (λ) étant liés par une relation telle que

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 0,$$

φ étant une forme de degré q.

La série f sera de degré pq.

L'équation de l'élément (ξ) tangent à f en (x) correspondant à (λ) se trouve sans peine en écrivant que les séries en (λ)

$$\xi_1 f_1 + \xi_2 f_2 + \xi_3 f_3 = 0, \qquad \varphi(\lambda) = 0,$$

sont tangentes en l'élément (λ); on a ainsi

$$\frac{\Sigma \xi_i \frac{\partial f_i}{\partial \lambda_1}}{\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_1}} = \frac{\Sigma \xi_i \frac{\partial f_i}{\partial \lambda_2}}{\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_2}} = \frac{\Sigma \xi_i \frac{\partial f_i}{\partial \lambda_3}}{\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_3}};$$

on a aussi $\Sigma\xi_i X_i = 0$, en désignant par (X) un élément de (ξ), comme précédemment; et, par suite, l'équation cherchée est

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial f_3}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial f_3}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_2} \\ \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_3} & \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_3} & \frac{\partial f_3}{\partial \lambda_3} & \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_3} \end{vmatrix} = 0.$$

En général, la série f n'aura pas d'éléments cuspidaux; car il faut pour cela que l'équation précédente devienne indéterminée. Mais elle aura des éléments doubles ordinaires, correspondant à deux systèmes de valeurs (λ) et (λ').

Éliminant les (λ') entre les équations

$$f_1(\lambda)f_2(\lambda') - f_2(\lambda)f_1(\lambda') = 0,$$
$$f_1(\lambda)f_3(\lambda') - f_3(\lambda)f_1(\lambda') = 0,$$
$$\varphi(\lambda') = 0,$$

on obtient un résultant de degré $2p^2q$ par rapport aux (λ), qui contient en facteur évidemment $\varphi(\lambda)$ et $[f_1(\lambda)]^{pq}$; ôtant ces facteurs, le quotient n'est plus que de degré $(p^2-1)q$; égalé à zéro et combiné avec $\varphi(\lambda) = 0$, il détermine $(p^2-1)q^2$ systèmes de valeurs (λ). Mais parmi ces systèmes, il y en a encore à supprimer : en effet, les séries en (λ'), définies par les deux premières équations précédentes, sont tangentes en leur élément commun (λ), comme le montre un calcul facile, si le jacobien $J[f_1(\lambda), f_2(\lambda), f_3(\lambda)]$ est nul; les équations $J = 0$ et $\varphi = 0$ déterminent donc $3q(p-1)$ éléments (λ) qui ne répondent pas à la question posée. Finalement, il nous reste $(p^2-1)q^2 - 3(p-1)q$ valeurs des (λ) correspondant à des éléments doubles de f_1, et ceux-ci sont par suite en nombre $\frac{(p^2-1)q^2 - 3(p-1)q}{2}$.

On peut ajouter que si la série $\varphi = 0$ a un élément double ou cuspidal, il lui correspond un élément de même nature pour f_1 en dehors des éléments doubles précédemment déterminés. On a

$$\frac{(p^2-1)q^2 - 3(p-1)q}{2} = \frac{(pq-1)(pq-2)}{2} - \frac{(q-1)(q-2)}{2};$$

donc le genre de f est le même que celui de la série φ.

Cette proposition n'est démontrée que pour les cas généraux que nous avons envisagés; mais elle est toujours vraie.

189. De même, on peut définir f par les équations

$$f_i(x_1, x_2, x_3; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

des degrés respectifs p_i et q_i par rapport aux (x) et aux (λ). La série f est de degré $\Sigma p_1 q_2 q_3$.

L'équation de l'élément tangent (ξ) à f en (x) correspondant aux valeurs (λ) des paramètres est, comme au n° 187, obtenue en égalant à zéro l'un des déterminants de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} X_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + X_2 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} + X_3 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_3} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \lambda_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \lambda_2} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \lambda_3} \\ X_1 \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} + X_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} + X_3 \dfrac{\partial f_2}{\partial x_3} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \lambda_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \lambda_2} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \lambda_3} \\ X_1 \dfrac{\partial f_3}{\partial x_1} + X_2 \dfrac{\partial f_3}{\partial x_2} + X_3 \dfrac{\partial f_3}{\partial x_3} & \dfrac{\partial f_3}{\partial \lambda_1} & \dfrac{\partial f_3}{\partial \lambda_2} & \dfrac{\partial f_3}{\partial \lambda_3} \end{matrix} \right\|.$$

En général, la série f n'a pas d'éléments cuspidaux. Elle a des éléments doubles ordinaires, que l'on détermine en écrivant que les équations $f_i = 0$, où les (λ) sont les inconnues, ont deux systèmes de solutions communes. En raisonnant comme au n° 187, on trouve que le nombre des éléments doubles de f est

$$p_1^2 \frac{q_2 q_3 (q_2 q_3 - 1)}{2} + \ldots$$
$$+ p_2 p_3 \left[(q_1 q_2 - 1)(q_1 q_3 - 1) - \frac{(q_1 - 1)(q_1 - 2)}{2} \right] + \ldots.$$

On remarquera que, si l'on éliminait les (x) entre les équations $f_i = 0$, on serait conduit à une série $\varphi(\lambda) = 0$, qui correspond à la série f, élément à élément. Son degré serait $\Sigma q_1 p_2 p_3$, et le nombre de ses éléments doubles

$$q_1^2 \frac{p_2 p_3 (p_2 p_3 - 1)}{2} + \ldots$$
$$+ q_2 q_3 \left[(p_1 p_2 - 1)(p_1 p_3 - 1) - \frac{(p_1 - 1)(p_1 - 2)}{2} \right] + \ldots.$$

Le genre des séries f et φ est par suite le même et égal à

$$\frac{p_1^2 q_2 q_3}{2} + \ldots + \frac{q_1^2 p_2 p_3}{2} + \ldots + p_1 q_1 (p_2 q_3 + p_3 q_2) + \ldots$$
$$- \frac{3}{2} q_1 p_2 p_3 - \ldots - \frac{3}{2} p_1 q_2 q_3 - \ldots + 1.$$

C'est encore là un théorème toujours vrai.

190. D'une façon analogue, définissons f par les équations

$$\rho x_i = f_i(\lambda_1, \lambda_2; \mu_1, \mu_2),$$

les f_i étant des formes des mêmes degrés p et q par rapport aux variables binaires (λ) et (μ), et celles-ci étant liées par une relation telle que

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2; \mu_1, \mu_2) = 0,$$

des degrés r et s.

La série f sera de degré $ps + qr$; si cependant les formes f et g étaient symétriques par rapport aux (λ) et aux (μ), ce degré se réduirait évidemment de moitié.

L'équation de l'élément (ξ), tangent à f en (x) correspondant aux valeurs (λ) et (μ) des paramètres, sera obtenue en égalant à zéro l'un des déterminants de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} X_1 & X_2 & X_3 & 0 \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial \lambda_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \lambda_1} & \dfrac{\partial f_3}{\partial \lambda_1} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial \lambda_1} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial \lambda_2} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \lambda_2} & \dfrac{\partial f_3}{\partial \lambda_2} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial \lambda_2} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial \mu_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \mu_1} & \dfrac{\partial f_3}{\partial \mu_1} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial \mu_1} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial \mu_2} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \mu_2} & \dfrac{\partial f_3}{\partial \mu_2} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial \mu_2} \end{matrix} \right\| .$$

Raisonnant comme plus haut, on voit que la série f admet en général des éléments doubles ordinaires en nombre

$$\frac{(ps + qr - 1)(ps + qr - 2)}{2} - (r - 1)(s - 1),$$

formule qui contient un théorème facile à énoncer.

191. De même encore, définissons f par les équations

$$f_i(x_1, x_2, x_3; \lambda_1, \lambda_2; \mu_1, \mu_2) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

des degrés p_i, q_i et r_i par rapport aux (x), aux (λ) et aux (μ).

Le degré de f est ici $\Sigma p_1(q_2 r_3 + q_3 r_2)$, en général.

L'équation de l'élément tangent s'obtient en égalant à zéro l'un

des déterminants de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} X_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + X_2 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} + X_3 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_3} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \lambda_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \lambda_2} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \mu_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \mu_2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix} \right\|.$$

La série f a des éléments doubles ordinaires dont le nombre est facile à trouver en raisonnant comme précédemment. C'est

$$\frac{1}{2} p_1^2 (q_2 r_3 + q_3 r_2)(q_2 r_3 + q_3 r_2 - 1) + \dots$$
$$+ p_2 p_3 [(q_1 r_2 + q_2 r_1 - 1)(q_1 r_3 + q_3 r_1 - 1) - (q_1 - 1)(r_1 - 1)] + \dots.$$

Il est clair que l'on peut continuer de la même façon aussi loin qu'on le veut.

192. Nous avons déjà pu remarquer plusieurs fois l'analogie qui existe entre les formes ternaires à une seule série de variables et les formes binaires à deux séries de variables : nous venons de voir encore comment celles-ci peuvent définir des séries ternaires. Mais on peut en donner d'autres interprétations dans le domaine ternaire. Supposons donnée la forme

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2; \mu_1, \mu_2)$$

et imaginons que les (λ) servent à définir les éléments (y) d'une série rationnelle, et de même que les (μ) définissent les éléments (z) d'une autre série rationnelle qui peut d'ailleurs coïncider avec la première. La relation $\varphi = 0$ établit une correspondance entre les éléments (y) et (z); par suite les éléments (yz) qui contiennent deux éléments correspondants constituent une série ternaire qui se rapporte à la forme φ.

Nous avons déjà vu une application de cette idée au n° 158; alors la forme φ était bilinéaire et les séries formées par les éléments (y) et (z) définis par les (λ) et les (μ) étaient des éléments (ξ). Si l'on conserve cette dernière hypothèse, et si l'on suppose φ des degrés p et q par rapport aux (λ) et aux (μ), on voit que la série des éléments (yz) est en général une série de seconde espèce, de degré $p+q$, admettant les éléments (ξ) formés par les (y) et les (z) comme multiples des degrés p et q. C'est ainsi que la théorie des séries ternaires cubiques ayant un élément

double et que celle des séries biquadratiques ayant deux éléments doubles se ramènent à celles des formes binaires linéo-quadratique et doublement quadratique.

Nous verrons plus loin d'autres applications dans lesquelles nous supposerons surtout que les (λ) définissent une série quadratique.

Il suffit évidemment d'avoir indiqué cet ordre d'idées si fécond pour qu'on puisse en apercevoir immédiatement des généralisations sur lesquelles il est inutile d'insister.

Remarquons encore l'importance qui s'attache, d'après ces considérations, comme d'après celles de tout ce Chapitre, à l'étude des invariants multiples des formes à plusieurs séries de variables, qui ne sont pas nécessairement toutes du même ordre.

IV. — Les enveloppes.

193. Considérons toutes les séries en nombre simplement infini représentées par l'équation

$$f(x_1, x_2, x_3; \lambda_1, \lambda_2) = 0,$$

des degrés p et q par rapport aux (x) et aux (λ), lorsque ces dernières variables sont des paramètres homogènes prenant toutes les valeurs possibles.

Ces séries f forment un ensemble, et il y a q de ces séries qui contiennent un élément donné (x). Le lieu des éléments (x) tels que, parmi les q séries de l'ensemble contenant l'un d'eux, il y en ait au moins deux confondues, est une série g qui est dite l'*enveloppe* des séries f.

L'équation de g est obtenue en égalant à zéro le discriminant de f par rapport aux (λ); donc g est du degré $2p(q-1)$.

Dans le cas particulier où f est linéaire par rapport aux (λ), il n'y a pas d'enveloppe; les séries f contiennent p^2 éléments fixes.

194. L'enveloppe est définie par $\frac{\partial f}{\partial \lambda_1} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial \lambda_2} = 0$; donc, d'après le n° 187, l'équation de l'élément tangent en (x) correspondant à (λ) est obtenue en égalant à zéro l'un des déterminants tirés de

la matrice

$$\left\| \begin{matrix} X_1 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial \lambda_1} + X_2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial \lambda_1} + X_3 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial \lambda_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial \lambda_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} \\ X_1 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial \lambda_2} + X_2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial \lambda_2} + X_3 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial \lambda_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial \lambda_2^2} \end{matrix} \right\|.$$

Remplaçant l'une des lignes de cette matrice par la somme des deux lignes multipliées respectivement par λ_1 et λ_2, il reste, en vertu des hypothèses,

$$X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + X_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0;$$

c'est l'équation de l'élément tangent en (x) à la série f correspondant à (λ); donc l'enveloppe touche toutes les séries f, dites aussi, par suite, *enveloppées*.

L'équation de l'élément tangent précédemment donnée devient indéterminée si l'on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0,$$

ou bien si l'on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \lambda_1^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda_2^2} = 0;$$

dans ces cas, l'enveloppe a en (x) un élément multiple.

Dans le premier cas, l'enveloppée a elle-même en (x) un élément multiple. Si l'enveloppée f a toujours un élément multiple, le lieu de cet élément appartient à l'enveloppe; en effet, les coordonnées (x) de cet élément sont des fonctions des (λ) telles que l'on ait toujours

$$f = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0;$$

on a donc aussi

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda_1} d\lambda_1 + \frac{\partial f}{\partial \lambda_2} d\lambda_2 = 0,$$

$$\lambda_1 \frac{\partial f}{\partial \lambda_1} + \lambda_2 \frac{\partial f}{\partial \lambda_2} = 0,$$

et, par suite,

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial f}{\partial \lambda_2} = 0.$$

D'après ce qui précède, le lieu de cet élément multiple appar-

tient au moins deux fois à l'enveloppe. On vérifierait aisément qu'il lui appartient deux fois si (x) est un élément double ordinaire sur f; trois fois si (x) est constamment stationnaire sur f; etc.

Dans le second cas, (λ) est racine triple pour $f = 0$; en raisonnant comme au n° 185, on trouvera que (x) est stationnaire pour l'enveloppe, l'équation de l'élément tangent unique étant obtenue en égalant à zéro l'un des déterminants tirés de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} X_1 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial \lambda_1} + X_2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial \lambda_1} + X_3 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial \lambda_1} & \dfrac{\partial^3 f}{\partial \lambda_1^3} & \dfrac{\partial^3 f}{\partial \lambda_1^2 \partial \lambda_2} & \dfrac{\partial^3 f}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2^2} \\ X_1 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial \lambda_2} + X_2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial \lambda_2} + X_3 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial \lambda_2} & \dfrac{\partial^3 f}{\partial \lambda_1^2 \partial \lambda_2} & \dfrac{\partial^3 f}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2^2} & \dfrac{\partial^3 f}{\partial \lambda_2^3} \end{matrix} \right\|,$$

c'est-à-dire encore

$$X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + X_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0.$$

Remarquons encore que l'enveloppe peut contenir certaines enveloppées, ou des parties d'enveloppées qui se décomposent : cela arrivera si les fonctions $\frac{\partial f}{\partial \lambda_1}$, $\frac{\partial f}{\partial \lambda_2}$ peuvent devenir identiques en tout ou en partie pour certaines valeurs des (λ).

Dans le cas le plus général, il est facile de déterminer les singularités de l'enveloppe g. Cette série aura un élément cuspidal si l'équation $f = 0$, où les (λ) sont les inconnus, a une racine triple, c'est-à-dire si l'on a à la fois

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \lambda_1^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda_2^2} = 0,$$

équations qui ont $3p^2(q-2)$ solutions.

L'enveloppe g aura un élément double si les équations

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda_1} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial \lambda_2} = 0,$$

ont deux racines communes, ce qui arrivera

$$p^2(q-2)(2q-3)$$

fois; mais de ce nombre il faut retrancher le nombre précédemment obtenu pour les éléments cuspidaux, puisque alors les équations considérées ont une racine double commune. Finalement,

g a donc en général $2p^2(q-2)(q-3)$ éléments doubles ordinaires.

195. Si une série g_0 est tangente à toutes les séries f de l'ensemble considéré, elle fait nécessairement partie de l'enveloppe g de ces séries. En effet, les équations

$$f=0, \qquad g_0=0,$$

déterminent les (x) comme fonctions des (λ); on a alors constamment

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+\frac{\partial f}{\partial x_3}dx_3+\frac{\partial f}{\partial \lambda_1}d\lambda_1+\frac{\partial f}{\partial \lambda_2}d\lambda_2=0,$$

$$\frac{\partial g_0}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial g_0}{\partial x_2}dx_2+\frac{\partial g_0}{\partial x_3}dx_3=0,$$

et de plus, par hypothèse,

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial g_0}{\partial x_1}}=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_2}}{\dfrac{\partial g_0}{\partial x_2}}=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_3}}{\dfrac{\partial g_0}{\partial x_2}};$$

il reste donc $\frac{\partial f}{\partial \lambda_1}d\lambda_1+\frac{\partial f}{\partial \lambda_2}d\lambda_2=0$; d'où, comme précédemment,

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda_1}=\frac{\partial f}{\partial \lambda_2}=0.$$

Si donc φ_0 est la série tangentielle de f, et si ψ_0 est la série tangentielle de l'enveloppe g de f, ou plutôt de la partie de g qui est tangente à toutes les séries f, lorsque g est décomposable, on voit que ψ_0 fera partie de l'enveloppe des séries φ_0.

Toutes les fois que l'enveloppée f est une série linéaire

$$x_1 f_1(\lambda_1,\lambda_2)+x_2 f_2(\lambda_1,\lambda_2)+x_3 f_3(\lambda_1,\lambda_2)=0,$$

les f_i étant de degré q, l'ensemble des f détermine une série de seconde espèce ψ, qui est rationnelle et de degré q; la série tangentielle de ψ fait partie de l'enveloppe des f et coïncide avec elle si ψ n'a pas d'éléments stationnaires; dans le cas contraire, il faut lui adjoindre les éléments stationnaires de ψ pour retrouver l'enveloppe des f : si, en effet, (x) appartient à un tel élément, il existe deux séries f confondues contenant (x). Ces résultats sont

d'accord avec ceux du § 2; car si ψ a ρ éléments stationnaires, la série tangentielle de ψ est de degré $2(q-1)-\rho$, et le degré de l'enveloppe des f est $2(q-1)$.

196. Les enveloppées peuvent être définies par une équation

$$f(x_1, x_2, x_3; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 0,$$

des degrés p et q par rapport aux (x) et aux (λ), ces dernières variables étant liées par une relation $\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 0$, de degré q'. Alors on trouvera l'enveloppe g des séries données en écrivant que les séries en (λ), $f(x, \lambda) = 0$, $\varphi(\lambda) = 0$, sont tangentes; g sera par suite du degré $pq'(2q+q'-3)$.

Les propriétés indiquées précédemment subsistent entièrement. Si, par exemple, on cherche l'enveloppe des éléments tangents à une série donnée de degré p, dont les éléments (y) sont définis par

$$f(y_1, y_2, y_3) = 0,$$

on a pour l'équation d'une enveloppée

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} = 0,$$

et l'enveloppe est de degré $p(3p-5) = p + 3p(p-2)$: elle se compose de la série donnée et de ses éléments tangents stationnaires.

Les singularités d'une enveloppe définie comme nous venons de le dire sont encore faciles à déterminer dans le cas le plus général. L'enveloppe g aura un élément cuspidal si les séries $f(x, \lambda) = 0$ et $\varphi(\lambda) = 0$, en (λ), sont *osculatrices*, c'est-à-dire ont un élément commun triple; de même g aura un élément double ordinaire si les mêmes séries $f(x, \lambda) = 0$ et $\varphi(\lambda) = 0$ sont tangentes en deux éléments distincts. Ces problèmes sont résolus plus loin d'une façon plus générale.

On remarquera que l'enveloppe g peut encore être interprétée comme le lieu des (x) tels que les séries $f(x, \lambda) = 0$ et $\varphi(\lambda) = 0$, en (λ) soient tangentes, ce qui peut mener souvent à des applications intéressantes.

197. De même, on peut définir les enveloppées par les équa-

tions

$$f(x_1, x_2, x_3; \lambda_1, \lambda_2; \mu_1, \mu_2) = 0,$$
$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2; \mu_1, \mu_2) = 0,$$

où les notations sont claires par elles-mêmes. Il faudra évidemment, pour obtenir l'enveloppe g, éliminer les (λ) et les (μ) entre $f = 0$, $\varphi = 0$, et l'une des équations

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial \lambda_1}}{\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_1}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \lambda_2}}{\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_2}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \mu_1}}{\frac{\partial \varphi}{\partial \mu_1}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \mu_2}}{\frac{\partial \varphi}{\partial \mu_2}}.$$

Si f est des degrés p, q, r par rapport aux (x), aux (λ) et aux (μ), et si φ est des degrés q' et r', le degré de l'enveloppe g sera

$$2p[q'r' + q'(r-1) + r'(q-1)].$$

Les singularités de g se détermineront comme plus haut : la solution générale sera indiquée plus loin.

On peut continuer de la même façon.

198. On obtient des généralisations de la notion d'enveloppe par les considérations suivantes.

Envisageons d'abord les deux équations

$$f_1(x_1, x_2, x_3; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 0,$$
$$f_2(x_1, x_2, x_3; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 0,$$

et écrivons, en généralisant ce qui a été dit au n° 196, que ces deux séries en (λ) sont tangentes. On définit ainsi une série g qui est l'enveloppe du système donné.

On peut dire que $g = 0$ est le lieu des (x) tels que si l'on établit une relation quelconque $\varphi(\lambda)$ entre les (λ), la série définie par $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ et $\varphi = 0$ et contenant (x) est toujours tangente à l'enveloppe g en cet élément, ou bien y a un élément multiple. Ceci résulte de l'équation de l'élément tangent donné au n° 189.

En posant

$$\varphi_1 = \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_2}\frac{\partial f_2}{\partial \lambda_3} - \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_3}\frac{\partial f_2}{\partial \lambda_2}, \qquad \dots,$$

l'équation de l'élément tangent à g est obtenue en égalant à zéro

un déterminant convenable du troisième ordre tiré de la matrice

$$\begin{Vmatrix} X_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial f_1}{\partial x_2}+X_3\frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_3} \\ X_1\frac{\partial f_2}{\partial x_1}+\dots\dots\dots\dots & \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_1} & \dots & \dots \\ X_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}+\dots\dots\dots\dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda_1} & \dots & \dots \\ X_1\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}+\dots\dots\dots\dots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \lambda_1} & \dots & \dots \\ X_1\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1}+\dots\dots\dots\dots & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \lambda_1} & \dots & \dots \end{Vmatrix}.$$

Il est facile de voir que si les séries f_1 et f_2 en (λ) sont osculatrices en un élément commun, les déterminants du second ordre tirés de la matrice

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \lambda_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \lambda_2} \\ \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_3} & \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_3} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda_3} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \lambda_3} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \lambda_3} \end{Vmatrix}$$

sont tous nuls pour cet élément ; et réciproquement.

Donc g aura un élément cuspidal dans ce cas ; de plus, g a évidemment un élément double ordinaire dès que les séries $f_1 = 0$ et $f_2 = 0$, en (λ), sont doublement tangentes, c'est-à-dire quand les équations $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ et $\varphi_1 = 0$ ont deux solutions communes distinctes en (λ).

Si f_i est des degrés p_i et q_i par rapport aux (x) et aux (λ), g est du degré $p_1 q_2(2q_1+q_2-3)+p_2 q_1(2q_2+q_1-3)$. Déterminons d'abord ses éléments cuspidaux. On considérera les équations suivantes, qui n'ont pas une infinité de solutions communes,

$$f_1 = 0, \qquad f_2 = 0, \qquad \varphi_1 = 0, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_2}\frac{\partial \varphi_3}{\partial \lambda_3} - \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_3}\frac{\partial \varphi_3}{\partial \lambda_2} = 0;$$

ces équations ont

$$p_1^2 q_2(6q_1+3q_2-8)+p_1p_2(6q_1^2+12q_1q_2+3q_2^2-16q_1-12q_2+8) \\ +p_2^2 q_1(3q_1+3q_2-6)$$

solutions ; mais il faut supprimer, comme ne fournissant pas des

éléments cuspidaux, les solutions des équations

$$(\alpha) \qquad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_2} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_3} = 0,$$

en nombre

$$p_1^2 q_2(3q_1 - 2) + p_1 p_2(3q_1^2 - 4q_1 + 1);$$

les solutions des équations

$$(\beta) \qquad \lambda_1 = 0, \quad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_2}\frac{\partial \varphi_3}{\partial \lambda_3} - \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_3}\frac{\partial \varphi_3}{\partial \lambda_2} = 0,$$

en nombre

$$2p_1^2 q_2 + p_1 p_2(4q_1 + 2q_2 - 4) + p_2^2 q_1;$$

les solutions des équations

$$(\gamma) \qquad \lambda_3 = 0, \quad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \varphi_1 = 0,$$

en nombre

$$p_1^2 q_2 + p_1 p_2(2q_1 + 2q_2 - 2) + p_2^2 q_1;$$

de plus, on a supprimé comme solutions des espèces (α) et (β) les solutions des équations

$$(\delta) \qquad \lambda_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_2} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_3} = 0,$$

en nombre

$$p_1^2 q_2 - p_1 p_2(2q_1 - 2),$$

et, par suite, il faudra les considérer à nouveau; enfin on a supprimé comme solutions des espèces (β) et (γ) les solutions des équations

$$(\varepsilon) \qquad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_3 = 0, \quad f_1 = 0, \quad f_2 = 0,$$

en nombre $p_1 p_2$, et il faudra, par suite, les reprendre.

Finalement, en appelant N, A, B, C, D, E les six nombres que nous venons de calculer, le nombre cherché des éléments stationnaires de g est

$$\mathrm{N} - \alpha\mathrm{A} - \beta\mathrm{B} - \gamma\mathrm{C} + \delta\mathrm{D} + \varepsilon\mathrm{E},$$

α, β, γ, δ, ε désignant certains entiers positifs.

La forme symétrique du résultat par rapport aux p_i et q_i, la connaissance de certains cas particuliers et, au surplus, une étude directe donnent sans peine

$$\alpha = 1, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 1, \quad \delta = 2, \quad \varepsilon = 2,$$

et par suite, le nombre cherché est

$$3p_1^2 q_2(q_1+q_2-3)+p_1p_2(3q_1^2+12q_1q_2+3q_2^2-18q_1-18q_2+15)$$
$$+3p_2^2 q_1(q_1+q_2-3).$$

Pour déterminer les éléments doubles ordinaires de la série g, on considérera les équations

$$f_1=0, \qquad f_2=0, \qquad \varphi_1=0,$$

et l'on écrira qu'elles ont deux solutions communes en (λ), ce que nous savons faire; le nombre des solutions correspondantes est

$$\frac{p_1^2 q_2}{2}[4q_1^2q_2+4q_1q_2^2+q_2^3-8q_1q_2-4q_2^2-6q_1+9]$$
$$+p_1p_2[2q_1^3q_2+5q_1^2q_2^2+2q_1q_2^3-6q_1^2q_2-6q_1q_2^2$$
$$-3q_1^2-4q_1q_2-3q_2^2+9q_1+9q_2-5]$$
$$+\frac{p_2^2q_1}{2}[q_1^3+4q_1^2q_2+4q_1q_2^2-4q_1^2-8q_1q_2-6q_2+9];$$

mais il faut supprimer d'abord les solutions qui correspondent au cas où les équations en (λ)

$$(\alpha) \qquad f_1=0, \qquad f_2=0, \qquad \varphi_1=0,$$

d'une part et

$$\lambda_1=0, \qquad f_1=0, \qquad f_2=0,$$

d'autre part, ont en même temps une solution commune; le résultant des premières est de degré

$$p_1q_2(2q_1+q_2-2)+p_2q_1(q_1+2q_2-2)$$

par rapport aux (x), et contient en facteur le résultant des secondes de degré $p_1q_2+p_2q_1$; donc en tout nous avons ainsi un nombre de solutions égal à

$$p_1^2q_2^2(2q_1+q_2-3)+p_1p_2q_1q_2(3q_1+3q_2-6)+p_2^2q_1^2(q_1+2q_2-3).$$

Il faut supprimer encore les solutions qui correspondent au cas où les équations en (λ)

$$(\beta) \qquad f_1=0, \qquad f_2=0, \qquad \lambda_1=0,$$

ont deux solutions communes, et qui sont en nombre

$$\frac{p_1^2q_2}{2}(q_2-1)+p_1p_2(q_1-1)(q_2-1)+\frac{p_2^2q_1}{2}(q_1-1).$$

De plus, il faut reprendre, comme ayant été supprimées en qua-

lité de solutions (α) et de solutions (β), les solutions qui correspondent au cas où les séries en (λ), $f_1 = 0$ et $f_2 = 0$, ayant un élément commun pour lequel $\lambda_1 = 0$, sont véritablement tangentes en cet élément; ces solutions sont en nombre

$$(\gamma) \qquad p_1^2 q_2 + p_1 p_2 (2q_1 + 2q_2 - 3) + p_2^2 q_1;$$

enfin, il faut supprimer les solutions qui correspondent aux éléments cuspidaux, et déterminées précédemment.

On trouve finalement pour le nombre cherché

$$\begin{aligned} &\frac{p_1^2 q_2}{2} [4q_1^2 q_2 + 4q_1 q_2^2 + q_2^3 - 12q_1 q_2 - 6q_2^2 - 12q_1 - q_2 + 30] \\ &\quad + p_1 p_2 [2q_1^3 q_2 + 5q_1^2 q_2^2 + 2q_1 q_2^3 - 9q_1^2 q_2 - 9q_1 q_2^2 \\ &\qquad\qquad - 6q_1^2 - 11q_1 q_2 - 6q_2^2 + 30q_1 + 30q_2 - 24] \\ &\quad + \frac{p_2^2 q_1}{2} [q_1^3 + 4q_1^2 q_2 + 4q_1 q_2^2 - 6q_1^2 - 12q_1 q_2 - q_1 - 12q_2 + 30]. \end{aligned}$$

199. On peut aussi envisager la série φ obtenue en éliminant les (x) entre les conditions qui expriment que $f_1 = 0$ et $f_2 = 0$ sont tangentes; c'est le lieu des éléments où se touchent les séries $f_1 = 0$ et $f_2 = 0$ en (λ). Elle est de degré

$$p_1^2 q_2 + p_1 p_2 (2q_1 + 2q_2 - 3) + p_2^2 q_1,$$

comme on le voit en éliminant les (x) entre $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $\varphi_1 = 0$, et supprimant le facteur $\lambda_1^{p_1 p_2}$.

Cette série φ n'a pas d'éléments cuspidaux en général; elle a des éléments doubles dont le nombre est facile à déterminer en remarquant que g et φ sont de même genre. On peut aussi les déterminer directement de la façon suivante : on éliminera les (x) entre les équations

$$f_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \varphi_3 = 0;$$

le résultant est de la forme $\varphi\psi\chi$, ψ désignant le résultant de

$$\frac{\partial f_1}{\partial \lambda_1} = 0, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_2} = 0, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_3} = 0,$$

et χ celui des équations

$$f_1 = 0, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_1} = 0, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_1} = 0.$$

On évaluera le nombre de fois que les premières équations ont

deux solutions communes en (x), et de ce nombre, divisé par 2, on retranchera les nombres d'éléments doubles pour ψ et χ, et les nombres d'éléments communs aux séries φ, ψ, χ prises deux à deux; enfin on ajoutera, comme ayant été supprimés à tort, les nombres d'éléments communs à ces mêmes séries deux à deux qui correspondent à un même système de valeurs des (x).

200. On a des résultats analogues en partant des deux équations

$$f_1(x_1, x_2, x_3; \lambda_1, \lambda_2; \mu_1, \mu_2) = 0,$$
$$f_2(x_1, x_2, x_3; \lambda_1, \lambda_2; \mu_1, \mu_2) = 0$$

des degrés p_1 et p_2, q_1 et q_2, r_1 et r_2 par rapport aux (x), aux (λ) et aux (μ), et écrivant que ces deux équations en (λ) et (μ) ont une solution commune double.

L'enveloppe ainsi définie est du degré

$$p_1[q_1 r_1 + q_2 r_2 + 2 q_2(r_1 - 1) + 2 r_2(q_1 - 1)]$$
$$+ p_2[q_1 r_1 + q_2 r_2 + 2 q_1(r_2 - 1) + 2 r_1(q_2 - 1)].$$

Nous n'insisterons pas davantage sur ces généralisations.

201. Considérons maintenant un ensemble doublement infini de séries f, définies par une équation telle que

$$f(x_1, x_2, x_3; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 0,$$

des degrés p et q par rapport aux (x) et aux (λ).

Si l'on écrit que la série f en (λ) a un élément double, c'est-à-dire si l'on égale à zéro le discriminant de f par rapport aux (λ), on définit une série g, de degré $3p(q-1)^2$, qui peut encore être regardée comme une enveloppe des séries f, et qui est le lieu des (x) tels que f ait un élément double en (λ).

Les équations $\frac{\partial f}{\partial \lambda_i} = 0$ définissent les (λ) en fonction des (x) coordonnées d'un élément de g; on a ainsi une relation $\varphi(\lambda) = 0$ correspondante, du degré $3p^2(q-1)$: c'est le lieu des éléments doubles définis plus haut. Les séries f_0 définies par $f = 0$ et $\varphi = 0$ ont pour enveloppe proprement dite g; de plus, si l'on établit entre les (λ) une relation quelconque $\psi(\lambda) = 0$, on définit un ensemble simplement infini de séries f, et leur enveloppe propre-

ment dite touche g aux mêmes éléments que les séries f_0 qui appartiennent à cet ensemble. En d'autres termes, les enveloppes des différents ensembles simplement infinis que l'on peut former avec les séries f touchent toutes g.

Les séries g et φ ont des éléments doubles dont le nombre est facile à déterminer d'après le n° 189. Toutefois il faut observer que la série g aura des éléments cuspidaux correspondant aux cas où la série f en (λ) a un élément cuspidal. Pour en évaluer le nombre, nous chercherons les solutions communes aux équations

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda_i} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda_2^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \lambda_3^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \lambda_2 \partial \lambda_3}\right)^2 = 0,$$

et nous en retrancherons les solutions communes à

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda_i} = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_1 = 0,$$

comptées deux fois.

On trouve ainsi, pour g, $12p^2(q-1)(q-2)$ éléments cuspidaux, et par suite $\frac{3p^2}{2}(q-1)(q-2)(3q^2-3q-11)$ éléments doubles ordinaires.

On peut continuer dans la même voie, en considérant des variables en nombre quelconque, mais ces indications suffisent.

V. — Applications.

202. Soient (y) et (z) deux éléments correspondants de la hessienne H et de la steinérienne S d'une série $f = a_{x^p} = 0$. On a les équations

$$z_1 \frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_i} + z_2 \frac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial y_i} + z_3 \frac{\partial^2 f}{\partial y_3 \partial y_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3);$$

la première polaire $a_{x^{p-1}z} = 0$ de (z) a un élément double en (y); la $(p-2)^{\text{ième}}$ polaire $a_{x^2 y^{p-2}} = 0$ de (y) a un élément double en (z).

La steinérienne, obtenue par élimination des (y) entre les équations précédentes est de degré $3(p-2)^2$.

D'après le n° 189, l'élément tangent (ζ) à S en (z) a pour

équation, après une réduction facile,

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} = 0;$$

(ζ) est donc la $(p-1)^{\text{ième}}$ polaire, ou polaire linéaire de (y).

La classe de S est évidemment d'après cela $3(p-1)(p-2)$.

S peut être regardée comme l'enveloppe au sens du n° 201 des polaires linéaires $a_{xy^{p-1}} = 0$; donc S aura $12(p-2)(p-3)$ éléments cuspidaux et $\frac{3}{2}(p-2)(p-3)(3p^2-9p-5)$ éléments doubles ordinaires; les éléments cuspidaux sont tels que leurs premières polaires aient un élément cuspidal; les éléments doubles sont tels que leurs premières polaires aient deux éléments doubles.

S a par suite $3(p-2)(4p-9)$ éléments inflexionnels et $\frac{3}{2}(p-2)(p-3)(3p^2-3p-8)$ éléments tangents doubles ordinaires.

Il est évident que S touche les éléments tangents stationnaires de f, puisque, si (y) est commun à f et H, c'est un élément inflexionnel, et l'élément tangent correspondant est sa polaire linéaire.

La hessienne H est de même l'enveloppe des secondes polaires $a_{x^{p-2}y^2} = 0$; elle n'a pas en général d'élément multiple; par suite ses singularités sont faciles à déterminer.

Le genre de H et S est le même.

Si (t) et (u) sont tels que leurs premières polaires se touchent en (y), on voit tout de suite que (y) appartient à H; l'élément tangent commun est l'élément (yz) de la cayleyenne, et (tu) touche S en (z), c'est-à-dire est la polaire linéaire de (y).

203. La cayleyenne est la série de seconde espèce lieu des éléments (yz); pour trouver son degré, on cherchera le nombre des solutions communes aux équations

$$(xyz) = 0, \qquad z_1 \frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_i} + z_2 \frac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial y_i} + z_3 \frac{\partial^2 f}{\partial y_3 \partial y_i} = 0,$$

(x) étant quelconque; ce nombre est $3(p-1)(p-2)$. Si $p=3$, il doit être réduit de moitié, comme l'on sait.

La cayleyenne n'a pas d'éléments cuspidaux en général; ses

singularités sont par suite faciles à déterminer, en remarquant que son genre est celui de H et S.

On pourrait facilement multiplier les propriétés des séries dont nous venons de dire quelques mots : remarquons seulement l'extension possible des notions précédentes en partant des polaires d'ordre quelconque.

CHAPITRE VI.

LA FORME BILINÉAIRE ET L'HOMOGRAPHIE.

I. — La forme bilinéaire en général.

204. La forme bilinéaire

$$f(x, \eta) = \Sigma a_{ij} x_i \eta_j \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, 3 \\ j = 1, 2, 3 \end{pmatrix},$$

où l'écriture des coefficients a été simplifiée, comme d'habitude, correspond à l'homographie. Si, en effet, on considère deux espaces X et Y remplis par des éléments de première espèce (x) et (y), et des éléments de seconde espèce (ξ) et (η), $f(x, \eta) = 0$ est l'équation d'un élément (y) correspondant à (x), et l'on peut écrire

$$\frac{y_1}{a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + a_{31} x_3} = \frac{y_2}{a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + a_{32} x_3} = \frac{y_3}{a_{13} x_1 + a_{23} x_2 + a_{33} x_3},$$

et si le déterminant

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

n'est pas nul, on définit ainsi une homographie entre les espaces X et Y.

$f(x, \eta) = 0$ est aussi l'équation de (ξ) correspondant à (η), et l'on a

$$\frac{\xi_1}{a_{11} \eta_1 + a_{12} \eta_2 + a_{13} \eta_3} = \frac{\xi_2}{a_{21} \eta_1 + a_{22} \eta_2 + a_{23} \eta_3} = \frac{\xi_3}{a_{31} \eta_1 + a_{32} \eta_2 + a_{33} \eta_3}.$$

Si les α_{ij} sont les coefficients des a_{ij} dans le déterminant d et si

l'on pose

$$g(\xi, y) = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \xi_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \xi_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \xi_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 & 0 \end{vmatrix} = \Sigma \alpha_{ij} \xi_i y_j,$$

$g = 0$ est l'équation de (η) correspondant à (ξ), ou de (x) correspondant à (y), de sorte que

$$\frac{\eta_1}{\alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{21}\xi_2 + \alpha_{31}\xi_3} = \frac{\eta_2}{\alpha_{12}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \alpha_{32}\xi_3} = \frac{\eta_3}{\alpha_{13}\xi_1 + \alpha_{23}\xi_2 + \alpha_{33}\xi_3},$$

$$\frac{x_1}{\alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \alpha_{13}y_3} = \frac{x_2}{\alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \alpha_{23}y_3} = \frac{x_3}{\alpha_{31}y_1 + \alpha_{32}y_2 + \alpha_{33}y_3}.$$

On a aussi

$$df(x, \eta) = -\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & x_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & x_2 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & x_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Le système f, (x), (ξ), (y), (η) a comme invariants multiples les cinq quantités f, g, d, $(\xi \mid x)$, $(\eta \mid y)$.

205. Considérons le cas où l'on a $d = 0$, sans que tous les mineurs α_{ij} de d soient tous nuls. Par extension, on dit alors que $f = 0$ définit une homographie simplement singulière.

La forme g est ici le produit de deux facteurs, soit $(b \mid \xi)(\gamma \mid y)$, à cause des propriétés des α_{ij}. Par suite, on définit de cette façon deux éléments particuliers des espaces X et Y, soit (b) et (γ) : à (x) quelconque correspond (y) appartenant à (γ), et à (b) correspond (y) quelconque ; à (y) quelconque correspond (b), et à (y) appartenant à (γ) correspond une infinité simple d'éléments (x) alignés avec (b) ; à (ξ) quelconque correspond (γ), et à (ξ) contenant (b) correspond une infinité simple d'éléments (η) alignés avec (γ) ; à (η) quelconque correspond (ξ) contenant (b), et à (γ) correspond (ξ) quelconque.

Si les coefficients α_{ij} sont tous nuls, de sorte que la forme g est nulle identiquement, l'homographie est doublement singulière. f est le produit de deux facteurs $(\beta \mid x)(b \mid \eta)$, et les particularités qui se présentent s'énoncent immédiatement.

Dans tous les cas, les espaces X et Y étant distincts, on peut

réduire f à la forme canonique

$$a_{11}x_1\eta_1 + a_{22}x_2\eta_2 + a_{33}x_3\eta_3,$$

de sorte que

$$d = a_{11}a_{22}a_{33}, \qquad g = a_{22}a_{33}\xi_1 y_1 + a_{33}a_{11}\xi_2 y_2 + a_{11}a_{22}\xi_3 y_3.$$

II. — L'homographie de deux espaces coïncidants.

206. Supposons les espaces X et Y identiques. On peut imaginer alors que les (y) sont les mêmes éléments que les (x) ou bien que les (ξ) : nous envisagerons cette dernière hypothèse plus tard, et ici nous supposerons que les (y) et les (η) sont les mêmes éléments que les (x) et les (ξ) respectivement.

Si nous étudions le système formé par f, les (x) et les (ξ) et si l'on remplace les (y) et les (η) par les (x) et les (ξ), les résultats précédents subsistent d'abord entièrement, et fournissent les invariants f, g, $h = (\xi|x)$ et d, tous faciles à interpréter.

A ces invariants nous adjoindrons d'abord les formes k et χ qui sont les jacobiens de f, g, h considérées comme fonctions soit des (ξ), soit des (x); k et χ sont des formes cubiques

$$k = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 & \dots & \dots \\ \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 & \dots & \dots \\ x_1 & \dots & \dots \end{vmatrix}, \qquad \chi = \begin{vmatrix} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + a_{13}\xi_3 & \dots & \dots \\ \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{21}\xi_2 + \alpha_{31}\xi_3 & \dots & \dots \\ \xi_1 & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Cherchons maintenant les éléments doubles de l'homographie, c'est-à-dire ceux qui se correspondent à eux-mêmes dans les séries X et Y. Pour les déterminer, on a évidemment les équations

$$\begin{aligned} (a_{11} - \rho)x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 &= 0, \\ a_{12}x_1 + (a_{22} - \rho)x_2 + a_{32}x_3 &= 0, \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + (a_{33} - \rho)x_3 &= 0, \end{aligned}$$

ρ étant une inconnue auxiliaire déterminée par l'équation

$$\varphi(\rho) = \begin{vmatrix} a_{11} - \rho & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} - \rho & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \rho \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien

$$\rho^3 - i\rho^2 + j\rho - d = 0,$$

où l'on a fait

$$i = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \qquad j = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}.$$

Les coefficients i et j sont évidemment comme d des invariants proprement dits, d'ordre zéro, car les racines de l'équation en ρ sont manifestement invariantes, $\varphi(\rho)$ étant l'invariant d relatif à $f - \rho h$.

On arriverait aux mêmes résultats par les équations

$$(\alpha_{11} - \sigma)x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

qui conduisent à

$$\sigma^3 - j\sigma^2 + id\sigma - d^2 = 0,$$

de sorte que $\rho\sigma = d$.

De même encore, les éléments doubles de seconde espèce sont déterminés par les équations

$$(a_{11} - \rho)\xi_1 + a_{12}\xi_2 + a_{13}\xi_3 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

ou bien

$$(\alpha_{11} - \sigma)\xi_1 + \alpha_{21}\xi_2 + \alpha_{31}\xi_3 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nous avons ainsi trouvé huit invariants f, g, h, k, χ, i, j, d qui forment un système complet : sept d'entre eux seulement sont indépendants, et la relation qui les lie sera indiquée plus loin.

207. Nous allons retrouver les invariants i et j d'une autre façon qui nous donnera en même temps de nouvelles propositions.

Considérons f comme fonction des (ξ) et g comme fonction des (x), ou inversement; l'invariant K (f, g) défini au n° 150 est alors dh; et en effet la forme g correspond à l'homographie inverse de celle qui est définie par f.

Considérons maintenant f comme fonction des (x) et des (ξ) successivement; il en résulte un invariant K que l'on vérifie sans peine être égal à

$$if - jh + g;$$

c'est aussi

$$(a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3)(a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + a_{13}\xi_3) + \ldots,$$

et, par suite, on voit que $if - jh + g = 0$ est l'équation de (z) de Y, correspondant à (y) de X, (y) correspondant lui-même dans Y à (x) de X; c'est aussi l'équation de (ζ) appartenant à X, correspondant à (η) de Y, (η) correspondant lui-même dans X à (ξ) de Y.

Dans le premier cas, les équations de (x) et (y) étant $h = 0$ et $f = 0$, on voit que les éléments (x), (y), (z) appartiennent à un même faisceau, si l'on a $k = 0$, et seulement alors; dans le second cas, on voit de même que (ξ), (η), (ζ) appartiennent à un même faisceau si l'on a $\chi = 0$, et seulement alors.

En appliquant le même procédé à g, on trouve de même que la quantité

$$(\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3)(\alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{21}\xi_2 + \alpha_{31}\xi_3) + \dots$$

est égale à

$$jg - idh + df;$$

l'équation $jg - idh + df = 0$ s'interprétera comme plus haut.

En vertu des relations que nous venons d'obtenir, on trouve tout de suite, par multiplication de deux déterminants,

$$k\chi = \begin{vmatrix} if - jh + g & dh & f \\ dh & jg - idh + df & g \\ f & g & h \end{vmatrix};$$

c'est la relation qui existe entre les huit invariants du système.

Les invariants absolus géométriques proprement dits dépendent des rapports des racines des équations en ρ ou σ, c'est-à-dire encore des rapports des quantités i^6, j^3 et d^2.

208. Pour aller plus loin, nous allons examiner successivement les divers cas qui se présentent quand on fait les différentes hypothèses possibles sur les racines ρ_1, ρ_2, ρ_3 de l'équation en ρ. Nous supposons d'ailleurs que l'homographie n'est pas singulière, et qu'elle n'est pas définie par la substitution identique.

I. — *L'équation en ρ a trois racines distinctes.*

Il existe alors trois éléments doubles de chaque espèce n'appartenant pas à un même faisceau. Si les (x) doubles sont pris pour

éléments fondamentaux, on a

$$f = a_{11}x_1\xi_1 + a_{22}x_2\xi_2 + a_{33}x_3\xi_3,$$
$$g = a_{22}a_{33}x_1\xi_1 + a_{33}a_{11}x_2\xi_2 + a_{11}a_{22}x_3\xi_3,$$

$$i = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \qquad j = a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} + a_{11}a_{22}, \qquad d = a_{11}a_{22}a_{33},$$

et en appelant A le produit non nul $(a_{22} - a_{33})(a_{33} - a_{11})(a_{11} - a_{22})$,

$$k = \mathrm{A}x_1x_2x_3, \qquad \chi = \mathrm{A}\xi_1\xi_2\xi_3.$$

Les éléments doubles de seconde espèce sont donc les Ω_i, ainsi qu'il était évident; $k = 0$ est leur équation, et de même $\chi = 0$ est l'équation des éléments doubles de première espèce.

Soient (x) et (y) deux éléments correspondants des séries X et Y; leur rapport anharmonique avec les éléments doubles Ω_2 et Ω_3 est $\frac{x_2y_3}{x_3y_2}$, et par suite a la valeur constante $\frac{a_{22}}{a_{33}}$; la même chose a lieu pour les autres éléments doubles et aussi pour les éléments de seconde espèce. Si (z) est commun à Ω_1 et (xy), le rapport anharmonique de (x) et (z) avec Ω_2 et Ω_3 est de même constant et facile à calculer. On a ainsi obtenu la signification géométrique des invariants absolus.

Deux éléments correspondants peuvent être considérés comme deux espaces à une dimension homographiques : il est clair qu'ils sont en homologie si l'un d'eux contient un élément double appartenant nécessairement à l'autre, et dans ce cas seulement.

II. — ρ_1 *est racine simple; on a* $\rho_2 = \rho_3$, *et cette racine double n'annule pas les mineurs du déterminant* $\varphi(\rho)$.

Ce cas est limite du précédent. On peut réduire f à la forme simple

$$f = a_{11}x_1\xi_1 + (a_{22}x_2 + a_{32}x_3)\xi_2 + a_{33}x_3\xi_3,$$

avec

$$a_{22} = a_{33}, \qquad a_{22} \neq a_{11}, \qquad a_{32} \neq 0.$$

O_1 et O_2, Ω_1 et Ω_3 sont doubles; O_1 et Ω_1 correspondent à ρ_1, O_2 et Ω_3 correspondent à la racine double ρ_2.

III. — ρ_1 *est racine triple et n'annule pas les mineurs du déterminant* $\varphi(\rho)$.

C'est encore un cas limite du précédent. A ρ_1 correspond un élément double de chaque espèce, et ces éléments se contiennent;

en les prenant pour O_2 et Ω_3, on a

$$f = (a_{11}x_1 + a_{31}x_3)\xi_1 + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3)\xi_2 + a_{33}x_3\xi_3,$$

avec

$$a_{11} = a_{22} = a_{33}, \qquad a_{12}a_{31} \neq 0.$$

IV. — *ρ_1 est racine simple; on a $\rho_2 = \rho_3$, et cette racine double annule les mineurs du déterminant $\varphi(\rho)$.*

Dans ce cas, à ρ_1 correspond un élément double de chaque espèce; ces éléments ne se contiennent pas, et peuvent être pris pour O_1 et Ω_1; à la racine double correspondent tous les éléments que contiennent Ω_1 et O_1, comme doubles.

La forme canonique du cas I subsiste, avec $a_{22} = a_{33}$, de sorte que k et χ sont nuls identiquement, ce qui n'arrive pas dans les cas précédents.

Deux éléments correspondants de première ou seconde espèce appartiennent avec O_1 ou Ω_1 à un même faisceau; si (x) et (y) sont deux tels éléments, et si (z) est commun à Ω_1 et à (xy), le rapport anharmonique (xyO_1z) a une valeur constante. On dit, dans ce cas, qu'il y a *homologie*.

V. — *ρ_1 est racine triple et annule les mineurs du déterminant $\varphi(\rho)$.*

C'est ici un cas limite de l'homologie. A ρ_1 correspondent une infinité d'éléments doubles de chaque espèce, situés sur deux éléments O_2 et Ω_3 qui se contiennent. On a alors

$$f = a_{11}x_1\xi_1 + (a_{22}x_2 + a_{32}x_3)\xi_2 + a_{33}x_3\xi_3$$

avec

$$a_{11} = a_{22} = a_{33}, \qquad a_{32} \neq 0.$$

209. En général, les éléments doubles seuls ont mêmes correspondants quand on les suppose appartenant successivement aux séries X et Y. Dans quel cas y a-t-il *involution,* c'est-à-dire un élément quelconque a-t-il toujours même correspondant, qu'on le considère comme appartenant à la série X ou à la série Y?

D'après le n° 207, il faut que $if - jh + g$ se réduise à un facteur près à h; donc d'abord k, jacobien de f, g, h fonctions des (ξ), est nul identiquement. Or ceci n'arrive que dans les cas IV et V; pour qu'il y ait involution, il faut encore dans le cas IV que

l'on ait $a_{11}+a_{22}=0$; dans le cas V, il ne peut y avoir involution, l'homographie étant supposée non singulière.

Dans le cas unique de l'involution, on voit immédiatement que, sur chaque élément double, il y a involution déterminée par les éléments correspondants; le rapport anharmonique tel que (xyO_1z) envisagé précédemment est égal à -1.

210. Cherchons, dans le cas général I, par quelles transformations on peut passer de la forme f à la forme canonique

$$f=a'_{11}x'_1\xi'_1+a'_{22}x'_2\xi'_2+a'_{33}x'_3\xi'_3.$$

A la racine ρ_i de l'équation $\varphi(\rho)=0$, correspond l'élément double Ω'_i dont l'équation est déterminée par

$$\begin{gathered}x_1\xi_1^{(i)}+x_2\xi_2^{(i)}+x_3\xi_3^{(i)}=0,\\(a_{11}-\rho_i)\xi_1^{(i)}+a_{12}\xi_2^{(i)}+a_{13}\xi_3^{(i)}=0,\\a_{21}\xi_1^{(i)}+(a_{22}-\rho_i)\xi_2^{(i)}+a_{23}\xi_3^{(i)}=0,\\a_{31}\xi_1^{(i)}+a_{32}\xi_2^{(i)}+(a_{33}-\rho_i)\xi_3^{(i)}=0;\end{gathered}$$

si (y) et (z) sont deux éléments quelconques, les trois dernières relations peuvent être remplacées par

$$\begin{gathered}f(y,\xi^{(i)})-\rho_i(\xi^{(i)}\,|\,y)=0,\\f(z,\xi^{(i)})-\rho_i(\xi^{(i)}\,|\,z)=0.\end{gathered}$$

et l'équation de Ω'_i est par suite

$$0=\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ a_{11}y_1+a_{21}y_2+a_{31}y_3-\rho_iy_1 & \cdots & \cdots\\ a_{11}z_1+a_{21}z_2+a_{31}z_3-\rho_iz_1 & \cdots & \cdots\end{vmatrix},$$

c'est-à-dire, en posant $(yz)_i=\eta_i$,

$$g(x,\eta)+\rho_i[f(x,\eta)-i(\eta\,|\,x)]+\rho_i^2(\eta\,|\,x)=0.$$

Nous pouvons donc poser, (η) étant quelconque,

$$x'_i=\rho_if(x,\eta)+g(x,\eta)+\rho_i(\rho_i-i)(\eta\,|\,x);$$

le déterminant de cette substitution, pour passer des (x') aux (x), est égal à

$$-(\rho_2-\rho_3)(\rho_3-\rho_1)(\rho_1-\rho_2)\chi(\eta);$$

un calcul facile donne ensuite en partant des (x'_i), posant $t_i=(\xi\eta)_i$,

et appelant ψ le jacobien par rapport aux (x) des formes $f(x, \eta)$, $g(x, \eta)$ et $(\xi \mid x)$,

$$\xi'_i = \frac{\rho_j \rho_k f(t, \eta) - \rho_i g(t, \eta) + \psi}{(\rho_i - \rho_j)(\rho_i - \rho_k)\chi(\eta)},$$

ρ_j et ρ_k désignant les racines de $\varphi(\rho)$ autres que ρ_i.

Quant aux coefficients, on a $a'_{ii} = \rho_i$.

On obtiendrait des formules analogues en partant des équations des éléments doubles de première espèce O'_i.

211. Si un élément (x), appartenant à X, décrit une série d'équation $l = b_{x^p} = 0$, l'élément correspondant (y) de Y décrit une série de même degré dont l'équation est

$$l(a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + a_{31} x_3, \ldots, \ldots) = 0.$$

De même, si (ξ) appartenant à X décrit une série $\lambda = \beta_{\xi^\pi} = 0$, l'élément correspondant (η) de Y décrit une série de même degré dont l'équation est

$$\lambda(\alpha_{11} \xi_1 + \alpha_{21} \xi_2 + \alpha_{31} \xi_3, \ldots, \ldots) = 0.$$

On peut aussi dans le premier cas envisager la série formée par les éléments (xy), définis par deux éléments correspondants, et dans le second cas, la série formée par les éléments $(\xi\eta)$.

Si (xy) a pour coordonnées (ζ), on a $(\zeta \mid x) = 0$, $f(x, \zeta) = 0$; on peut en tirer les (x), et portant dans l'équation $l = 0$ on a l'équation de la série des (xy), de degré $2p$.

De même dans le second cas, si $(\xi\eta)$ a pour coordonnées (z), on a $(\xi \mid z) = 0$, $g(z, \xi) = 0$.

Dans le cas général I, les formules se simplifient.

(y) décrit la série

$$l(a_{11} x_1, a_{22} x_2, a_{33} x_3) = 0;$$

(η) décrit la série

$$\lambda(a_{22} a_{33} \xi_1, a_{33} a_{11} \xi_2, a_{11} a_{22} \xi_3) = 0;$$

(ζ) décrit la série

$$l[(a_{22} - a_{33}) \zeta_2 \zeta_3, (a_{33} - a_{11}) \zeta_3 \zeta_1, (a_{11} - a_{22}) \zeta_1 \zeta_2] = 0;$$

(z) décrit la série

$$\lambda[a_{11}(a_{22} - a_{33}) z_2 z_3, a_{22}(a_{33} - a_{11}) z_3 z_1, a_{33}(a_{11} - a_{22}) z_1 z_2] = 0.$$

212. Ces formules simples peuvent donner lieu à de nombreuses applications.

Cherchons, par exemple, si la série des (y) peut être identique à celle des (x). Si le degré de $l=0$ est 1, on retrouve ainsi les éléments doubles de seconde espèce.

Si le degré de $l=0$ est supérieur à 1, il est clair que si les a_{ii} restent arbitraires, le problème est impossible. Mais, si l'on a par exemple $a_{11}^2=a_{22}a_{33}$, toutes les séries dont les équations seront de la forme $\varphi(x_1^2, x_2x_3)=0$ répondront à la question : elles se décomposent en séries quadratiques telles que $x_1^2=2\lambda x_2x_3$, λ étant une constante arbitraire.

De même, si l'on prend pour a_{11}, a_{22}, a_{33} les trois racines cubiques de l'unité, les séries d'équations telles que

$$\varphi(x_1^3, x_2^3, x_3^3, x_1x_2x_3)=0$$

ou bien

$$\varphi(x_1^2x_2, x_2^2x_3, x_3^2x_1)=0,$$

ou encore

$$\varphi(x_1x_2^2, x_2x_3^2, x_3x_1^2)=0$$

répondront à la question.

Ce sont là les types des solutions.

Les invariants dont l'évanouissement exprime ces faits sont faciles à calculer.

Considérons maintenant la suite d'éléments $(x^{(0)})$, $(x^{(1)})$, $(x^{(2)})$, ..., tels que $(x^{(n)})$ corresponde dans Y à $(x^{(n-1)})$ de X, et dans X à $(x^{(n+1)})$ de Y. Les équations de $(x^{(0)})$, $(x^{(1)})$, ..., $(x^{(n)})$, sont respectivement

$$(\xi|x)=0, \qquad a_{11}x_1\xi_1+a_{22}x_2\xi_2+a_{33}x_3\xi_3=0, \qquad \ldots,$$

$$a_{11}^n x_1\xi_1+a_{22}^n x_2\xi_2+a_{33}^n x_3\xi_3=0,$$

si les (x) sont les coordonnées de $(x^{(0)})$ et si l'on emploie les formules canoniques. Si en général f_n est le premier membre de l'équation de $(x^{(n)})$, on a la relation de récurrence

$$f_{n+1}=if_n-jf_{n-1}+df_{n-2};$$

d'ailleurs on a

$$f_0=h, \qquad f_1=f, \qquad f_2=g+if-jh;$$

d'où

$$f_3 = ig + (i^2 - j)f + (d - ij)h,$$
$$f_4 = (i^2 - j)g + (i^3 - 2ij + d)f + (id - i^2 j + j^2)h, \quad \ldots.$$

On pourrait de même prolonger la suite dans l'autre sens, avec des indices négatifs, de sorte que

$$df_{-1} = g, \qquad d^2 f_{-2} = jg + df - idh, \quad \ldots.$$

On peut chercher la condition pour qu'un certain nombre des éléments $x^{(n)}$, de rang donné, appartiennent à une série de degré donné. On trouve ainsi des conditions invariantes faciles à calculer. Ainsi $i = 0$ exprime que les éléments $(x^{(0)})$, $(x^{(1)})$, $(x^{(3)})$ sont alignés; $j = 0$ exprime le même fait pour $(x^{(0)})$, $(x^{(2)})$, $(x^{(3)})$; la condition pour que six éléments consécutifs appartiennent à une même série quadratique est $i^3 d - j^3 = 0$, . . . : cette série quadratique se reproduit alors elle-même par l'homographie; etc.

On verrait encore aisément que la condition $i = 0$ exprime qu'il existe une infinité de suites triples proprement dites (xyz) telles que les éléments (x), (y), (z) appartenant à X, leurs correspondants dans Y appartiennent respectivement aux éléments de seconde espèce (ξ), (η), (ζ) de la même suite; et aussi qu'il existe une infinité de suites triples proprement dites $(\xi\eta\zeta)$ telles que les éléments (ξ), (η), (ζ) appartenant à Y, leurs correspondants dans X appartiennent respectivement aux éléments de première espèce (x), (y), (z) de la même suite. Dans le premier cas (y) et (z) par exemple sont arbitraires; dans le second (η) et (ζ) sont arbitraires. Si i n'est pas nul, il n'existe aucune suite triple proprement dite répondant à l'une des conditions précédemment indiquées.

La condition $j = 0$ s'interprète d'une façon analogue, le rôle des espaces X et Y étant interverti.

La démonstration de ces propriétés est en tout semblable à celle que nous donnerons plus loin pour des propositions analogues relatives à deux séries quadratiques.



CHAPITRE VII.

LA SÉRIE QUADRATIQUE.

I. — La forme quadratique ternaire.

213. La forme quadratique

$$f = a_{x^2} = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2$$

ne dépend que de six coefficients, et a cependant un invariant proprement dit, son discriminant ou hessien

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

a_{ij} et a_{ji} ayant la même signification.

Si d n'est pas nul, $f = 0$ est une série quadratique proprement dite qui n'a aucune singularité; sa classe est 2, comme son degré. Si d est nul, f se décompose en un produit de deux facteurs linéaires; et si en outre tous les mineurs de d sont nuls, ces deux facteurs sont proportionnels, de sorte que f est un carré parfait.

L'élément (ξ) est tangent à f, si l'on a, en faisant $f_{x_i} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_i}$, les conditions

$$\frac{f_{x_1}}{\xi_1} = \frac{f_{x_2}}{\xi_2} = \frac{f_{x_3}}{\xi_3},$$

d'où la relation

$$\varphi = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \xi_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \xi_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \xi_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

La forme équivalente à f, ou la forme tangentielle de f, quand d

n'est pas nul, est donc

$$\varphi = \alpha_{\xi^2},$$

en posant

$$\alpha_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}^2, \quad \ldots, \quad \alpha_{23} = a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23}, \quad \ldots,$$

de sorte que les α_{ij} sont les mineurs de d.

Le système formé par f, les (x) et les (ξ) admet les quatre invariants f, φ, d et $(\xi \mid x)$.

On a

$$a_{11}\alpha_{11} + \ldots + 2a_{12}\alpha_{12} + \ldots = 3d;$$

le hessien de φ est $\delta = d^2$; la forme tangentielle de φ, obtenue en partant de φ comme φ en partant de f, est fd, de sorte que

$$fd = -\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & x_1 \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & x_2 \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Si d est nul sans que tous ses mineurs le soient, f se décompose en un produit de facteurs linéaires distincts

$$f = (\eta \mid x)(\zeta \mid x).$$

Les éléments (η) et (ζ) ont en commun un élément (y), double pour f, qui vérifie les trois équations $f_{y_i} = 0$, alors compatibles. En faisant $y_i = (\eta\zeta)_i$, on voit facilement que $\varphi = -\frac{1}{4}(y \mid \xi)^2$, de sorte que φ est un carré parfait, et $\varphi = 0$ représente deux fois l'élément double (y).

Si les mineurs de d sont tous nuls, la forme φ est nulle identiquement; on a

$$f = (\eta \mid x)^2.$$

Les f_{x_i} sont proportionnels à $(\eta \mid x)$; on a

$$a_{xy} = (\eta \mid x)(\eta \mid y),$$

ce qui détermine $(\eta \mid x)$.

214. Si l'on adjoint à la forme f les variables (x) et (y), on a les invariants a_{x^2}, a_{y^2}, d, et la polaire a_{xy}.

D'après les propriétés générales des polaires, $a_{xy} = 0$ est une

série linéaire qui est le lieu des éléments (x) conjugués harmoniques de l'élément (y) par rapport aux éléments communs à f et à (xy).

La symétrie de l'équation $a_{xy} = 0$ par rapport aux (x) et aux (y) montre que, si (x) appartient à la polaire de (y), (y) appartient inversement à la polaire de (x); (x) et (y) sont alors dits *conjugués* par rapport à f.

Si quatre éléments (y), (z), (t), (u) appartiennent à un même faisceau, il en est de même de leurs polaires, et le rapport anharmonique de celles-ci est égal au rapport anharmonique $(yztu)$; en effet, les coordonnées des éléments (x) et celles de leurs polaires sont liées par les formules d'une substitution linéaire, de sorte qu'une homographie particulière est ainsi définie.

Si (η) est la polaire de (y) par rapport à f, (y) est aussi la polaire de (η) par rapport à φ (si d n'est pas nul), comme le montre un calcul facile. Nous dirons indifféremment, suivant la commodité du langage, que (y) et (η) sont pôle et polaire par rapport à f ou φ.

En supposant toujours d non nul, (y) n'appartient à sa polaire (η) que s'il appartient à f, et alors (η) est l'élément tangent à f en (y). On voit aussi que (η) contient les éléments de contact des éléments tangents menés à f par (y); que si (y), (z), (t) appartiennent à un même faisceau, ainsi que (y), (z'), (t'), et si (z), (t), (z'), (t') appartiennent à f, (η) contient l'élément commun à (zz') et (tt'); etc. Les mêmes choses ont lieu par rapport à φ.

Si $d = 0$ sans que ses mineurs soient tous nuls, et si (y) est alors l'élément double de f, la polaire de (z) est l'élément conjugué harmonique de (yz) par rapport aux éléments de seconde espèce qui constituent f; la polaire de (y) est indéterminée. Inversement, on en déduit la position du pôle d'un élément (ξ).

Si f est carré parfait, la polaire de (z) est l'élément représenté deux fois par f; si (z) appartient à f, sa polaire est indéterminée.

Comme application, on vérifiera sans peine que si l'on considère une suite triple (y), (z), (t), et la suite formée par leurs polaires (η), (ζ), (θ), ces deux suites sont homologiques, c'est-à-dire que les éléments $[y(\zeta\theta)]$, $[z(\theta\eta)]$, $[t(\eta\zeta)]$ sont alignés ainsi que les éléments $[\eta(zt)]$, $[\zeta(ty)]$, $[\theta(yz)]$; si d'ailleurs les premiers sont alignés sur (σ) et les seconds sur (s), (s) et (σ) sont pôle et polaire par rapport à f.

215. Nous n'insisterons pas sur les invariants du système formé par f et un nombre quelconque de variables (x) ou (ξ) : ils sont tous de types déjà connus. Nous signalerons seulement quelques identités souvent utiles.

On a d'abord

$$\text{(I)}\quad \alpha_{\xi\eta} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \xi_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \xi_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \text{(II)}\quad da_{xy} = -\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & x_1 \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & x_2 \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\text{(III)}\quad a_{(\xi\eta)(\zeta\theta)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \xi_1 & \eta_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \xi_2 & \eta_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \xi_3 & \eta_3 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & 0 & 0 \\ \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \text{(IV)}\quad \alpha_{(xy)(zt)} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & x_1 & y_1 \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & x_2 & y_2 \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & x_3 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 & 0 & 0 \\ t_1 & t_2 & t_3 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

où $(\xi\eta)$ par exemple désigne comme d'habitude l'élément de première espèce défini par (ξ) et (η). D'ailleurs, dans ces formules comme dans ces suivantes, des variables de même espèce pourront être supposées identiques à volonté.

Si, dans (I), on remplace les (η) par les (f_y), le premier membre devient $d(\xi\,|\,y)$, ainsi qu'il était facile de le prévoir; si l'on remplace encore les (ξ) par les (f_x), le premier membre devient da_{xy}.

De même, si dans (II) on remplace les (y) par les (φ_η), le premier membre devient $d^2(\eta\,|\,x)$; remplaçant encore les (x) par les (φ_ξ), on obtient $d^2\alpha_{\xi\eta}$.

Dans (III), remplaçons les (η) par les (f_y) : le premier membre devient $\alpha_{\xi[y(\zeta\theta)]}$; remplaçons encore les (ξ) par les (f_x) : on obtient $d[xy(\zeta\theta)]$. Remplaçons les (η) par les (f_y) et les (θ) par les (f_t); on a $a_{yt}\alpha_{\xi\zeta} - d(y\,|\,\zeta)(t\,|\,\xi)$; remplaçons les (ξ), les (η) et les (θ) comme précédemment : on obtient $d[(\zeta\,|\,x)a_{yt} - (\zeta\,|\,y)a_{xt}]$; enfin, si l'on remplace encore les (ζ) par les (f_z), on obtient finalement $d(a_{xz}a_{yt} - a_{yz}a_{xt})$.

On pourra opérer de même sur l'identité (IV).

216. On a aussi

$$\begin{vmatrix} f_{x_1} & f_{x_2} & f_{x_3} \\ f_{y_1} & f_{y_2} & f_{y_3} \\ f_{z_1} & f_{z_2} & f_{z_3} \end{vmatrix} = d(xyz), \qquad \begin{vmatrix} \varphi_{\xi_1} & \varphi_{\xi_2} & \varphi_{\xi_3} \\ \varphi_{\eta_1} & \varphi_{\eta_2} & \varphi_{\eta_3} \\ \varphi_{\zeta_1} & \varphi_{\zeta_2} & \varphi_{\zeta_3} \end{vmatrix} = d^2(\xi\eta\zeta),$$

et, par suite, immédiatement,

$$\begin{vmatrix} a_{xt} & a_{yt} & a_{zt} \\ a_{xu} & a_{yu} & a_{zu} \\ a_{xv} & a_{yv} & a_{zv} \end{vmatrix} = d(xyz)(tuv), \qquad \begin{vmatrix} \alpha_{\xi\theta} & \alpha_{\eta\theta} & \alpha_{\zeta\theta} \\ \alpha_{\xi\chi} & \alpha_{\eta\chi} & \alpha_{\zeta\chi} \\ \alpha_{\xi\lambda} & \alpha_{\eta\lambda} & \alpha_{\zeta\lambda} \end{vmatrix} = d^2(\xi\eta\zeta)(\theta\chi\lambda).$$

Enfin considérons l'expression $a_{xz}a_{yt} - a_{yz}a_{xt}$; ce déterminant est le produit des deux matrices

$$\begin{Vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{Vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{Vmatrix} f_{x_1} & f_{x_2} & f_{x_3} \\ f_{y_1} & f_{y_2} & f_{y_3} \end{Vmatrix},$$

et, par suite, d'après une règle connue, est encore égal à $\alpha_{(xy)(zt)}$, de sorte que l'on a l'identité

$$a_{xz}a_{yt} - a_{xt}a_{yz} = \alpha_{(xy)(zt)};$$

de même, on aurait

$$\alpha_{\xi\zeta}\alpha_{\eta\theta} - \alpha_{\xi\theta}\alpha_{\eta\zeta} = da_{(\xi\eta)(\zeta\theta)}.$$

En particulier, on aura

$$a_{x^2}a_{y^2} - a_{xy}^2 = \alpha_{(xy)^2},$$
$$\alpha_{\xi^2}\alpha_{\eta^2} - \alpha_{\xi\eta}^2 = da_{(\xi\eta)^2}.$$

217. L'équation des éléments tangents à f qui contiennent (y) est évidemment $\alpha_{(xy)^2} = 0$, ou encore $a_{x^2}a_{y^2} - a_{xy}^2 = 0$.

La forme équivalente à $\alpha_{(xy)^2}$, considérée comme forme quadratique par rapport aux (x), est, par un calcul facile, $da_{y^2}(\xi\,|\,y)^2$, ainsi qu'il était facile de le prévoir : elle est nulle identiquement si (y) appartient à f.

On peut retrouver les résultats précédents de la façon suivante : soit (x) un élément quelconque, de sorte que tout élément de (xy) est $(\lambda_1 x + \lambda_2 y)$; cet élément appartient à f si l'on a

$$\lambda_1^2 a_{x^2} + 2\lambda_1\lambda_2 a_{xy} + \lambda_2^2 a_{y^2} = 0;$$

cette équation définit les éléments communs à f et à (xy) : ils sont confondus, c'est-à-dire que (xy) est tangent à f, si l'on a

$$a_{x^2}a_{y^2} - a_{xy}^2 = 0.$$

En éliminant les (λ) entre l'équation précédente et l'équation

$$\lambda_1(\xi\,|\,x) + \lambda_2(\xi\,|\,y) = 0,$$

on obtient

$$a_{x^2}(y \mid \xi)^2 - 2a_{xy}(x \mid \xi)(y \mid \xi) + a_{y^2}(x \mid \xi)^2 = 0;$$

c'est l'équation des éléments communs à f et à (xy). On peut l'écrire aussi en appliquant à φ ce qui vient d'être dit au sujet de f

$$\alpha_{\xi^2}\alpha_{(xy)^2} - \alpha^2_{\xi(xy)} = da_{[\xi(xy)]^2} = 0;$$

en fait, il y a identité entre le premier membre de cette équation et celui de la précédente, au facteur d près.

Appliquons ceci en remplaçant les (xy) par les f_z, nous aurons l'équation des éléments de contact des éléments tangents menés à f par (z); soit, d'après les identités connues,

$$\alpha_{\xi^2}a_{z^2} - d(\xi \mid z)^2 = 0.$$

La même équation convient, en y regardant les (z) comme variables et les (ξ) comme données, pour représenter les éléments tangents à f aux éléments communs à f et à (ξ).

218. Le rapport anharmonique ρ des éléments (x) et (y) associés aux éléments communs à f et à (xy) est, d'après une équation précédente, facile à calculer. On a

$$\rho = \frac{a_{xy} + \sqrt{-\alpha_{(xy)^2}}}{a_{xy} - \sqrt{-\alpha_{(xy)^2}}}.$$

Si (y) et ρ sont donnés, le lieu de (x) est une série quadratique facile à définir plus complètement : dans le cas particulier de $\rho = -1$, on retrouve la polaire $a_{xy} = 0$.

De même, le rapport anharmonique ρ des éléments tangents à f contenant $(\xi\eta)$ avec (ξ) et (η) sera

$$\rho = \frac{\alpha_{\xi\eta} + \sqrt{-da_{(\xi\eta)^2}}}{\alpha_{\xi\eta} - \sqrt{-da_{(\xi\eta)^2}}}.$$

219. On a l'identité

$$a_{x^2}a_{y^2} - a^2_{xy} = \alpha_{(xy)^2};$$

de même, on aura

$$\alpha_{(xy)^2}\alpha_{(yz)^2} - \alpha^2_{(xy)(yz)} = da_{y^2}(xyz)^2,$$

car $[(xy)(yz)]_i = y_i(xyz)$.

Par suite, il vient

$$\alpha_{(yz)^2}a_{y^2}a_{x^2} = \alpha_{(yz)^2}a_{xy}^2 + \alpha_{(xy)(yz)}^2 + da_{y^2}(xyz)^2.$$

Cette identité fournit une décomposition de a_{x^2} en une somme de trois carrés de fonctions linéaires indépendantes, et il est facile de vérifier que c'est la formule la plus générale qui réponde à cette question.

Si d est nul ainsi que tous ses mineurs, on a simplement

$$a_{y^2}a_{x^2} = a_{xy}^2;$$

si d est nul, sans que tous ses mineurs le soient, le troisième carré disparaît et la formule fournit immédiatement les facteurs linéaires dans lesquels f se décompose.

Dans le cas général, (y) et (z) sont arbitraires : $a_{xy} = 0$ est la polaire de y, $\alpha_{(xy)(yz)} = 0$ est la polaire de l'élément commun à $a_{xy} = 0$ et à (yz).

220. On peut ainsi, et de la façon la plus générale, ramener f à la forme canonique simple

$$f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2;$$

on a alors

$$d = a_{11}a_{22}a_{33}, \qquad \varphi = a_{22}a_{33}\xi_1^2 + a_{33}a_{11}\xi_2^2 + a_{11}a_{22}\xi_3^2.$$

La suite triple de référence est telle que O_i et Ω_i soient pôle et polaire par rapport à f : on dit qu'elle est *conjuguée* par rapport à f. Il existe une triple infinité de telles suites triples, car on peut prendre O_1 arbitrairement et O_2 arbitrairement sur la polaire de O_1.

Si d est nul, f se ramène à la forme

$$f = a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2,$$

ou bien

$$f = a_{11}x_1^2,$$

et la signification des éléments de référence est évidente.

On vérifiera que si deux suites triples sont conjuguées par rapport à une même série quadratique f, les six éléments d'une même espèce qu'elles définissent appartiennent à une même série quadratique.

221. Dans certains cas, il y a avantage à choisir une autre forme canonique.

Si la suite de référence $O_1 O_2 O_3$ ou $\Omega_1 \Omega_2 \Omega_3$ est *inscrite* à f, c'est-à-dire si les O_i appartiennent à f, on a

$$f = 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2$$

et, par suite,

$$d = 2a_{23}a_{31}a_{12},$$
$$\varphi = -a_{23}^2\xi_1^2 - a_{31}^2\xi_2^2 - a_{12}^2\xi_3^2 + 2a_{12}a_{13}\xi_2\xi_3 + 2a_{23}a_{21}\xi_3\xi_1 + 2a_{31}a_{32}\xi_1\xi_2;$$

en même temps, on dit que la suite $O_1 O_2 O_3$ est *circonscrite* à φ.

Si la suite $O_1 O_2 O_3$ ou $\Omega_1 \Omega_2 \Omega_3$ est circonscrite à f et, par suite, inscrite à φ, on a de même

$$f = -\alpha_{23}^2x_1^2 - \alpha_{31}^2x_2^2 - \alpha_{12}^2x_3^2 + 2\alpha_{12}\alpha_{13}x_2x_3 + 2\alpha_{23}\alpha_{21}x_3x_1 + 2\alpha_{31}\alpha_{32}x_1x_2,$$
$$d = 4\alpha_{23}^2\alpha_{31}^2\alpha_{12}^2,$$
$$\varphi = 2\alpha_{23}\alpha_{31}\alpha_{12}(2\alpha_{23}\xi_2\xi_3 + 2\alpha_{31}\xi_3\xi_1 + 2\alpha_{12}\xi_1\xi_2).$$

On vérifiera sans peine que si deux suites triples sont inscrites à f, les six éléments de seconde espèce qu'elles déterminent appartiennent à une même série quadratique; le théorème analogue a lieu s'il s'agit de suites triples circonscrites à f.

II. — La série quadratique définie par une forme bilinéaire à deux séries de variables binaires.

222. Nous avons déjà vu comment une forme bilinéaire à deux séries de variables binaires pouvait définir une série quadratique ternaire. Si

$$g = a_{11}\lambda_1\mu_1 + a_{12}\lambda_1\mu_2 + a_{21}\lambda_2\mu_1 + a_{22}\lambda_2\mu_2$$

est la forme donnée, il suffit d'imaginer par exemple que les (λ) et les (μ) définissent deux éléments de seconde espèce, désignés pour abréger par (λ) et (μ), ayant pour équations

$$\lambda_1(\eta \mid x) + \lambda_2(\zeta \mid x) = 0, \qquad \mu_1(\theta \mid x) + \mu_2(\chi \mid x) = 0,$$

et de chercher le lieu de l'élément (x) commun à ces deux éléments, lorsque l'on suppose vérifiée la relation $g = 0$. Ceci revient à mettre en correspondance homographique les faisceaux formés par les éléments (λ) et (μ).

L'équation de la série f ainsi définie est

$$a_{11}(\zeta\,|\,x)(\chi\,|\,x) - a_{12}(\zeta\,|\,x)(\theta\,|\,x) - a_{21}(\eta\,|\,x)(\chi\,|\,x) + a_{22}(\eta\,|\,x)(\theta\,|\,x) = 0;$$

elle contient les éléments $(\eta\zeta)$ et $(\theta\chi)$.

Le discriminant de f est

$$-\frac{1}{4}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})[a_{11}(\eta\zeta\chi)(\theta\zeta\chi) + a_{12}(\eta\zeta\theta)(\chi\zeta\theta) + a_{21}(\zeta\eta\chi)(\theta\eta\chi) + a_{22}(\zeta\eta\theta)(\chi\eta\theta)].$$

Il s'annule quand l'invariant de la forme g est nul, et encore lorsque l'élément $[(\eta\zeta)(\theta\chi)]$ se correspond à lui-même dans les deux faisceaux homographiques considérés (158).

L'élément tangent en $(\eta\zeta)$ par exemple est l'élément (λ) qui correspond à l'élément (μ) contenant $(\eta\zeta)$.

223. Réciproquement, si (y) et (z) sont deux éléments fixes quelconques d'une série quadratique, et si (x) désigne un élément variable de cette série, les éléments (xy) et (xz) forment évidemment deux faisceaux homographiques, puisque la correspondance qui existe entre eux est univoque sans exception.

On voit par suite que, si l'on considère quatre éléments (x) de la série, les quatre éléments correspondants (xy) ont un rapport anharmonique constant qui ne dépend pas de l'élément (y) : on l'appelle le *rapport anharmonique* des quatre éléments (x) de la série f.

Lorsque le rapport anharmonique $(x^{(1)}x^{(2)}x^{(3)}x^{(4)})$ ainsi défini est égal à -1, on vérifie aisément que $(x^{(1)}x^{(2)})$ et $(x^{(3)}x^{(4)})$ sont deux éléments conjugués par rapport à f.

Tout ceci peut se répéter pour des séries et des éléments de seconde espèce. En particulier on voit ce que l'on doit entendre par rapport anharmonique des quatre éléments tangents à f en $(x^{(1)})$, $(x^{(2)})$, $(x^{(3)})$, $(x^{(4)})$, et il est clair que ce rapport est égal à celui de ces quatre éléments (x) eux-mêmes, d'après une remarque faite au n° 214.

III. — La série quadratique comme série rationnelle.

224. D'après le n° 223, il est clair que les coordonnées d'un élément (x) d'une série quadratique peuvent s'exprimer sous la

forme

$$\rho x_i = f_i(\lambda_1, \lambda_2),$$

les f_i étant des formes quadratiques par rapport aux (λ).

Réciproquement, de telles formules représentent une série quadratique, si toutefois les f_i ne sont pas liées par une relation linéaire, comme il est évident.

L'élément (λ) de coordonnées (x) a pour élément tangent celui qui est défini par les formules analogues :

$$\rho\xi_1 = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial f_2}{\partial\lambda_1}\frac{\partial f_3}{\partial\lambda_2} - \frac{\partial f_2}{\partial\lambda_2}\frac{\partial f_3}{\partial\lambda_1}\right) = \mathrm{J}(f_2, f_3) = \varphi_1,$$

$$\rho\xi_2 = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial f_3}{\partial\lambda_1}\frac{\partial f_1}{\partial\lambda_2} - \frac{\partial f_3}{\partial\lambda_2}\frac{\partial f_1}{\partial\lambda_1}\right) = \mathrm{J}(f_3, f_1) = \varphi_2,$$

$$\rho\xi_3 = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial f_1}{\partial\lambda_1}\frac{\partial f_2}{\partial\lambda_2} - \frac{\partial f_1}{\partial\lambda_2}\frac{\partial f_2}{\partial\lambda_1}\right) = \mathrm{J}(f_1, f_2) = \varphi_3.$$

La série f et la série tangentielle φ sont ainsi deux espaces à une dimension homographiques dont les éléments homologues sont les éléments de f et les éléments tangents à f correspondants.

Si (y) est un élément fixe de f, les coordonnées de (xy) sont faciles à calculer ; en appelant (μ) les paramètres relatifs à (y), on peut écrire

$$\rho(xy)_1 = \frac{f_2(\lambda)f_3(\mu) - f_3(\lambda)f_2(\mu)}{2(\lambda\mu)} = \mathrm{D}^1_{\lambda\mu}\varphi_1,$$

. . . . ;

ces expressions sont linéaires par rapport aux (λ), comme on devait le prévoir : donc le rapport anharmonique de quatre éléments (x) est égal au rapport anharmonique des quatre couples de valeurs (λ) correspondantes.

Ajoutons que, pour l'élément défini par les éléments tangents en (λ) et (μ), on peut écrire

$$\rho x_1 = \mathrm{D}^1_{\lambda\mu} f_1.$$

. . . .

225. L'étude de la série f ainsi représentée correspond, comme nous l'avons déjà dit, à celle de la forme

$$\xi_1 f_1(\lambda_1, \lambda_2) + \xi_2 f_2(\lambda_1, \lambda_2) + \xi_3 f_3(\lambda_1, \lambda_2).$$

Si l'on fait

$$
\begin{aligned}
f_1 &= a_0\lambda_1^2 + 2a_1\lambda_1\lambda_2 + a_2\lambda_2^2,\\
f_2 &= b_0\lambda_1^2 + 2b_1\lambda_1\lambda_2 + b_2\lambda_2^2,\\
f_3 &= c_0\lambda_1^2 + 2c_1\lambda_1\lambda_2 + c_2\lambda_2^2,
\end{aligned}
$$

cette forme a le seul invariant multiple

$$
i = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}.
$$

L'équation de f est

$$
f = \begin{vmatrix}
x_1 & 0 & a_0 & 2a_1 & a_2 & 0 \\
0 & x_1 & 0 & a_0 & 2a_1 & a_2 \\
x_2 & 0 & b_0 & 2b_1 & b_2 & 0 \\
0 & x_2 & 0 & b_0 & 2b_1 & b_2 \\
x_3 & 0 & c_0 & 2c_1 & c_2 & 0 \\
0 & x_3 & 0 & c_0 & 2c_1 & c_2
\end{vmatrix} = 0;
$$

son discriminant est $-4i^4$.

La forme canonique de la représentation précédente est obtenue en faisant, ce qui est toujours possible,

$$
\begin{aligned}
\rho x_1 &= 2\lambda_1\lambda_2,\\
\rho x_2 &= \lambda_1^2,\\
\rho x_3 &= \lambda_2^2;
\end{aligned}
$$

alors on a, pour la série tangentielle,

$$
\begin{aligned}
\rho\xi_1 &= -\lambda_1\lambda_2,\\
\rho\xi_2 &= \lambda_2^2,\\
\rho\xi_3 &= \lambda_1^2;
\end{aligned}
$$

on peut écrire

$$
f = (x_1^2 - 4x_2x_3)\sigma,
$$

σ étant un facteur quelconque; le discriminant de f est $-4\sigma^3$, et la forme φ est

$$
(-4\xi_1^2 + 4\xi_2\xi_3)\sigma^2.
$$

La série f contient O_2 et O_3 et y admet Ω_3 et Ω_2 comme éléments tangents.

L'équation de l'élément de seconde espèce $(\lambda\mu)$, c'est-à-dire de l'élément de seconde espèce défini par (λ) et (μ) est

$$
-x_1(\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1) + 2\lambda_2\mu_2x_2 + 2\lambda_1\mu_1x_1 = 0.
$$

De même, l'équation de l'élément de première espèce, défini par les éléments tangents en (λ) et (μ), est

$$\xi_1(\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1) + \lambda_1\mu_1\xi_2 + \lambda_2\mu_2\xi_3 = 0.$$

226. Ces formules simples peuvent servir à résoudre de nombreuses questions sur les séries quadratiques : on en peut, par exemple, tirer une démonstration des théorèmes de Pascal et de Brianchon, ainsi que des nombreuses propositions qui s'y rattachent. A cet égard, nous attirerons l'attention uniquement sur les deux cas particuliers d'une suite triple ou quadruple inscrite à f.

Pour une suite triple $(\lambda^{(1)})$, $(\lambda^{(2)})$, $(\lambda^{(3)})$, les éléments tangents en $(\lambda^{(1)})$, $(\lambda^{(2)})$, $(\lambda^{(3)})$ ont en commun, avec les éléments opposés $(\lambda^{(2)}\lambda^{(3)})$, ..., trois éléments alignés suivant (x) ; l'élément tangent en (λ_1) est conjugué harmonique par rapport à $(\lambda^{(1)}\lambda^{(2)})$ et $(\lambda^{(1)}\lambda^{(3)})$ de l'élément qui contient $(\lambda^{(1)})$ et le pôle de $(\lambda^{(2)}\lambda^{(3)})$: les trois éléments analogues à ce dernier sont alignés suivant (y), pôle de (x).

Pour une suite quadruple $(\lambda^{(1)})$, $(\lambda^{(2)})$, $(\lambda^{(3)})$, $(\lambda^{(4)})$, les éléments tangents en $(\lambda^{(1)})$ et $(\lambda^{(3)})$, en $(\lambda^{(2)})$ et $(\lambda^{(4)})$, et les éléments $(\lambda^{(1)}\lambda^{(2)})$ et $(\lambda^{(3)}\lambda^{(4)})$, $(\lambda^{(2)}\lambda^{(3)})$ et $(\lambda^{(4)}\lambda^{(1)})$ déterminent quatre éléments alignés suivant (x), et formant un faisceau harmonique ; en disposant les éléments (λ) donnés dans tous les ordres possibles, on obtient deux autres éléments analogues à (x), soit (ξ) et (θ). En faisant pour les éléments tangents à f aux éléments (λ), ce que nous venons de faire pour les éléments (λ) eux-mêmes, on obtient une suite (y), (z), (t) analogue à la suite (x), (ξ), (θ). Ces deux suites sont équivalentes, et, par suite, conjuguées par rapport à la série quadratique f.

227. Voici encore une application générale très importante. Considérons une série quelconque $g = b_{x^p} = 0$, de première espèce par exemple, et de degré p. Chacun de ses éléments contient deux éléments tangents à f; si les éléments de contact correspondants sont (λ) et (μ), la série $g = 0$ établit donc entre (λ) et (μ) une relation de degré p par rapport aux variables de ces deux couples, et symétrique par rapport à ces variables : en effet, pour les formules canoniques précédemment développées, cette

relation est

$$g(\lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1,\ \lambda_1\mu_1,\ \lambda_2\mu_2)=0.$$

Dans le cas général, avec les mêmes notations que précédemment, on aurait

$$g[a_0\lambda_1\mu_1+a_1(\lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1)+a_2\lambda_2\mu_2,\\ b_0\lambda_1\mu_1+b_1(\lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1)+b_2\lambda_2\mu_2,\ \ldots]=0.$$

Réciproquement, considérons une forme aux deux systèmes de variables binaires (λ) et (μ), de même degré p par rapport à ces variables, et symétrique par rapport à ces variables : égalée à zéro, elle définit, si l'on veut, une série ternaire de première espèce de degré p, dont l'équation est obtenue, par exemple, dans le cas des formules canoniques, en remplaçant $\lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1$, $\lambda_1\mu_1$, $\lambda_2\mu_2$ par x_1, x_2, x_3.

A ce cas on peut ramener celui plus général où l'on donne une forme non symétrique par rapport aux (λ) et aux (μ), des degrés p' et p'' par rapport à ces variables, soit $g'(\lambda, \mu)$: nous supposons cette forme indécomposable, bien entendu. Alors on envisagera le produit $g'(\lambda, \mu)g'(\mu, \lambda)$, et l'on définira ainsi comme tout à l'heure une série ternaire de degré $p'+p''$.

C'est ainsi que l'équation de la série f elle-même est $(\lambda\mu)=0$.

Toutes les fois que la série ternaire g sera indécomposable, la forme correspondante en (λ) et (μ) sera elle-même indécomposable, ou bien sera le produit de deux facteurs indécomposables, se transformant l'un dans l'autre par le changement des (λ) en (μ).

228. Nous allons étudier quelques-unes des propriétés des séries définies par une équation $g(\lambda, \mu)=0$, symétrique, de même degré p par rapport aux (λ) et aux (μ) : nous aurons toujours à supposer que g est indécomposable, ou bien que g se décompose en deux facteurs tels que $g'(\lambda, \mu)$, $g'(\mu, \lambda)$, le premier étant des degrés p' et p'' par rapport aux (λ) et aux (μ).

Les éléments communs à la série quadratique f et à la série g sont déterminés par l'équation $g(\lambda, \lambda)=0$; ils sont en nombre $2p$: mais, dans le second cas, ils sont distincts en nombre p au plus, puisqu'il suffit d'envisager l'équation $g'(\lambda, \lambda)=0$. Par suite, dans le second cas, nous pouvons dire d'une façon générale que la série g est p fois tangente à la série f.

Considérons maintenant les deux équations

$$\frac{\partial g}{\partial \mu_1} = 0, \qquad \frac{\partial g}{\partial \mu_2} = 0,$$

qui admettent $2p(p-1)$ solutions (λ), (μ). En général, si (λ), (μ) est un tel système de solutions, l'élément tangent à f en (λ) a deux éléments communs confondus avec g : il est tangent à g, ou bien l'élément défini par (λ), (μ) est double pour g. Ce dernier cas se présentera si les équations

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda_1} = 0, \qquad \frac{\partial g}{\partial \lambda_2} = 0,$$

sont aussi vérifiées par ce système de solutions, qui sera alors double pour les équations primitives, ainsi que le système obtenu en permutant les (λ) et les (μ); si toutefois on avait $(\lambda\mu) = 0$, la série g serait seulement tangente à f en (λ). Tout ceci est conforme aux formules de Plücker, puisque la classe de g est en général $p(p-1)$, et se trouve diminuée de deux unités pour un élément double.

On a ainsi le moyen de déterminer les éléments tangents communs à f et à g, et les éléments doubles de g.

En particulier dans le second cas, où $g = g'(\lambda, \mu) g'(\mu, \lambda)$, les équations à considérer deviennent

$$\frac{\partial g'(\lambda, \mu)}{\partial \mu_1} g'(\mu, \lambda) + \frac{\partial g'(\mu, \lambda)}{\partial \mu_1} g'(\lambda, \mu) = 0,$$
$$\frac{\partial g'(\lambda, \mu)}{\partial \mu_2} g'(\mu, \lambda) + \frac{\partial g'(\mu, \lambda)}{\partial \mu_2} g'(\lambda, \mu) = 0:$$

elles admettent, puisqu'elles expriment que le discriminant de g par rapport aux (μ) est nul :

1° Les solutions des équations $g'(\lambda, \mu) = 0$, $g'(\mu, \lambda) = 0$, en nombre total $p'^2 + p''^2$, comptées chacune deux fois;

2° Les solutions des systèmes

$$\frac{\partial g'(\lambda, \mu)}{\partial \mu_1} = 0, \qquad \frac{\partial g'(\lambda, \mu)}{\partial \mu_2} = 0$$

et

$$\frac{\partial g'(\mu, \lambda)}{\partial \mu_1} = 0, \qquad \frac{\partial g'(\mu, \lambda)}{\partial \mu_2} = 0,$$

en nombre total $2p'(p''-1) + 2p''(p'-1)$.

Ces dernières ne correspondent pas en général à des éléments doubles de g. Quant aux premières, elles comprennent d'abord les solutions de l'équation $g'(\lambda, \lambda) = 0$ avec $(\lambda\mu) = 0$, en nombre $p' + p''$; ces solutions indiquent, comme nous le savons déjà, que la série g est p fois tangente à f; les solutions qui restent, en nombre $p'(p' - 1) + p''(p'' - 1)$, correspondent à $\frac{p'(p'-1)}{2} + \frac{p''(p''-1)}{2}$ éléments doubles de g en général.

La classe de g est donc $2p'p''$. Cette série a, avec g, $4p'p''$ éléments tangents communs, parmi lesquels il y en a p comptant chacun deux fois.

229. La forme bilinéaire

$$g = a_{11}\lambda_1\mu_1 + a_{12}\lambda_1\mu_2 + a_{21}\lambda_2\mu_1 + a_{22}\lambda_2\mu_2$$

définit en général une série quadratique bitangente à f : si l'on a $a_{12} - a_{21} = 0$, elle définit une série linéaire.

L'équation $g = 0$ établit une homographie entre les éléments de la série f considérée comme un espace à une dimension : on peut lui appliquer la théorie développée aux n°s 74 et suivants. La série g devient linéaire quand il y a involution. Les éléments communs à f et à g sont les éléments doubles de l'homographie.

Si (x) est un élément quelconque de g défini par (λ) et (μ), le rapport anharmonique déterminé par (λ), (μ) et les éléments doubles est constant; dans le cas de l'involution, c'est un rapport harmonique, de valeur -1. Dans le cas général, les deux éléments communs à g et à un élément (ξ) tangent à f en (α) s'obtiennent séparément, en donnant dans $g = 0$, soit aux (λ), soit aux (μ), les valeurs (α).

Dans le cas de la représentation canonique, l'équation de g est

$$\left(\frac{a_{12} + a_{21}}{2} x_1 + a_{11}x_2 + a_{22}x_3\right)^2 - \left(\frac{a_{12} + a_{21}}{2}\right)^2 (x_1^2 - 4x_2x_3) = 0;$$

son discriminant est $\frac{1}{4}(a_{12} - a_{21})^4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$.

On ferait facilement le même calcul dans le cas le plus général.

Il est à peine besoin d'ajouter que, comme toujours, tout ce qui précède peut être repris en échangeant l'espèce des éléments.

Une forme g linéo-quadratique définit de la même façon une série cubique à élément double triplement tangente à f; les élé-

ments communs à g et à un élément (ξ) tangent à f se séparent en deux groupes de un et deux.

De même, une forme doublement quadratique définit, en général, une série biquadratique à deux éléments doubles quatre fois tangente à f : les éléments communs à g et à un élément (ξ) tangent à f se séparent en deux groupes de deux.

Une forme doublement quadratique symétrique définit une série quadratique sans relation particulière avec f. Si l'on emploie les formules canoniques, et si

$$g = \alpha_0 \lambda_1^2 \mu_1^2 + 2\alpha_1 \lambda_1 \mu_1 (\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1) \\ + \alpha_2 (\lambda_1^2 \mu_2^2 + \lambda_2^2 \mu_1^2) + 4\alpha_3 \lambda_1 \lambda_2 \mu_1 \mu_2 + 2\alpha_4 \lambda_2 \mu_2 (\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1) + \alpha_5 \lambda_2^2 \mu_2^2,$$

l'équation de la série g est

$$\alpha_2 x_1^2 + \alpha_0 x_2^2 + \alpha_5 x_3^2 + 2(2\alpha_3 - \alpha_2) x_2 x_3 + 2\alpha_4 x_3 x_1 + 2\alpha_1 x_1 x_2 = 0,$$

et son discriminant est, en gardant les notations des n°s 106 et suivants, l'invariant $i_3 + \frac{i_2 j_1}{2} - \frac{j_1^3}{4}$.

230. On peut appliquer ce qui précède à la résolution du problème général suivant : si (ν) est un élément quelconque de f, et si $g(\lambda, \mu) = 0$, $h(\lambda, \mu) = 0$ définissent deux séries ternaires, l'élément tangent à f en (ν) a en commun avec g et h deux éléments (y) et (z); si l'on considère les nouveaux éléments tangents à f contenant (y) et (z), ils ont en commun un élément (x) qui décrit une série F que l'on demande d'étudier. Il est clair que si l'on considère (x) comme défini par (λ) et (μ), il suffit, pour avoir la série des (x), d'éliminer les (ν) entre les deux équations

$$g(\lambda, \nu) = 0, \qquad h(\mu, \nu) = 0.$$

Si ces équations sont symétriques des degrés p et q, le résultant est de degré pq par rapport aux (λ) et aux (μ), en général non symétrique, de sorte que le lieu cherché est de degré $2pq$.

Lorsque l'une des formes g et h est décomposable en facteurs non symétriques, il est clair que le lieu se décompose en deux séries distinctes, et même en quatre séries distinctes lorsque g et h sont toutes deux décomposables.

Restant dans le cas général, les éléments communs à f et à F sont déterminés par les équations $g(\lambda, \nu) = 0$, $h(\lambda, \nu) = 0$; ce

sont les éléments de contacts des $2pq$ éléments tangents à f contenant les éléments communs à g et h : en chacun de ces éléments les séries f et F sont tangentes.

On peut déterminer les éléments doubles de F, comme on l'a dit au n° 228, en cherchant le nombre des solutions communes aux équations

$$g(\lambda, \nu) = 0, \qquad h(\mu, \nu) = 0, \qquad g(\mu, \nu') = 0, \qquad h(\lambda, \nu') = 0,$$

puisque, en éliminant les (ν') entre les deux dernières, on trouve encore l'équation de la série F, les (λ) et les (μ) étant permutés. En supprimant les solutions déjà indiquées pour lesquelles les (λ) coïncident avec les (μ), les (ν) avec les (ν'), on obtient ainsi $2pq(pq-1)$ solutions donnant $pq(pq-1)$ éléments doubles.

On a encore d'autres éléments doubles pour F obtenus en écrivant que les équations $g(\lambda, \nu) = 0$, $h(\mu, \nu) = 0$ ont deux racines (ν) communes; un calcul analogue à celui du n° 187 fournit ainsi $pq(p-1)(q-1)$ nouveaux éléments doubles. Ceux-ci sont donc au total en nombre $pq(2pq-p-q)$. La série F n'aura pas, en général, d'éléments cuspidaux et, par suite, sera de la classe $2pq(p+q-1)$.

Les éléments tangents communs à f et à F sont faciles à déterminer; ils sont en nombre $4pq(p+q-1)$ et nous en connaissons déjà $2pq$ qui comptent chacun deux fois. Les autres sont obtenus en écrivant : 1° que $g(\lambda, \nu) = 0$ a une racine double en (ν), ce qui arrive $2p(p-1)$ fois, et alors, à chaque système (λ) ainsi déterminé, correspondent q systèmes doubles (μ); 2° que les équations $g(\lambda, \nu) = 0$, $\dfrac{\partial h(\mu, \nu)}{\partial \mu_1} = 0$, $\dfrac{\partial h(\mu, \nu)}{\partial \mu_2} = 0$ ont une racine commune, ce qui arrive $2pq(q-1)$ fois; 3° en répétant ce que nous venons de dire après interversion des lettres g et h.

On voit qu'il y a $2p(p-1)$ éléments tangents communs à f et F, d'ordre q de multiplicité pour F, et de même $2q(q-1)$ éléments d'ordre p de multiplicité.

On peut supposer les séries g et h identiques. Dans ce cas, le résultant des équations $g(\lambda, \nu) = 0$, $g(\mu, \nu) = 0$ contient $(\lambda\mu)^p$ en facteur et le quotient est symétrique; donc la série F est de degré $p(p-1)$. Les éléments communs à f et à F sont obtenus en écrivant que $g(\lambda, \nu) = 0$ a une racine double en (λ) : ils sont

faciles à définir géométriquement. Il en est de même des éléments doubles en nombre $\frac{p}{2}(p-1)^2(p-2)$ et des éléments tangents communs avec f en nombre $2p(p-1)(2p-3)$.

De même, si l'on suppose g et h décomposables, et que l'on étudie la partie de la série F fournie par l'élimination des (ν) entre les équations

$$g'(\lambda, \nu) = 0, \qquad h'(\mu, \nu) = 0,$$

respectivement des degrés p' et p'', q' et q'', on trouvera une série de degré $p'q''+p''q'$, autant de fois tangente à f, et possédant

$$\frac{1}{2}p'q''(p'q''-1)+\frac{1}{2}p''q'(p''q'-1)+p'q'(p''-1)(q''-1)$$

éléments doubles, de sorte que sa classe est $2p'q'(p''+q''-1)$.

Si de plus les fonctions g' et h' sont identiques, on obtient alors une série de degré $p''(p'-1)$, ne touchant pas f en général, admettant $\frac{1}{2}(p'-1)(p''-1)(p'p''-p'-p'')$ éléments doubles, et de classe $(p'-1)(2p'p''-p'-2p'')$.

231. Nous ne ferons que signaler, en terminant, l'extension que l'on peut donner aux recherches qui viennent de nous occuper. Parmi les applications que l'on en peut faire, citons d'abord les théorèmes bien connus relatifs aux suites circonscrites à une série quadratique f et dont tous les éléments de première espèce, sauf un, sont situés sur des éléments fixes de seconde espèce ou sur des séries quadratiques fixes bitangentes à f; puis les propositions relatives aux séries qui contiennent tous les éléments de première espèce déterminés par les éléments de seconde espèce d'une suite circonscrite à f, etc.

Nous nous arrêterons seulement sur le cas particulier suivant. Revenons au problème général du n° 230, et supposons que les séries g et h soient des séries quadratiques telles que l'équation de F obtenue par élimination des (ν) entre $g(\lambda, \nu)=0$, $h(\mu, \nu)=0$, soit symétrique en (λ) et (μ). Dans ce cas chaque élément de la série F est obtenu deux fois; cette série est du quatrième degré seulement, et n'est pas tangente à f : elle a avec f huit éléments communs qui se déterminent immédiatement.

En écrivant que les équations $g(\lambda, \nu) = 0$, $h(\mu, \nu) = 0$ ont deux racines communes (ν), on obtient encore pour F quatre éléments doubles : d'où l'on déduit que F se décompose en deux séries quadratiques F_1 et F_2. Si maintenant l'on étudie les éléments tangents communs à F et à f, on voit tout de suite que ce qui précède ne peut subsister qu'en supposant que f, g, h ont quatre éléments tangents communs, qui sont eux-mêmes tangents à F_1 et F_2.

En écrivant alors que l'on a à la fois $g(\lambda, \nu) = 0$, $\frac{\partial h(\mu, \nu)}{\partial \mu_1} = 0$, $\frac{\partial h(\mu, \nu)}{\partial \mu_2} = 0$, ou bien à la fois $\frac{\partial g(\lambda, \nu)}{\partial \lambda_1} = 0$, $\frac{\partial g(\lambda, \nu)}{\partial \lambda_2} = 0$, $h(\mu, \nu) = 0$, on détermine non pas des éléments tangents communs à f et à F, comme plus haut, mais les quatre éléments doubles de F, c'est-à-dire les quatre éléments communs à F_1 et F_2. En rapprochant cette détermination de ces éléments de celle qui a été indiquée antérieurement, on obtient une proposition intéressante, facile à énoncer.

Réciproquement, lorsque les séries f, g, h ont quatre éléments tangents communs, la décomposition étudiée ci-dessus aura lieu. On le voit aisément de la façon suivante. Prenons g sous la forme canonique des nos 106 et 107 : ceci revient à écrire que l'élément fondamental O_1 a même polaire par rapport à f et g; d'après l'hypothèse, il aura même polaire aussi par rapport à h, comme nous le verrons plus loin. Si les équations de g et h sont de la forme

$$A\nu_1^2 + 2B\nu_1\nu_2 + C\nu_2^2 = 0,$$
$$A'\nu_1^2 + 2B'\nu_1\nu_2 + C'\nu_2^2 = 0,$$

A, B, C étant quadratiques en (λ), A', B', C' étant quadratiques en (μ), l'équation de F est

$$(AC' + CA' - 2BB')^2 - 4(AC - B^2)(A'C' - B'^2) = 0.$$

D'après l'hypothèse, les fonctions $AC - B^2$ et $A'C' - B'^2$ des (λ) et des (μ) sont les mêmes; alors, exprimant cette condition, on voit tout de suite que $AC' + CA' - 2BB'$ est symétrique en (λ) et (μ), et le théorème est démontré.



CHAPITRE VIII.

LE SYSTÈME DE DEUX FORMES QUADRATIQUES.

I. — Détermination des invariants. — Les éléments communs à deux séries quadratiques.

232. Envisageons l'ensemble de deux formes quadratiques de même espèce, soit $f = a_x^2$, $g = b_x^2$; si nous adjoignons aux coefficients de ces formes les variables (x) et (ξ), nous aurons d'abord comme invariants les discriminants d et d' de f et g, les formes f et g elles-mêmes, et leurs formes tangentielles $\varphi = \alpha_\xi^2$, $\psi = \beta_\xi^2$; nous pouvons encore y joindre la forme $(\xi \mid x)$.

Considérons maintenant la série quadratique (λ) du *faisceau* (f, g), définie par l'équation

$$\lambda_1 f + \lambda_2 g = 0,$$

et de même la série de seconde espèce (μ) du faisceau (φ, ψ) définie par

$$\mu_1 \varphi + \mu_2 \psi = 0.$$

Le discriminant de la série (λ) est

$$\lambda_1^3 d + \lambda_1^2 \lambda_2 e + \lambda_1 \lambda_2^2 e' + \lambda_2^3 d',$$

où e et e' sont deux invariants définis par des relations telles que

$$\begin{aligned} e &= \alpha_{11} b_{11} + \alpha_{22} b_{22} + \alpha_{33} b_{33} + 2\alpha_{23} b_{23} + 2\alpha_{31} b_{31} + 2\alpha_{12} b_{12} \\ &= b_{11} \frac{\partial d}{\partial a_{11}} + \ldots + b_{23} \frac{\partial d}{\partial a_{23}} + \ldots \\ &= \frac{1}{2} \left(a_{11} \frac{\partial d'}{\partial b_{11}} + \ldots + a_{23} \frac{\partial d'}{\partial b_{23}} + \ldots \right)^2, \end{aligned}$$

la puissance qui figure dans ce dernier membre étant symbolique.

Les relations qui définissent e' se déduisent facilement des précédentes.

Le discriminant de la série (μ) est de même

$$\mu_1^3 d^2 + \mu_1^2 \mu_2 de' + \mu_1 \mu_2^2 d'e + \mu_2^3 d'^2,$$

ce qui permet d'écrire de nouvelles égalités intéressantes pour définir e ou e'.

La forme équivalente à (λ) est

$$\lambda_1^2 \varphi + \lambda_1 \lambda_2 \chi + \lambda_2^2 \psi,$$

où l'invariant χ est encore une polaire :

$$\begin{aligned}
\chi &= b_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial a_{11}} + \ldots \quad b_{23} \frac{\partial \varphi}{\partial a_{23}} + \ldots \\
&= a_{11} \frac{\partial \psi}{\partial b_{11}} + \ldots + a_{23} \frac{\partial \psi}{\partial a_{23}} + \ldots \\
&= (a_{22} b_{33} + a_{33} b_{22} - 2 a_{23} b_{23}) \xi_1^2 + \ldots \\
&\quad + 2(a_{12} b_{13} + a_{13} b_{12} - a_{11} b_{23} - a_{23} b_{11}) \xi_2 \xi_3 + \ldots .
\end{aligned}$$

De même, la forme équivalente à (μ) est

$$\mu_1^2 df + \mu_1 \mu_2 h + \mu_2^2 d'g,$$

avec

$$\begin{aligned}
h &= \beta_{11} \frac{\partial (df)}{\partial \alpha_{11}} + \ldots = \alpha_{11} \frac{\partial (d'g)}{\partial \beta_{11}} + \ldots \\
&= (\alpha_{22} \beta_{33} + \alpha_{33} \beta_{22} - 2 \alpha_{23} \beta_{23}) x_1^2 + \ldots \\
&\quad + 2(\alpha_{12} \beta_{13} + \alpha_{13} \beta_{12} - \alpha_{11} \beta_{23} - \alpha_{23} \beta_{11}) x_2 x_3 + \ldots .
\end{aligned}$$

Les dix quantités f, g, h, φ, ψ, χ, d, e, e', d' forment un système d'invariants indépendants pour le système de coefficients et de variables envisagés.

On remarquera la dualité qui existe entre les formes de ce système : en les remplaçant par φ, ψ, $d d' \chi$, df, $d'g$, h, d^2, $e'd$, ed', d'^2, on obtiendrait les formes correspondantes relatives à l'ensemble formé par φ et ψ, f et g restant données.

233. Nous allons chercher tout de suite une forme canonique simultanée pour f et g. A cet effet, cherchons les éléments (x) qui ont même polaire par rapport à f et g : on doit avoir

$$\frac{f_{x_1}}{g_{x_1}} = \frac{f_{x_2}}{g_{x_2}} = \frac{f_{x_3}}{g_{x_3}}.$$

Si $-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ est la valeur commune de ces rapports, ces équations expriment d'abord que le discriminant de $\lambda_1 f + \lambda_2 g$ est nul, et,

par suite, on a l'équation

$$\Lambda = \begin{vmatrix} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 b_{11} & \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 b_{12} & \lambda_1 a_{13} + \lambda_2 b_{13} \\ \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 b_{12} & \lambda_1 a_{22} + \lambda_2 b_{22} & \lambda_1 a_{23} + \lambda_2 b_{23} \\ \lambda_1 a_{13} + \lambda_2 b_{12} & \lambda_1 a_{23} + \lambda_2 b_{23} & \lambda_1 a_{33} + \lambda_2 b_{33} \end{vmatrix}$$
$$= \lambda_1^3 d + \lambda_1^2 \lambda_2 e + \lambda_1 \lambda_2^2 e' + \lambda_2^3 d' = 0;$$

de plus, on voit que les éléments cherchés sont en même temps les éléments multiples du faisceau (f, g), c'est-à-dire les éléments multiples des séries de ce faisceau, $\lambda_1 f - \lambda_2 g = 0$, qui se décomposent.

Si une racine (λ) de l'équation $\Lambda = 0$ n'annule pas tous les mineurs du déterminant Λ, ce qui arrive nécessairement si cette racine est simple; à cette racine correspond une solution unique (x) : la série correspondante, $\lambda_1 f + \lambda_2 g = 0$, admet cet élément double unique.

Si une racine (λ) annule tous les mineurs de Λ, de sorte qu'elle est double ou triple, il lui correspond une infinité simple d'éléments (x) remplissant un élément de seconde espèce que représente deux fois l'équation $\lambda_1 f + \lambda_2 g = 0$.

Si f et g sont des formes distinctes, comme nous le supposerons, les éléments de Λ ne peuvent être tous nuls.

Si (λ), (λ') sont deux racines distinctes de $\Lambda = 0$, auxquelles correspondent des solutions (x) et (x') nécessairement distinctes, on a

$$\lambda_1 f_{x_i} + \lambda_2 g_{x_i} = 0, \qquad \lambda'_1 f_{x'_i} + \lambda'_2 g_{x'_i} = 0,$$

d'où

$$\lambda_1 a_{xx'} + \lambda_2 b_{xx'} = 0, \qquad \lambda'_1 a_{xx'} + \lambda'_2 b_{xx'} = 0,$$

et par suite, puisque l'on a $(\lambda\lambda') \neq 0$,

$$a_{xx'} = b_{xx'} = 0;$$

donc (x) et (x') sont conjugués par rapport à f et g, et, par suite, par rapport à toutes les séries du faisceau (f, g).

Si le déterminant Λ est nul identiquement, d et d' sont nuls, et, par suite, f et g sont décomposables. On peut prendre f sous l'une des formes $2a_{23}x_2x_3$ ou $a_{11}x_1^2$, et l'on vérifie sans peine que g représente alors deux éléments de seconde espèce dont l'un est commun avec ceux que représente f, ou bien qui ont en

commun un élément multiple de f. Toutes les séries du faisceau sont décomposables.

234. Le cas où Λ est nul identiquement étant laissé de côté, le faisceau (f, g) contient au plus trois séries décomposables qui n'ont pas d'élément double commun.

On peut alors démontrer sans peine les propriétés suivantes :

1° Supposons qu'une série décomposable (λ) se compose de deux éléments (ξ) distincts. En choisissant les coordonnées de façon que cette série soit $2x_2x_3 = 0$, l'étude de Λ montre immédiatement que, si la racine (λ) est simple, la solution correspondante (x), qui est ici O_1, n'appartient à aucune série du faisceau (f, g) autre que (λ); si la racine (λ) est double, O_1 appartient à toutes les séries du faisceau, qui y sont tangentes à un même élément (ξ), d'après les propriétés des polaires; cet élément tangent commun coïncide avec $x_2 = 0$ ou $x_3 = 0$ si (λ) est racine triple et seulement alors.

2° Supposons qu'une série décomposable (λ) soit une série linéaire double; son équation peut alors être prise sous la forme $x_1^2 = 0$. On voit ici que $x_1 = 0$ a en commun avec toutes les séries du faisceau deux éléments distincts A et B, si (λ) n'est pas triple; les séries sont tangentes en A et B, et leurs éléments tangents communs sont distincts de $x_1 = 0$. Si la racine (λ) est triple, $x_1 = 0$ est tangent à toutes les séries du faisceau en un même élément A.

235. Examinons maintenant les différents cas qui peuvent se présenter.

I. *L'équation* $\Lambda = 0$ *a trois racines simples.*

A ces racines correspondent trois éléments (x) distincts, qui ne sauraient appartenir à une même série linéaire, d'après leurs propriétés, et qui forment une suite triple conjuguée à la fois par rapport à f et g; il n'y a d'ailleurs pas d'autre telle suite. En la prenant pour suite de référence, on a les formes canoniques

$$f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2,$$
$$g = b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2,$$

et les trois quantités $a_{ii}b_{jj} - a_{jj}b_{ii}$ sont différentes de zéro.

II. *L'équation $\Delta = 0$ a une racine simple et une racine double qui n'annule pas tous les mineurs de Δ.*

C'est un cas limite du précédent.

Si O_1 correspond à la racine double, et O_2 à la racine simple, les séries sont tangentes en O_1 à O_1O_2, d'après les propriétés indiquées plus haut. La polaire de O_2 contient O_1 : si l'on suppose que O_3 appartient à cette polaire, on a les formes canoniques

$$f = a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{13}x_1x_3,$$
$$g = b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 + 2b_{13}x_1x_3;$$

d'ailleurs, on a

$$a_{22}b_{13} - a_{13}b_{22} = 0, \qquad a_{33}b_{13} - a_{13}b_{33} = 0.$$

III. *L'équation $\Delta = 0$ a une racine triple qui n'annule pas tous les mineurs de Δ.*

C'est encore un cas limite du précédent.

Si O_1 correspond à la racine triple, les séries y sont tangentes à Ω_3 par exemple. On a

$$f = a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{13}x_1x_3,$$
$$g = b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 + 2b_{23}x_2x_3 + 2b_{13}x_1x_3,$$

avec

$$a_{13}b_{22} - a_{22}b_{13} = 0, \qquad a_{22}b_{23} - a_{23}b_{22} = 0, \qquad a_{13}b_{23} - a_{23}b_{13} \neq 0.$$

O_1 est commun trois fois aux séries f et g; ces séries ont un quatrième élément commun que l'on peut prendre pour O_3; alors

$$a_{33} = b_{33} = 0.$$

IV. *L'équation $\Delta = 0$ a une racine simple et une racine double qui annule tous les mineurs de Δ.*

A la racine simple correspond par exemple O_1 : à la racine double correspondent tous les éléments de Ω_1, polaire de O_1, par suite. Si O_2 et O_3 sont conjugués harmoniques par rapport aux deux éléments A et B communs à Ω_1 et à f et g, la suite triple O_1, O_2, O_3 est conjuguée par rapport à f et g. On a donc d'une infinité simple de manières

$$f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2,$$
$$g = b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2.$$

avec

$$a_{22}b_{33} - a_{33}b_{22} = 0, \qquad a_{11}a_{22} - a_{22}b_{11} \neq 0, \qquad a_{11}b_{33} - a_{33}b_{11} \neq 0.$$

Si l'on prenait O_1AB pour suite de référence, on aurait

$$f = a_{11}x_1^2 + 2a_{23}x_2x_3,$$
$$g = b_{11}x_1^2 + 2b_{23}x_2x_3,$$

avec

$$a_{11}b_{23} - a_{23}b_{11} \neq 0.$$

V. *L'équation* $\Delta = 0$ *a une racine triple qui annule tous les mineurs de* Δ.

A cette racine correspondent tous les éléments de Ω_3; les séries du faisceau se touchent en O_1; si O_2 est quelconque sur Ω_3 et si Ω_2 est la polaire commune de O_2, on a

$$f = a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{13}x_1x_3,$$
$$g = b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 + 2b_{13}x_1x_3,$$

avec

$$a_{22}b_{13} - a_{13}b_{22} = 0, \qquad a_{22}b_{33} - a_{33}b_{22} \neq 0, \qquad a_{13}b_{33} - a_{33}b_{13} \neq 0.$$

236. L'analyse qui précède nous fournit d'abord la réduction de f et g à des formes canoniques, en particulier à des sommes de carrés lorsque cela est possible. Elle nous fournit aussi les éléments (x) qui ont même polaire par rapport à toutes les séries du faisceau, et par suite les éléments (ξ) qui ont même pôle par rapport à ces séries; les suites triples conjuguées par rapport à ces séries; les séries décomposables du faisceau, ainsi que leurs éléments multiples. Enfin elle nous fournit la disposition des éléments communs à deux séries quelconques du faisceau, qui sont les éléments communs à f et à g.

On voit tout de suite, en effet, qu'en laissant de côté les séries décomposables,

1° Dans le cas I, deux séries (λ) du faisceau ont en commun quatre éléments distincts, qui inversement, déterminent le faisceau;

2° Dans le cas II, deux séries (λ) se touchent en O_1, qui leur est commun deux fois, et ont deux autres éléments communs distincts, qui, avec O_1 et l'élément tangent commun Ω_3 en O_1, déterminent le faisceau;

3° Dans le cas III, deux séries du faisceau sont *osculatrices*, c'est-à-dire ont en commun trois fois l'élément O_1, où elles se touchent suivant Ω_3, et une fois un autre élément;

4° Dans le cas IV, deux séries du faisceau sont *bitangentes*, c'est-à-dire ont en commun deux fois les deux éléments A et B, en lesquels elles se touchent, les éléments tangents communs déterminant avec A et B le faisceau;

5° Dans le cas V, deux séries (λ) sont *surosculatrices*, c'est-à-dire ont en commun quatre fois l'élément O_1, où elles se touchent.

Les modifications à faire quand l'une des séries (λ) est décomposable, ou qu'elles sont toutes deux décomposables, sont évidentes.

237. Il est facile d'écrire les conditions qui expriment que l'on se trouve dans un cas particulier donné.

Les séries f et g sont simplement tangentes si l'équation $\Lambda = 0$ a une racine double, ce qui donne

$$27 d^2 d'^2 - 18 dd'ee' - e^2 e'^2 + 4 de'^3 + 4 d'e^3 = 0.$$

Les séries f et g sont osculatrices si $\Lambda = 0$ a une racine triple, c'est-à-dire si le hessien de la forme binaire Λ par rapport aux (λ) est nul identiquement, ce qui donne

$$\frac{3d}{e} = \frac{e}{e'} = \frac{e'}{3d'}.$$

Si les séries f et g sont bitangentes, et si (λ) est la racine double de $\Lambda = 0$, la forme équivalente à $\lambda_1 f + \lambda_2 g$ est nulle identiquement : on a donc

$$\lambda_1^2 \varphi + \lambda_1 \lambda_2 \chi + \lambda_2^2 \psi = 0;$$

les dérivées partielles de Λ sont nulles aussi; alors, éliminant linéairement λ_1^2, $\lambda_1 \lambda_2$ et λ_2^2 entre les trois équations ainsi formées, on obtient comme condition l'évanouissement identique de l'invariant

$$\begin{vmatrix} \varphi & \chi & \psi \\ 3d & 2e & e' \\ e & 2e' & 3d' \end{vmatrix}.$$

Cette condition nécessaire est suffisante aussi, comme nous le

montrerons plus loin, si les conditions d'osculation ne sont pas vérifiées.

Si les séries f et g sont surosculatrices, on a comme plus haut, pour la racine triple de $\Lambda = 0$,

$$\lambda_1^2 \varphi + \lambda_1 \lambda_2 \chi + \lambda_2^2 \psi = 0;$$

de plus, les dérivées partielles du second ordre de Λ sont nulles, et par suite

$$3d\lambda_1 + e\lambda_2 = 0, \qquad e\lambda_1 + e'\lambda_2 = 0, \qquad e'\lambda_1 + 3d'\lambda_2 = 0.$$

On en déduit, en particulier, les deux relations équivalentes :

$$e'\varphi - e\chi + 3d\psi = 0,$$
$$3d'\varphi - e'\chi + e\psi = 0:$$

ces conditions nécessaires sont aussi suffisantes, comme nous le verrons plus loin; elles entraînent les conditions d'osculation.

238. Tout ce qui précède peut être répété sur les séries φ et ψ et le faisceau $\mu_1 \varphi + \mu_2 \psi$ différent du faisceau $\lambda_1 f + \lambda_2 g$.

On obtiendra la forme canonique de φ et ψ, les éléments qui ont même polaire ou même pôle par rapport à φ et ψ; .... Si, en particulier, les séries f et g sont indécomposables, de sorte qu'il en est de même de φ et ψ, les éléments qui ont même polaire ou même pôle par rapport à φ et ψ sont les éléments déjà trouvés, qui ont même pôle ou même polaire par rapport à f et g; les suites triples conjuguées par rapport à φ et ψ sont les mêmes que les suites analogues relatives à f et g; les éléments communs à φ et à ψ sont les éléments tangents communs à f et à g; les séries décomposables du faisceau (φ, ψ) sont formées des éléments communs aux éléments tangents à f et à g, associés deux à deux, et ces couples d'éléments déterminent les éléments de seconde espèce qui ont même polaire par rapport à φ et ψ; ....

Ces résultats, réciproques de ceux précédemment obtenus, n'ont rien de surprenant, si l'on remarque que l'équation $M = 0$, obtenue en égalant à zéro le discriminant de $\mu_1 \varphi + \mu_2 \psi$, se réduit à l'équation $\Lambda = 0$ par la substitution

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{d'\lambda_2}{d\lambda_1};$$

les différents cas possibles seront donc les mêmes qu'au n° 235.

Dans le cas I, avec les notations déjà employées, les formes canoniques sont

$$\varphi = a_{22}a_{33}\xi_1^2 + a_{33}a_{11}\xi_2^2 + a_{11}a_{22}\xi_3^2,$$
$$\psi = b_{22}b_{33}\xi_1^2 + b_{33}b_{11}\xi_2^2 + b_{11}b_{22}\xi_3^2;$$

f et g ont en commun quatre éléments tangents distincts.

Dans le cas II, on a

$$\varphi = a_{22}a_{33}\xi_1^2 - a_{13}^2\xi_2^2 - 2a_{22}a_{13}\xi_1\xi_3,$$
$$\psi = b_{22}b_{33}\xi_1^2 - b_{13}^2\xi_2^2 - 2b_{22}b_{13}\xi_1\xi_3;$$

f et g ont en commun deux éléments tangents simples, et en outre Ω_3 deux fois.

Dans le cas III, on a

$$\varphi = (a_{22}a_{33} - a_{23}^2)\xi_1^2 - a_{13}^2\xi_2^2 - 2a_{22}a_{13}\xi_1\xi_3 - 2a_{13}a_{23}\xi_1\xi_2,$$
$$\psi = (b_{22}b_{33} - b_{23}^2)\xi_1^2 - b_{13}^2\xi_2^2 - 2b_{22}b_{13}\xi_1\xi_3 - 2b_{13}b_{23}\xi_1\xi_2;$$

Ω_3 est un élément tangent commun trois fois à f et g; il en existe un autre simple.

Dans le cas IV, on peut écrire φ et ψ comme dans le cas I, avec les conditions énoncées au n° 235; f et g ont deux éléments tangents communs, comptant chacun deux fois.

Enfin, dans le cas V, on a

$$\varphi = a_{22}a_{33}\xi_1^2 - a_{13}^2\xi_2^2 - 2a_{22}a_{13}\xi_1\xi_3,$$
$$\psi = b_{22}b_{33}\xi_1^2 - b_{13}^2\xi_2^2 - 2b_{22}b_{13}\xi_1\xi_3;$$

Ω_3 est un élément tangent commun quatre fois à f et à g.

Les conditions caractéristiques des divers cas s'expriment comme au numéro précédent; dans les cas IV et V, elles deviendront

$$\begin{vmatrix} f & h & g \\ 3d & 2de' & e \\ e' & 2d'e & 3d' \end{vmatrix} = 0$$

et

$$d'ef - e'h + 3dd'g = 0,$$
$$3dd'f - eh + de'g = 0.$$

239. Les séries décomposables du faisceau (f, g) correspondant aux racines de l'équation $\Delta = 0$, l'équation de ces séries, c'est-

à-dire des six éléments de seconde espèce qui contiennent les éléments communs à f et à g deux à deux, est évidemment

$$d'f^3 - e'f^2g + efg^2 - dg^3 = 0.$$

Il est d'ailleurs évident sur les formes canoniques que les éléments (ξ) qui constituent l'une de ces séries décomposables ont en commun un élément O_i, et sont conjugués harmoniques par rapport aux deux éléments Ω_j qui contiennent O_i; cette proposition, qui s'applique au cas I, est facile à modifier dans les cas particuliers.

La même chose peut se répéter sur les éléments déterminés par les séries décomposables du faisceau (φ, ψ); en particulier, ils ont pour équation

$$d'^2\varphi^3 - ed'\varphi^2\psi + e'd\varphi\psi^2 - d^2\psi^3 = 0.$$

Les séries du faisceau (f, g) ont pour équations tangentielles

$$\lambda_1^2\varphi + \lambda_1\lambda_2\chi + \lambda_2^2\psi = 0;$$

donc, il y en a deux qui touchent un élément (ξ) donné; ces deux séries sont confondues si (ξ) vérifie l'équation

$$4\varphi\psi - \chi^2 = 0;$$

d'ailleurs, il en est ainsi évidemment si (ξ) contient un des éléments communs à f et à g, de sorte que l'équation du quatrième degré que nous venons d'obtenir est celle de ces quatre éléments communs. Nous retrouverons ce résultat plus loin.

De même, l'équation des éléments communs à φ et ψ, c'est-à-dire des éléments tangents communs à f et g, sera

$$4dd'fg - h^2 = 0.$$

240. On peut envisager les deux invariants qui sont les jacobiens des formes f, g, h et φ, ψ, χ.

En se servant des formes canoniques générales du cas I, on a

$$h = a_{11}b_{11}(a_{22}b_{33} + a_{33}b_{22})x_1^2 + \ldots,$$
$$\chi = (a_{22}b_{33} + a_{33}b_{22})\xi_1^2 + \ldots;$$

le jacobien r de f, g, h est donc

$$r = x_1x_2x_3(a_{22}b_{33} - a_{33}b_{22})(a_{33}b_{11} - a_{11}b_{33})(a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11});$$

le jacobien ρ de φ, ψ, χ est

$$\rho = \xi_1\xi_2\xi_3(a_{22}b_{33} - a_{33}b_{22})(a_{33}b_{11} - a_{11}b_{33})(a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11}).$$

On voit que les équations $r = 0$ et $\rho = 0$ représentent les éléments O_i et Ω_i de la suite triple conjuguée par rapport à f et g.

Dans les cas IV et V seulement, r et ρ, toujours faciles à calculer, sont nuls identiquement : or ceci arrive toutes les fois que les fonctions f, g, h ou φ, ψ, χ sont liées par une relation, et cette remarque justifie ce qui a été dit plus haut sur la suffisance des conditions obtenues pour exprimer le double contact ou la surosculation.

Les invariants r et ρ sont liés par des relations aux invariants employés jusqu'à présent. Si (λ) est racine de $\Lambda = 0$, la forme

$$\lambda_1^2\varphi + \lambda_1\lambda_2\chi + \lambda_2^2\psi$$

est un carré parfait, et, égalée à zéro, représente deux fois l'un des éléments O_i, d'après ce qui a été dit plus haut : ρ^2 ne diffère donc que par un facteur constant du produit

$$\Pi(\lambda_1^2\varphi + \lambda_1\lambda_2\chi + \lambda_2^2\psi)$$

étendu aux trois racines de $\Lambda = 0$. On trouve alors sans peine

$$\begin{aligned} -\rho^2 = {} & \varphi^3 d'^2 + \varphi^2\psi(e'^2 - 2ed') + \varphi\psi^2(e^2 - 2e'd) + \psi^3 d^2 \\ & - e'd'\varphi^2\chi + (3dd' - ee')\varphi\psi\chi - ed\psi^2\chi + ed'\varphi\chi^2 + e'd\psi\chi^2 - dd'\chi^3. \end{aligned}$$

Un raisonnement analogue conduit à

$$\begin{aligned} -r^2 = {} & f^3 dd'^2 + f^2 g d'(e^2 - 2e'd) + fg^2 d(e'^2 - 2ed') + g^3 d^2 d' \\ & - ed'f^2h + (3dd' - ee')fgh - e'dg^2h + e'fh^2 + egh^2 - h^3. \end{aligned}$$

Remarquons que le calcul indiqué au commencement de ce numéro nous montre que les formes h et χ sont réduites à la même forme canonique que f et g, dans le cas général : la suite triple conjuguée par rapport à f et g l'est donc aussi par rapport aux séries h et χ. Mais la série h ne fait partie du faisceau (f, g) que dans les cas de double contact ou de surosculation ; il en est de même pour χ relativement au faisceau (φ, ψ).

241. Voici comment, dans le cas général où l'équation $\Lambda = 0$ a trois racines distinctes, on peut réduire f et g aux formes cano-

niques du cas I :

$$f = a'_{11} x'^2_1 + a'_{22} x'^2_2 + a'_{33} x'^2_3,$$
$$g = b'_{11} x'^2_1 + b'_{22} x'^2_2 + b'_{33} x'^2_3.$$

Soit

$$\Lambda = \Pi(\lambda_1 \lambda_2^{(i)} - \lambda_2 \lambda_1^{(i)}) \qquad (i = 1, 2, 3),$$

et faisons correspondre la racine $(\lambda^{(i)})$ à l'élément de référence O'_i; alors la forme équivalente à $d'\lambda_2^{(i)}\varphi + d\lambda_1^{(i)}\psi$, soit

$$d'(\lambda_2^{(i)})^2 f + \lambda_1^{(i)}\lambda_2^{(i)} h + d(\lambda_1^{(i)})^2 g,$$

ne diffère que par un facteur constant de x'^2_i.

En faisant $h = c_{x^2}$, et désignant par (y) un élément quelconque, on peut donc, en prenant la polaire, écrire

$$x'_i = d'(\lambda_2^{(i)})^2 a_{xy} + \lambda_1^{(i)}\lambda_2^{(i)} c_{xy} + d(\lambda_1^{(i)})^2 b_{xy}.$$

Le déterminant de la substitution ainsi définie, pour passer des (x') aux (x), est

$$\delta = -dd'(\lambda_1^{(2)}\lambda_2^{(3)} - \lambda_1^{(3)}\lambda_2^{(2)})(\lambda_1^{(3)}\lambda_2^{(1)} - \lambda_1^{(1)}\lambda_2^{(3)})(\lambda_1^{(1)}\lambda_2^{(2)} - \lambda_1^{(2)}\lambda_2^{(1)}) r(y),$$

d'après la définition de r comme jacobien.

Les rapports $\frac{\lambda_1^{(i)}}{\lambda_2^{(i)}}$ sont des invariants absolus, et l'on a

$$\frac{b'_{ii}}{a'_{ii}} = -\frac{\lambda_1^{(i)}}{\lambda_2^{(i)}}.$$

Par les propriétés des invariants, en faisant les (x) égaux aux (y), et appelant (y') les transformées des (y), on a

$$a'_{11} y'^2_1 + a'_{22} y'^2_2 + a'_{33} y'^2_3 = a_{y^2},$$

$$-\frac{\lambda_1^{(1)}}{\lambda_2^{(1)}} a'_{11} y'^2_1 - \frac{\lambda_1^{(2)}}{\lambda_2^{(2)}} a'_{22} y'^2_2 - \frac{\lambda_1^{(3)}}{\lambda_2^{(3)}} a'_{33} y'^2_3 = b_{y^2},$$

$$a'_{11} a'_{22} a'_{33} = \frac{d}{\delta^2};$$

puis, en se servant de h et de ces relations :

$$\frac{\lambda_1^{(1)}}{\lambda_2^{(1)}}\left(\frac{\lambda_1^{(2)}}{\lambda_2^{(2)}} + \frac{\lambda_1^{(3)}}{\lambda_2^{(3)}}\right) a'_{11} y'^2_1 + \ldots = \frac{c_{y^2}}{d}.$$

On tire des équations ainsi obtenues

$$a'_{ii} = -\frac{1}{\lambda_1^{(i)} y'_i (\lambda_1^{(i)}\lambda_2^{(j)} - \lambda_1^{(j)}\lambda_2^{(i)})(\lambda_1^{(i)}\lambda_2^{(k)} - \lambda_1^{(k)}\lambda_2^{(i)})},$$

les indices i, j, k étant différents.

Il vient donc

$$\lambda_1 f + \lambda_2 g = -\sum \frac{(\lambda_1 \lambda_2^{(i)} - \lambda_2 \lambda_1^{(i)}) x_i'^2}{y_i' \lambda_1^{(i)} \lambda_2^{(i)} (\lambda_1^{(i)} \lambda_2^{(j)} - \lambda_1^{(j)} \lambda_2^{(i)}) (\lambda_1^{(i)} \lambda_2^{(k)} - \lambda_1^{(k)} \lambda_2^{(i)})}.$$

Si l'on fait les (y) égaux aux (x), au second membre $\frac{x_i'^2}{y_i'}$ se réduit au carré parfait

$$d'(\lambda_2^{(i)})^2 a_{x^2} + \lambda_1^{(i)} \lambda_2^{(i)} c_{x^2} + d(\lambda_1^{(i)})^2 b_{x^2}.$$

d'après ce qui précède : on a ainsi décomposé $\lambda_1 f + \lambda_2 g$ en une somme de carrés, mais les nouvelles variables ne sont pas en évidence.

II. — Les invariants h et χ.

242. Soit (ξ) un élément de seconde espèce déterminé par (y) et (z) : un élément $(\rho_1 y + \rho_2 z)$ de (ξ) appartiendra à la série (λ) du faisceau (f, g) si l'on a

$$\lambda_1 [\rho_1^2 a_{y^2} + 2\rho_1\rho_2 a_{yz} + \rho_2^2 a_{z^2}] + \lambda_2 [\rho_1^2 b_{y^2} + 2\rho_1\rho_2 b_{yz} + \rho_2^2 b_{z^2}] = 0.$$

On voit, d'après cela, que les séries (λ) déterminent par leurs éléments communs avec (ξ) une involution dans l'espace (ξ) : les éléments doubles de l'involution sont les éléments de contact des deux séries (λ) qui touchent (ξ). L'involution n'est singulière que si ces éléments sont confondus, c'est-à-dire si (ξ) contient un élément commun à f et g.

243. Considérons en particulier les deux couples d'éléments communs à (ξ) et à f et g : si k est le rapport anharmonique qu'ils déterminent, on a

$$\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^2 = \frac{[a_{y^2} b_{z^2} - 2 a_{yz} b_{yz} + a_{z^2} b_{y^2}]^2}{4(a_{y^2} a_{z^2} - a_{yz}^2)(b_{y^2} b_{z^2} - b_{yz}^2)};$$

on a d'ailleurs

$$a_{y^2} a_{z^2} - a_{yz}^2 = \alpha_{\xi^2} = \varphi, \qquad b_{y^2} b_{z^2} - b_{yz}^2 = \beta_{\xi^2} = \psi,$$

et d'après la définition de χ comme polaire

$$a_{y^2} b_{z^2} - 2 a_{yz} b_{yz} + a_{z^2} b_{y^2} = \gamma_{\xi^2} = \chi;$$

donc

$$\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^2 = \frac{\chi^2}{4\varphi\psi}.$$

Cette équation définit la série des éléments (ξ) tels que k ait une valeur donnée : c'est en général une série biquadratique tangente à φ et à ψ suivant les éléments communs à ces séries et à χ.

Pour k nul ou infini, on retrouve l'équation des éléments communs à f et à g : $4\varphi\psi - \chi^2 = 0$.

Pour $k = -1$, on a $\chi = 0$: la série χ est donc celle des éléments (ξ) tels que les éléments communs à (ξ) et à f et g forment deux couples conjugués harmoniques.

D'après cela, il est clair que les éléments communs à φ et à χ, par exemple, sont les éléments tangents à f suivant les éléments communs à f et g.

244. De la même façon, les séries du faisceau (φ, ψ) déterminent par leurs éléments communs avec (x) une involution dans l'espace (x).

Si k est le rapport anharmonique des éléments communs à (x) et φ associés aux éléments communs à (x) et ψ, on a

$$\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^2 = \frac{h^2}{4dd'fg};$$

$4dd'fg - h^2 = 0$ est donc l'équation des éléments tangents communs à f et g ; $h = 0$ est la série des éléments (x) tels que les éléments tangents à f et g qui contiennent (x) forment deux couples conjugués harmoniques. Les éléments communs à f et h sont, par suite, les éléments de contact sur f des éléments tangents communs à f et à g.

Si g se décompose et représente deux éléments (ξ) distincts ayant (x) en commun, $h = 0$ représente les éléments tangents à f menés par (x). Si g représente un élément (ξ) double, h est nul identiquement ; $\chi = 0$ représente les éléments communs à f et à (ξ).

245. Le discriminant de h est $dd'(ee' - dd')$, et celui de χ est $ee' - dd'$. Si donc on est dans le cas général, c'est-à-dire si d et d' ne sont pas nuls, on voit que les séries h et χ se décomposent en même temps, quand on a $ee' - dd' = 0$.

Supposons cette condition réalisée, et employons les formes canoniques ; on a alors, par exemple, $a_{22}b_{33} + a_{33}b_{22} = 0$, et les

éléments fondamentaux O_1 et Ω_1 jouent un rôle particulier. D'après ce qui a été dit plus haut, h se compose de deux éléments contenant O_1, et chacun d'eux contient deux éléments de contact sur chacune des séries f et g des éléments tangents communs à f et g. De même χ se compose de deux éléments appartenant à Ω_1, et chacun d'eux contient deux des éléments tangents à chacune des séries f et g suivant les éléments communs à f et à g.

De plus, les éléments de la série décomposable du faisceau (f, g) qui a pour élément double O_1 ont pour pôles, par rapport à f comme par rapport à g, les éléments de χ; et de même les éléments de la série décomposable du faisceau (φ, ψ) qui a pour élément double Ω_1 ont pour polaires, par rapport à f comme par rapport à g, les éléments de h.

Les deux couples d'éléments de f et g situés sur Ω_1 sont conjugués harmoniques; les deux couples d'éléments tangents à f et g et contenant O_1 sont de même conjugués harmoniques.

Si A est un élément commun à f et g, et si B et C sont les deux autres éléments communs à f et g qui ne sont pas alignés avec A et O_1, le couple AB, AC est conjugué harmonique du couple formé par les éléments tangents en A à f et g.

La propriété correspondante a lieu relativement aux éléments communs à φ et ψ.

Réciproquement, chacune des propriétés que nous venons d'énoncer entraîne les autres. Deux séries f et g jouissant de ces propriétés peuvent être dites *harmoniques*.

Deux cercles orthogonaux, en Géométrie ordinaire, sont un exemple de deux séries harmoniques.

III. — Les invariants c et c'.

246. Cherchons d'abord quelle est la série définie par les polaires (ξ) par rapport à f des différents éléments (x) de g. Un calcul simple, exécuté sur les formes canoniques générales, conduit pour cette série à l'équation

$$c\varphi - d\chi = 0.$$

De même, la série des pôles (x) par rapport à f des éléments (ξ)

de ψ a pour équation

$$e'f - h = 0,$$

et les deux séries que nous venons de déterminer sont manifestement tangentielles l'une de l'autre, car en remplaçant un élément quelconque par son pôle ou sa polaire par rapport à f, on ne fait qu'exécuter une transformation homographique sur les éléments de l'espace, les nouveaux éléments remplissant le même espace, mais étant d'espèce opposée.

247. Étant données les deux séries f et g, on peut déterminer une série quadratique k telle que la série polaire de f, par rapport à k, soit g, en appelant série polaire de f par rapport à k celle des pôles des éléments tangents à f par rapport à k.

On voit d'abord que k doit être conjuguée par rapport à la suite triple conjuguée commune à f et g; alors un calcul simple montre l'existence de quatre solutions, que l'on peut écrire, avec les notations du n° 241,

$$0 = \sum \frac{(\lambda^{(j)}\lambda^{(k)})}{\sqrt{\lambda_1^{(i)}\lambda_2^{(i)}}} [d'(\lambda_2^{(i)})^2 f + \lambda_1^{(i)}\lambda_2^{(i)} h + d(\lambda_1^{(i)})^2 g].$$

Nous n'examinerons pas les cas particuliers. Indiquons cependant que si f et g sont identiques, k doit être bitangente à f; et, en outre, k et f sont harmoniques : leurs séries invariantes h et χ se réduisent aux éléments déterminés par les deux éléments tangents ou de contact comptés deux fois.

248. La polaire (ξ), par rapport à f, d'un élément (x) de g peut-elle déterminer sur g deux éléments (y) et (z) conjugués par rapport à f? Ceci exige que l'on ait $\chi = 0$, d'après les propriétés de la série χ; si donc e n'est pas nul, on a aussi $\varphi = 0$, d'après le n° 246, et les éléments (ξ) considérés sont les éléments tangents à f suivant les éléments communs à f et à g. De là résulte qu'il n'existe pas de suite triple proprement dite, conjuguée par rapport à f et inscrite à g.

Mais si l'invariant e est nul, on a $\chi = 0$, quel que soit (x); il existe alors une infinité simple de suites triples conjuguées par rapport à f et inscrites à g; chaque élément de g détermine l'une d'elles.

On a ainsi la signification géométrique de la condition $e = 0$.

La condition $e' = 0$ aura une signification analogue, les rôles de f et g étant renversés.

De plus, un raisonnement semblable montre encore que si e' n'est pas nul, il n'y a aucune suite triple proprement dite, conjuguée par rapport à f et circonscrite à g; si $e' = 0$, on a, au contraire, une infinité simple de telles suites. On a ainsi une nouvelle interprétation de la condition $e' = 0$ et, par suite, de la condition $e = 0$.

Cette double interprétation résulte immédiatement de la dualité déjà signalée entre les invariants des systèmes (f, g) et (φ, ψ).

249. Ce que nous venons de dire se modifie dans les cas particuliers où les séries f et g ne sont plus toutes deux indécomposables.

Supposons que

$$f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2,$$

ce qui est toujours possible, g étant quelconque. Alors

$$e = a_{22}a_{33}b_{11} + a_{33}a_{11}b_{22} + a_{11}a_{22}b_{33}.$$

Si f est carré parfait, e est nul. Si f est décomposable sans être carré parfait, de sorte que par exemple $a_{11} = 0$ et $a_{22}a_{33} \neq 0$, alors e s'annule en même temps que b_{11}. Donc $e = 0$ signifie que l'élément multiple de f appartient à g.

On a aussi

$$e' = a_{11}\beta_{11} + a_{22}\beta_{22} + a_{33}\beta_{33};$$

si f est carré parfait, de sorte que $a_{22} = a_{33} = 0$, e' s'annule avec β_{11} : donc $e' = 0$ signifie que l'élément (ξ), représenté deux fois par f, est tangent à g.

Si f est décomposable sans être carré parfait, comme plus haut, on verra sans peine que les éléments représentés par $f = 0$ sont conjugués par rapport à g.

La même méthode pourrait être employée pour retrouver les résultats du numéro précédent, dans le cas général.

IV. — Les réseaux (f, g, h) et (φ, ψ, χ).

250. Les séries quadratiques dont les équations sont

$$\alpha_1 f + \alpha_2 g + \alpha_3 h = 0,$$

les (α) étant des constantes quelconques, forment un système linéaire doublement infini, ou *réseau*, particulier.

Si F est une série particulière du réseau, correspondant aux valeurs (α) des paramètres, le discriminant de F sera

$$\begin{aligned} D = d\alpha_1^3 + e\alpha_1^2\alpha_2 + e'\alpha_1\alpha_2^2 + d'\alpha_2^3 + 2de'\alpha_1^2\alpha_3 + (3dd' + ee')\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \\ + 2d'e\alpha_2^2\alpha_3 + d(e'^2 + d'e)\alpha_1\alpha_3^2 + d'(e^2 + de')\alpha_2\alpha_3^2 + dd'(ee' - dd')\alpha_3^3 \end{aligned}$$

et sa forme tangentielle aura pour expression

$$\begin{aligned} \Phi = \alpha_1^2\varphi + \alpha_2^2\psi + \alpha_3^2(ed'\varphi + e'd\psi - dd'\chi) \\ + \alpha_1\alpha_2\chi + \alpha_1\alpha_3(e'\varphi + d\psi) + \alpha_2\alpha_3(d'\varphi + e\psi) : \end{aligned}$$

ces résultats s'obtiennent sans peine en se servant des formes canoniques générales.

Si l'on considère une seconde série, d'équation

$$G = \beta_1 f + \beta_2 g + \beta_3 h = 0,$$

les invariants χ, e, e', relatifs à F et G, seront, avec les notations ordinaires des polaires,

$$X = 2\Phi_{\alpha\beta}, \qquad E = 3D_{\alpha^2\beta}, \qquad E' = 3D_{\alpha\beta^2}.$$

L'invariant h se présente moins simplement et est moins utile.

Si, de même, on envisage une série du réseau (φ, ψ, χ), c'est-à-dire d'équation

$$\alpha_1\varphi + \alpha_2\psi + \alpha_3\chi = 0,$$

son discriminant sera

$$\begin{aligned} d^2\alpha_1^3 + de'\alpha_1^2\alpha_2 + d'e\alpha_1\alpha_2^2 + d'^2\alpha_2^3 + 2de\alpha_1^2\alpha_3 + (3dd' + ee')\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \\ + 2d'e'\alpha_2^2\alpha_3 + (e^2 + de')\alpha_1\alpha_3^2 + (e'^2 + d'e)\alpha_2\alpha_3^2 + (ee' - dd')\alpha_3^3 \end{aligned}$$

et sa forme tangentielle aura pour expression

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 df + \alpha_2^2 d'g + \alpha_3^2(e'f + eg - h) \\ + \alpha_1\alpha_2 h + \alpha_1\alpha_3(ef + dg) + \alpha_2\alpha_3(d'f + e'g); \end{aligned}$$

les invariants simultanés de deux séries du réseau en résultent comme précédemment.

Les deux réseaux (f, g, h) et (φ, ψ, χ) sont équivalents.

251. Appelons toujours $\Delta = 0$ l'équation

$$d\lambda_1^3 + e\lambda_1^2\lambda_2 + e'\lambda_1\lambda_2^2 + d'\lambda_2^3 = 0,$$

dont les racines déterminent les séries décomposables du faisceau (f, g). Si alors nous considérons le faisceau (F, G) dont les séries ont pour équations $\mu_1 F + \mu_2 G = 0$, les séries décomposables de ce faisceau seront déterminées par l'équation

$$D\mu_1^3 + E\mu_1^2\mu_2 + E'\mu_1\mu_2^2 + D'\mu_2^3 = 0,$$

dont les racines sont liées à celles de $\Lambda = 0$ par la relation

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = -\frac{\beta_1 - \beta_2\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} + \beta_3\left(e' + d'\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)}{\alpha_1 - \alpha_2\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} + \alpha_3\left(e' + d'\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)},$$

comme le montrent immédiatement les formules canoniques. De même, les séries décomposables du faisceau

$$\mu_1(\alpha_1\varphi + \alpha_2\psi + \alpha_3\chi) + \mu_2(\beta_1\varphi + \beta_2\psi + \beta_3\chi) = 0$$

correspondent aux valeurs

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = -\frac{\beta_1 d - \beta_2 d'\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} + \beta_3\left(e + d\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)}{\alpha_1 d - \alpha_2 d'\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} + \alpha_3\left(e + d\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)}.$$

252. Il est facile, avec ces formules, de former l'équation des éléments communs à F et G : ce sera

$$4\Phi\Psi - X^2 = 0,$$

équation qu'il serait encore possible de transformer.

Comme application, considérons les éléments de contact avec f des éléments tangents communs à f et g : ce sont les éléments communs à f et h et, par suite, leur équation sera

$$4\varphi(ed'\varphi + e'd\psi - dd'\chi) - (e'\varphi + d\psi)^2 = 0:$$

les séries décomposables du faisceau (f, h), dont la signification géométrique est évidente d'après ce qui précède, auront de même pour équation

$$\Lambda(d'f,\ h - e'f) = 0.$$

ou

$$d'(dd' - ee')f^3 + (e'^2 + d'e)f^2h - 2e'fh^2 + h^3 = 0.$$

De même, en considérant le faisceau (φ, χ), on voit que les élé-

ments tangents à f suivant les éléments communs à f et à g sont

$$4\,df(e'f+eg-h)-(ef+dg)^2=0;$$

les séries décomposables du faisceau sont

$$\Lambda(d\chi-e\varphi,\ d\varphi)=0,$$

ou

$$(dd'-ee')\varphi^3+(e^2+de')\varphi^2\chi-2de\varphi\chi^2+d^2\chi^3=0.$$

L'invariant c relatif à f et h est $2de'$: il est nul avec e'; etc.

253. Envisageons la série F, et cherchons l'équation des éléments communs à F et à Ω_i, correspondant à la racine $(\lambda^{(i)})$ de l'équation $\Lambda=0$, les coordonnées étant supposées coïncider avec la suite triple conjuguée commune à f et g.

L'équation de Ω_i compté deux fois est, en supprimant l'indice i,

$$d'\lambda_2^2 f+\lambda_1\lambda_2 h+d\lambda_1^2 g=0;$$

si G est cette série, l'invariant X relatif à F et G définit les éléments cherchés; leur équation est donc

$$\begin{aligned}
0=\alpha_1&[(e'\lambda_1\lambda_2+2d'\lambda_2^2)\varphi+d\lambda_1\lambda_2\psi+d\lambda_1^2\chi]\\
&+\alpha_2[d'\lambda_1\lambda_2\varphi+(2d\lambda_1^2+e\lambda_1\lambda_2)\psi+d'\lambda_2^2\chi]\\
&+\alpha_3[(d\lambda_1^2+2e\lambda_1\lambda_2+e'\lambda_2^2)d'\varphi\\
&\qquad+(e\lambda_1^2+2e'\lambda_1\lambda_2+d'\lambda_2^2)d\psi-2dd'\lambda_1\lambda_2\chi].
\end{aligned}$$

Les éléments tangents à F menés par O_i, et par suite tangents suivant les éléments dont nous venons de déterminer l'équation, sont aussi faciles à déterminer; on obtient leur équation en égalant à zéro l'invariant simultané relatif à la forme tangentielle de F et à $\lambda_1^2\varphi+\lambda_1\lambda_2\chi+\lambda_2^2\psi$; ce sera

$$\begin{aligned}
0=\alpha_1^2&[(2d\lambda_1^2+e\lambda_1\lambda_2)f+d\lambda_1\lambda_2 g+\lambda_2^2 h]\\
&+\alpha_2^2[d'\lambda_1\lambda_2 f+(e'\lambda_1\lambda_2+2d'\lambda_2^2)g+\lambda_1^2 h]\\
&+\alpha_3^2\{[de\lambda_1^2+(e^2-de')\lambda_1\lambda_2-dd'\lambda_2^2]d'f\\
&\qquad+[-dd'\lambda_1^2+(e'^2-d'e)\lambda_1\lambda_2+d'e'\lambda_2^2]dg\\
&\qquad\qquad+(de'\lambda_1^2+2dd'\lambda_1\lambda_2+d'e\lambda_2^2)h\}\\
&+\alpha_1\alpha_2[(e\lambda_1^2+2e'\lambda_1\lambda_2+d'\lambda_2^2)f+(d\lambda_1^2+2e\lambda_1\lambda_2+e'\lambda_2^2)g-2\lambda_1\lambda_2 h]\\
&+\alpha_1\alpha_3\{[2de'\lambda_1^2+(dd'+ee')\lambda_1\lambda_2]f\\
&\qquad+2(e'\lambda_1\lambda_2+d'\lambda_2^2)dg+(d\lambda_1^2+e'\lambda_2^2)h\}\\
&+\alpha_2\alpha_3\{2(d\lambda_1^2+e\lambda_1\lambda_2)d'f\\
&\qquad+[(dd'+ee')\lambda_1\lambda_2+2d'e\lambda_2^2]g+(e\lambda_1^2+d'\lambda_2^2)h\}.
\end{aligned}$$

Les mêmes questions relatives à la série

$$\alpha_1\varphi + \alpha_2\psi + \alpha_3\chi = 0$$

se résoudront facilement de la même façon; d'ailleurs les équations correspondantes se déduiront des précédentes en changeant les invariants $f, g, h, \varphi, \psi, \chi, d, d', e, e'$: comme nous l'avons déjà dit, en φ, ψ, $dd'\chi$, df, $d'g$, h, d^2, d'^2, de', $d'e$, et en outre α_3 en $\frac{\alpha_3}{dd'}$, λ_1 en $d'\lambda_2$, λ_2 en $d\lambda_1$.

254. Deux séries F et G définies comme plus haut déterminent sur Ω_i deux couples d'éléments dont on peut chercher le rapport anharmonique k_i. En prenant pour inconnue auxiliaire

$$t_i = 4\left(\frac{1+k_i}{1-k_i}\right)^2,$$

on a sans peine, en se servant des formes canoniques,

$$t_1 = 2 + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_2},$$

en posant

$$z_i = \frac{\alpha_1 - \alpha_2 \frac{\lambda_1^{(i)}}{\lambda_2^{(i)}} + \alpha_3\left(e' + d'\frac{\lambda_2^{(i)}}{\lambda_1^{(i)}}\right)}{\beta_1 - \beta_2 \frac{\lambda_1^{(i)}}{\lambda_2^{(i)}} + \beta_3\left(e' + d'\frac{\lambda_2^{(i)}}{\lambda_1^{(i)}}\right)};$$

il est alors facile de former l'équation du troisième degré qui a pour racines les valeurs de t.

C'est ainsi que, pour f et g, on obtient l'équation

$$\begin{aligned} & d^2d'^2t^3 - dd\,(ee' + 3dd')t^2 \\ & \quad + (3d^2d'^2 - ee'dd' + de'^3 + d'e^3)t - (dd' - ee')^2 = 0. \end{aligned}$$

Voici un autre problème tout semblable, mais un peu moins simple. Deux séries du réseau (φ, ψ, χ), correspondant à des valeurs (β) et (γ) des paramètres, déterminent trois séries décomposables, formées chacune de deux éléments appartenant à l'un des Ω_i. On peut chercher le rapport anharmonique du couple ainsi obtenu sur Ω_i avec le couple formé par les éléments communs à F et à Ω_i, F étant déterminée comme ci-dessus.

En appelant k_i le rapport anharmonique considéré, et intro-

duisant l'inconnue t_i comme plus haut, on a tout de suite

$$t_1 = 2 + \frac{z_{12}}{z_{13}} + \frac{z_{13}}{z_{12}},$$

où, par exemple,

$$z_{12} = \frac{(\mu_1^{(1)}\beta_1 + \mu_2^{(1)}\gamma_1)d - (\mu_1^{(1)}\beta_2 + \mu_2^{(1)}\gamma_2)d' \frac{\lambda_2^{(3)}}{\lambda_1^{(3)}} + (\mu_1^{(1)}\beta_3 + \mu_2^{(1)}\gamma_3)\left(e + d\frac{\lambda_1^{(3)}}{\lambda_2^{(3)}}\right)}{\alpha_1 - \alpha_2 \frac{\lambda_1^{(2)}}{\lambda_2^{(2)}} + \alpha_3\left(e' + d'\frac{\lambda_2^{(2)}}{\lambda_1^{(2)}}\right)},$$

avec

$$\frac{\mu_1^{(1)}}{\mu_2^{(1)}} = -\frac{\gamma_1 d - \gamma_2 d' \frac{\lambda_2^{(1)}}{\lambda_1^{(1)}} + \gamma_3\left(e + d\frac{\lambda_1^{(1)}}{\lambda_2^{(1)}}\right)}{\beta_1 d - \beta_2 d' \frac{\lambda_2^{(1)}}{\lambda_1^{(1)}} + \beta_3\left(e + d\frac{\lambda_1^{(1)}}{\lambda_2^{(1)}}\right)}.$$

On en déduit sans peine l'équation en t.

Si par exemple on prend f pour F, φ et ψ pour les séries données de seconde espèce, on trouvera

$$\frac{1}{(t-3)^3} - \frac{1}{(t-3)^2} - \frac{27d^2d'^2 - 18dd'ee' - e^2e'^2 + 4d'e^3 + 4de'^3}{(e'^2 - 3d'e)^3}d'^2 = 0:$$

le dernier terme a pour numérateur le discriminant de l'équation $\Lambda = 0$.

On peut multiplier les applications du même genre.

255. Les équations que l'on obtient comme nous venons de le dire ne dépendent que des deux invariants absolus géométriques de f et g, pour lesquels on peut prendre les fonctions $\frac{e^2}{e'd}$ et $\frac{e'^2}{ed'}$. On remarquera que si l'on passe du système (f, g) au système (φ, ψ), ces deux invariants absolus se changent l'un dans l'autre : donc, pour passer d'une question relative au système (f, g) à la question correspondante relative au système (φ, ψ), il suffira d'intervertir d et d', e et e', comme si l'on intervertissait les rôles de f et g. Ce dernier point devient évident, si l'on fait une transformation telle que les séries f et g soient polaires l'une de l'autre par rapport à une même série quadratique.

V. — Le faisceau (f, g).

256. Le faisceau (f, g), dont les diverses séries ont pour équations

$$\lambda_1 f + \lambda_2 g = 0,$$

est contenu dans le réseau (f, g, h). Son étude directe présente cependant un certain intérêt.

Le faisceau est défini par deux quelconques des séries dont il se compose, supposées distinctes : son étude spéciale, indépendante des séries particulières f et g, revient donc à celle de la forme à variables ternaires (x) et à variables binaires (λ)

$$F = \lambda_1 f + \lambda_2 g.$$

Les invariants multiples de cette forme seront ceux du faisceau ou les combinants de f et g : nous considérerons surtout ceux qui dépendent des variables (x) et (ξ) ainsi que des coefficients, et qui, par suite, sont indépendants au nombre de sept.

Nous nous servirons comme auxiliaires du discriminant de F,

$$D = d\lambda_1^3 + e\lambda_1^2\lambda_2 + e'\lambda_1\lambda_2^2 + d'\lambda_2^3,$$

et de la forme tangentielle de F

$$\Phi = \lambda_1^2\varphi + \lambda_1\lambda_2\chi + \lambda_2^2\psi.$$

D est une forme cubique binaire par rapport aux (λ); son discriminant

$$\Delta = -\frac{1}{27}(27 d^2 d'^2 - 18 dd'ee' + 4de'^3 + 4d'e^3 - e^2e'^2)$$

est le seul invariant proprement dit du faisceau : égalé à zéro, il exprime que les séries du faisceau sont simplement tangentes. Le discriminant de la forme quadratique Φ, soit

$$\Omega = \frac{1}{4}(4\varphi\psi - \chi^2),$$

est un invariant du faisceau : égalé à zéro, il définit les quatre éléments communs à toutes les séries du faisceau.

Le hessien de la forme D est

$$H = \frac{1}{9}[(3de' - e^2)\lambda_1^2 + (9dd' - ee')\lambda_1\lambda_2 + (3d'e - e'^2)\lambda_2^2];$$

son évanouissement identique exprime que les séries du faisceau sont osculatrices.

Les formes quadratiques en (λ) désignées par Φ et H ont un

invariant simultané que l'on peut écrire

$$\begin{vmatrix} \varphi & \chi & \psi \\ 3d & 2e & e' \\ e & 2e' & 3d' \end{vmatrix};$$

il exprime, par son évanouissement identique, que les séries du faisceau sont doublement tangentes, ainsi que nous l'avons déjà vu.

La forme Φ nous montre encore que le jacobien ρ des formes φ, ψ, χ est un invariant du faisceau : nous connaissons sa signification, et nous savons que s'il est identiquement nul, c'est que les séries du faisceau sont bitangentes, comme tout à l'heure.

Formons maintenant les invariants qui ne dépendent que des (x). On en obtient trois, qui sont liés à Δ par une relation bien connue, en éliminant les (λ) entre F et soit la forme cubique D, soit le hessien H de cette forme, soit enfin l'invariant cubique J de cette forme, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} J = \frac{1}{27}\big[&(27d^2d' - 9dee' + 2e^3)\lambda_1^3 + (27dd'e + 3e^2e' - 18de'^2)\lambda_1^2\lambda_2 \\ &- (27dd'e' + 3ee'^2 - 18d'e^2)\lambda_1\lambda_2^2 - (27dd'^2 - 9d'ee' + 2e'^3)\lambda_2^3\big]. \end{aligned}$$

Le premier a une signification connue; nous reviendrons sur les deux autres un peu plus loin.

Formons maintenant la fonction $J^2(D, \Phi)$, D et Φ étant considérées comme des formes binaires aux variables (λ); on obtient l'invariant auxiliaire

$$\Sigma = \lambda_1(e'\varphi - e\chi + 3d\psi) + \lambda_2(3d'\varphi - e'\chi + e\psi),$$

dont l'évanouissement identique exprime, comme l'on sait, que les séries du faisceau sont surosculatrices. Si, de plus, nous calculons la forme tangentielle de cet invariant, nous trouvons

$$\begin{aligned} = \; & f[(e'^2 - 3d'e)d\lambda_1^2 + (3dd'e' + ee'^2 - 4d'e^2)\lambda_1\lambda_2 + (9dd'^2 + e'^3 - 4d'ee')\lambda_2^2] \\ & + h[(3de' - e^2)\lambda_1^2 + (9dd' - ee')\lambda_1\lambda_2 + (3d'e - e'^2)\lambda_2^2] \\ & + g[(9d^2d' + e^3 - 4dee')\lambda_1^2 + (3dd'e + e^2e' - 4de'^2)\lambda_1\lambda_2 + (e^2 - 3de')d'\lambda_2^2], \end{aligned}$$

et nous en concluons que le jacobien r de f, g, h est un invariant du faisceau : nous connaissons d'ailleurs sa signification, et nous savons que, s'il est nul identiquement, c'est que les séries du faisceau sont bitangentes.

257. Les considérations suivantes vont nous permettre d'expli-

quer immédiatement la signification géométrique des invariants que nous ne connaissions pas déjà parmi ceux que nous venons d'obtenir.

Si l'on envisage la série du faisceau $F = \lambda_1 f + \lambda_2 g$, les quatre éléments A_1, A_2, A_3, A_4, communs à f et g, ont sur la série considérée un certain rapport anharmonique $(A_1 A_2 A_3 A_4)$; si $A_1 T$ est l'élément tangent en A_1 à F, ce rapport est égal à celui des quatre éléments de seconde espèce alignés $A_1 T$, $A_1 A_2$, $A_1 A_3$, $A_1 A_4$. Si maintenant on considère quatre séries quelconques du faisceau, elles ont un certain rapport anharmonique qui est celui des variables (λ) qui leur correspondent; c'est aussi le rapport anharmonique de leurs éléments tangents en A_1 par exemple, puisque l'équation de l'élément tangent à F en A_1 est linéaire par rapport aux (λ). On peut d'ailleurs considérer $A_1 A_2$, $A_1 A_3$, $A_1 A_4$ comme les éléments tangents en A_1 aux séries décomposables du faisceau. Donc, finalement, le rapport anharmonique $(A_1 A_2 A_3 A_4)$ sur F est égal au rapport anharmonique formé par les (λ) avec les trois racines de D. En l'appelant $\frac{\rho_1}{\rho_2}$, on a, pour le déterminer, d'après le n° 88, les équations

$$\frac{(\rho_1 + \rho_2)^2(\rho_1 - 2\rho_2)^2(\rho_2 - 2\rho_1)^2}{J^2} = \frac{4(\rho_1^2 - \rho_1\rho_2 + \rho_2^2)^3}{-4H^3} = \frac{27\rho_1^2\rho_2^2(\rho_1 - \rho_2)^2}{\Delta D^2}.$$

Nous en concluons immédiatement le sens géométrique des équations $J = 0$, $H = 0$, et celui des invariants obtenus en éliminant les (λ) entre ces équations et $F = 0$; de même aussi celui de l'invariant simultané de Φ et H.

Les deux séries définies par $H = 0$, et pour lesquelles le rapport $(A_1 A_2 A_3 A_4)$ est équianharmonique, seront les séries f et g elles-mêmes, si l'on a $e = e' = 0$, H n'étant pas supposé nul identiquement. Dans ce cas, facile à étudier d'une façon plus précise, les formes h et χ sont tangentielles l'une de l'autre, et les trois séries f, g, h sont telles que chacune a pour série polaire par rapport à une autre la troisième.

Remarquons encore que si deux séries sont harmoniques, on peut dire, d'après le n° 245, qu'elles sont conjuguées harmoniques par rapport à deux des séries décomposables de leur faisceau; si donc ces deux séries décomposables sont f et g, $\lambda_1 f + \lambda_2 g = 0$ et $\lambda_1 f - \lambda_2 g = 0$ seront deux séries harmoniques.

VI. — Autres invariants du système de deux formes quadratiques.

258. Nous allons dire quelques mots des invariants qu'il faut adjoindre à ceux rencontrés précédemment pour former un système complet relatif à l'ensemble des deux formes f, g, et des variables (x) et (ξ).

1° Le jacobien de f, g et $(\xi \mid x)$ est, en se servant des formes canoniques générales (simplification qui sera conservée dans tout ce paragraphe),

$$k = (a_{22}b_{33} - a_{33}b_{22})x_2x_3\xi_1 + \ldots;$$

$k = 0$ est le lieu des éléments (x) dont les polaires par rapport à f et g sont alignées avec (ξ), ou bien encore l'équation de l'élément commun aux polaires de (x) par rapport à f et g; c'est d'ailleurs un invariant du faisceau (f, g). Remarquons que les polaires d'un même élément (x) par rapport à toutes les séries du faisceau ont en commun l'élément d'équation $k = 0$, et forment un espace à une dimension dont les coordonnées sont les quantités (λ) qui définissent les séries $\lambda_1 f + \lambda_2 g = 0$: on peut en conclure immédiatement de nombreuses propositions qu'il est inutile d'énoncer en détail.

Si (ξ) est donné, $k = 0$ définit une série quadratique circonscrite à $O_1O_2O_3$.

2° Le jacobien de φ, ψ et $(x \mid \xi)$, soit

$$\varkappa = a_{11}b_{11}(a_{22}b_{33} - a_{33}b_{22})x_1\xi_2\xi_3 + \ldots,$$

appelle les mêmes observations.

3° et 4° Formons le premier membre de l'équation de la polaire par rapport à g du pôle de (ξ) par rapport à f; c'est

$$l = \lambda' = a_{22}a_{33}b_{11}x_1\xi_1 + \ldots;$$

c'est aussi le premier membre de l'équation du pôle par rapport à f de la polaire de (x) par rapport à g.

En intervertissant les rôles de f et g, on a de même l'invariant

$$l' = \lambda = a_{11}b_{22}b_{33}x_1\xi_1 + \ldots.$$

Les formes bilinéaires l et l' définissent deux homographies faciles à étudier directement.

5° et 6° Les jacobiens de f, l et $(\xi \mid x)$ d'une part, g, l' et $(\xi \mid x)$ d'autre part, sont

$$m = a_{11}^2 (a_{22} b_{33} - a_{33} b_{22}) x_1 \xi_2 \xi_3 + \ldots,$$
$$m' = b_{11}^2 (a_{22} b_{33} - a_{33} b_{22}) x_1 \xi_2 \xi_3 + \ldots;$$

la signification des équations $m = 0$ et $m' = 0$ est immédiate.

7° et 8° Les jacobiens de φ, λ et $(x \mid \xi)$, d'une part, ψ, λ', et $(x \mid \xi)$, d'autre part, sont de même

$$\mu = a_{22} a_{33} b_{11} (a_{22} b_{33} - a_{33} b_{22}) x_2 x_3 \xi_1 + \ldots,$$
$$\mu' = a_{11} b_{22} b_{33} (a_{22} b_{33} - a_{33} b_{22}) x_2 x_3 \xi_1 + \ldots.$$

Nous n'insisterons pas davantage sur ces formations.

VII. — Les invariants de fermeture.

259. Considérons un élément (x) de f; l'élément (ξ) tangent à f en (x) détermine sur g deux éléments, (y) et $(y^{(1)})$; par $y^{(1)}$ on peut mener un nouvel élément tangent $(\xi^{(1)})$ touchant f en $(x^{(1)})$ et ayant $(y^{(2)})$ en commun avec g; on peut opérer de même avec $(y^{(2)})$, et ainsi de suite.

Ceci posé, on cherche le lieu de l'élément commun à (ξ) et (ξ^{n}), c'est-à-dire, encore, qu'une suite de $n+1$ éléments (ξ), (ξ^{1}), (ξ^{2}), ..., (ξ^{n}) étant circonscrite à f, et les éléments $(y^{(1)})$ ou $(\xi\xi^{1})$, $(y^{(2)})$ ou $(\xi^{1}\xi^{2})$, ..., $(y^{(n)})$ ou $(\xi^{n-1}\xi^{n})$ appartenant à g, on cherche le lieu du dernier élément de la suite équivalente, $(\xi\xi^{n})$.

Définissons la série f comme série rationnelle, et employons toutes les notations du § III du Chapitre précédent. On voit que tout revient à chercher la relation entre les éléments de contact (x) et $(x^{(n)})$. Cette question a été résolue au n° 110, puisque la série g peut être considérée comme définie par une relation doublement quadratique par rapport à des variables binaires, et symétrique :

$$g = \alpha_0 \lambda_1^2 \mu_1^2 + 2\alpha_1 \lambda_1 \mu_1 (\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1) + \alpha_2 (\lambda_1^2 \mu_2^2 + \lambda_2^2 \mu_1^2)$$
$$+ 4\alpha_3 \lambda_1 \lambda_2 \mu_1 \mu_2 + 2\alpha_4 \lambda_2 \mu_2 (\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1) + \alpha_5 \lambda_2^2 \mu_2^2.$$

Les invariants de g sont

$$j_1 = 2(\alpha_2 - \alpha_3), \qquad i_2 = \alpha_0\alpha_5 + \alpha_2^2 + 2\alpha_3^2 - 4\alpha_1\alpha_4,$$

$$i_3 = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_2 & \alpha_4 & \alpha_5 \end{vmatrix},$$

en employant les notations du n° 110.

Par suite, la relation entre (x) et $(x^{(n)})$, dont nous appellerons les coordonnées binaires (λ) et (μ), est

$$g_n = g + \omega_n g' - \omega_n^2 \left(\frac{i_3}{4} + \frac{i_2 j_1}{8} - \frac{j_1^3}{16}\right)(\lambda\mu)^2 = 0,$$

g' étant une forme semblable à g qu'il est inutile d'écrire et qui sera déterminée plus loin; d'ailleurs

$$\omega_n^2 \omega_{n+1} \omega_{n-1} = 16 \frac{\omega_n \left(i_3 + \frac{i_2 j_1}{2} - \frac{j_1^3}{4}\right) + i_2 - \frac{1}{2} j_1^2}{\left(i_3 + \frac{i_2 j_1}{2} - \frac{j_1^2}{4}\right)^2},$$

$$\omega_2 = \frac{-\left(i_2 - \frac{j_1^2}{2}\right)}{i_3 + \frac{i_2 j_1}{2} - \frac{j_1^3}{4}}, \qquad \omega_3 = -\frac{16\, i_3}{\left(i_2 - \frac{j_1^2}{2}\right)^2}.$$

On voit donc que le lieu cherché de $(\xi\xi^{(n)})$ est une série quadratique g_n, et le discriminant de g_n par rapport aux (μ) étant le même que celui de g, la série tangentielle de g_n appartient au faisceau (φ, ψ).

Les remarques du n° 111 montrent suffisamment comment on trouvera les éléments communs aux séries g et g_n, en partant, suivant la parité de n, soit des éléments communs à f et g, soit des éléments de contact des éléments tangents communs à f et g.

On voit aussi que, si ω_n n'est pas nul, il n'existe pas de suite proprement dite $(\xi\xi^{(1)} \ldots \xi^{(n)})$ circonscrite à f et telle que la suite équivalente soit inscrite à g : d'après ce qui précède, on détermine immédiatement les suites dégénérées qui répondent à cette question.

Mais si $\omega_n = 0$, la série g_n coïncide avec g, et il y a une infinité de suites répondant aux conditions que nous venons d'indiquer.

Les invariants ω_n, ou plutôt leurs numérateurs quand on les a mis sous forme de fractions rationnelles, sont les *invariants de fermeture* pour le système f, g.

260. Nous allons exprimer les invariants de fermeture en fonction des invariants d, d', e, e' des séries f, g.

Soit

$$f = (x_1^2 - 4x_2x_3)\sigma,$$

σ étant quelconque, et prenons g sous la forme canonique en supposant α_1 et α_4 nuls ; ceci revient à supposer que O_1 a même polaire par rapport à f et g : alors l'équation ordinaire de g est

$$\alpha_2 x_1^2 + \alpha_0 x_2^2 + \alpha_5 x_3^2 + 2(2\alpha_3 - \alpha_2)x_2x_3 = 0,$$

en employant la représentation canonique du n° 225. On trouve

$$d = -4\sigma^3, \qquad e = -4j_1\sigma^2, \qquad e' = \left(i_2 - \frac{2}{3}j_1^2\right)\sigma, \qquad d' = i_3 + \frac{i_2j_1}{2} - \frac{j_1^3}{4},$$

et, par suite,

$$\omega_2\sigma = \frac{e^2 - 4de'}{4dd'},$$

$$\omega_3\sigma = \frac{8d(8d^2d' - 4dee' + e^3)}{(e^2 - 4de')^2},$$

$$\omega_n^2\omega_{n-1}\omega_{n+1}\sigma^4 = \frac{e^2 - 4de' - 4dd'\omega_n\sigma}{d'^2}.$$

Au surplus, on a ici

$$g' = \alpha_0\alpha_2\lambda_1^2\mu_1^2 + \alpha_2(\alpha_2 - 2\alpha_3)(\lambda_1^2\mu_2^2 + \lambda_2^2\mu_1^2) + [\alpha_0\alpha_5 - (\alpha_2 - 2\alpha_3)^2]\lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2 + \alpha_2\alpha_5\lambda_2^2\mu_2^2,$$

et l'on reconnaît sans peine que $\frac{g'}{\sigma}$ n'est autre que $\frac{h}{d}$, h étant l'invariant simultané de f et g ; donc finalement, en remplaçant $\omega_n\sigma$ par λ_n, on a

$$g_n = g + \frac{\lambda_n}{d}h + \frac{d'\lambda_n^2}{d}f,$$

et l'équation tangentielle de cette série est

$$\lambda_n d'\varphi + d\psi = 0 ;$$

on vérifie encore ainsi que la série tangentielle de g_n appartient au faisceau (φ, ψ).

Il sera facile de transporter à la question que nous venons de résoudre toutes les remarques faites au Livre précédent au sujet de la forme doublement quadratique. On observera, à cet effet, que l'équation $d_1 = 0$ du n° 106 définit ici les éléments de contact avec f des éléments tangents communs à f et à g; que l'équation $f_1 = 0$ du n° 108 définit les éléments communs à f et g; .... C'est ainsi, par exemple, que si λ_3 est nul, les éléments de contact avec g des éléments tangents communs à f et g déterminent, pris deux à deux convenablement, deux éléments de seconde espèce tangents à f; ....

L'interversion des coordonnées des deux espèces permettra encore d'énoncer immédiatement de nouvelles propositions sur lesquelles il est inutile d'insister.

261. On aurait pu arriver aux mêmes résultats en appliquant ce qui a été dit au n° 231. On choisit g sous la forme canonique employée tout à l'heure, et l'on obtient tout de suite, en prenant d'abord pour la série h du n° 231 la série g elle-même,

$$g_2 = (\alpha_0 \alpha_3 - \alpha_2^2)^2 (\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1)^2 + 16 \alpha_3^2 (\alpha_0 \lambda_1 \mu_1 - \alpha_2 \lambda_2 \mu_2)(\alpha_2 \lambda_1 \mu_1 - \alpha_3 \lambda_2 \mu_2);$$

on remarquera ensuite qu'en prenant pour h la série g_n, on trouvera, pour les séries désignées par F_1 et F_2 au n° 231, précisément les séries g_{n-1} et g_{n+1}. On peut donc obtenir ainsi g_{n+1} de proche en proche.

On fera le calcul rapidement de la façon suivante. Soit

$$f = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2,$$
$$g = b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{33} x_3^2;$$

prenons la série tangentielle de g_n sous la forme

$$\lambda_n d'\varphi + d\psi = 0;$$

si alors on écrit que g_{n+1} contient un élément (x) commun aux deux éléments tangents à f menés par les éléments de contact sur g et sur g_n d'un élément tangent commun à ces deux séries, on obtient la relation

$$d'^2 \lambda_n^2 \lambda_{n+1}^2 - 2cd' \lambda_n \lambda_{n+1} - 4dd'(\lambda_n + \lambda_{n+1}) + e^2 - 4de' = 0.$$

On en déduit immédiatement la loi de récurrence déjà obtenue, puisque cette relation subsiste quand on change λ_{n+1} en λ_{n-1}.

Si, plus généralement, λ_n est quelconque, l'équation précédente en λ_{n+1} sert à définir les deux séries F_1 et F_2 du n° 231.

262. Nous venons de voir encore une fois comment l'étude du système de deux séries quadratiques ternaires se rattache à celle de la forme doublement quadratique à variables binaires, symétrique. On peut aussi la rattacher à l'étude de la même forme, mais générale, et non plus symétrique.

Supposons la série f représentée comme série rationnelle par les formules canoniques du n° 225, son équation étant par suite comme précédemment

$$f = (x_1^2 - 4x_2x_3)\,\sigma.$$

L'élément tangent en (λ) à f est

$$-\lambda_1\lambda_2 x_1 + \lambda_2^2 x_2 + \lambda_1^2 x_3 = 0.$$

Si alors une série rationnelle g de degré p est définie par les formules

$$\rho x_i = g_i(\mu_1, \mu_2),$$

on peut encore définir cette série par l'équation

$$g = -\lambda_1\lambda_2 g_1(\mu_1, \mu_2) + \lambda_2^2 g_2(\mu_1, \mu_2) + \lambda_1^2 g_3(\mu_1, \mu_2) = 0,$$

dont le premier membre est une forme générale des degrés 2 et p par rapport aux variables (λ) et (μ). Réciproquement, une telle forme peut être interprétée de cette façon : égalée à zéro, elle établit la correspondance qui existe entre les éléments (λ) et (μ) des séries f et g lorsque l'élément $(\lambda\mu)$ est tangent à f en (λ). On voit d'ailleurs aisément comment cette représentation nouvelle peut être généralisée; mais nous pouvons nous borner à ce que nous venons de dire.

Si la série g est linéaire, on obtient une forme linéo-quadratique, et, par suite, les couples d'éléments (λ) qui correspondent aux (μ) déterminent sur f une involution.

Si la série g est quadratique, on est amené à l'étude de la forme doublement quadratique générale, et il est facile de transporter au cas qui nous occupe les résultats obtenus aux n°s 106 et suivants.

Le discriminant de g par rapport aux (μ) définit les éléments de contact avec f des éléments tangents communs à f et g; le

discriminant de g par rapport aux (λ) définit les éléments communs à f et g sur g; en se servant de ce que les rapports anharmoniques des racines de ces deux discriminants sont égaux, on retrouve une propriété connue du système f, g.

Si l'on suppose la forme g réduite à la forme canonique

$$g = \lambda_1^2(\alpha_0\mu_1^2 + \gamma_0\mu_2^2) + 4\beta_1\lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2 + \lambda_2^2(\alpha_2\mu_1^2 + \gamma_2\mu_2^2),$$

on a, pour définir la série g,

$$\begin{aligned} \rho x_1 &= -4\beta_1\mu_1\mu_2, \\ \rho x_2 &= \alpha_2\mu_1^2 + \gamma_2\mu_2^2, \\ \rho x_3 &= \alpha_0\mu_1^2 + \gamma_0\mu_2^2, \end{aligned}$$

et l'équation ordinaire de g est par suite

$$(\alpha_0\gamma_2 - \alpha_2\gamma_0)^2 x_1^2 + 16\beta_1^2(\alpha_0 x_2 - \alpha_2 x_3)(\gamma_0 x_2 - \gamma_2 x_3) = 0;$$

O_1 et Ω_1 sont pôle et polaire par rapport à f et g.

Les invariants de f et g sont, en fonction des invariants de la forme g, désignés comme au n° 106,

$$d = -4\sigma^3, \qquad e = -4\sigma^2 i_4, \qquad e' = -32\sigma i_2 i_3^2, \qquad d' = -64 i_3^4.$$

Nous ne nous arrêterons pas davantage sur les résultats que l'on peut obtenir en poursuivant cette étude en détail.

VIII. — Le système de deux formes quadratiques d'espèce différente.

263. Supposons données deux formes quadratiques d'espèce différente, soit

$$f_1 = a_{x^2}, \qquad \psi_1 = \beta_{\xi^2}.$$

Ce cas se ramène immédiatement à celui que nous avons étudié dans les paragraphes précédents. Il est cependant utile de définir directement les invariants du système ainsi formé.

Les discriminants de f_1 et ψ_1 seront δ et δ'; leurs formes équivalentes seront

$$\varphi_1 = \alpha_{\xi^2}, \qquad g_1 = b_{x^2},$$

et l'on aura

$$\alpha_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}^2, \qquad \ldots, \qquad b_{11} = \beta_{22}\beta_{33} - \beta_{23}^2, \qquad \ldots.$$

On a encore les invariants évidents

$$\varepsilon = \alpha_{11} b_{11} + \ldots + 2\alpha_{23} b_{23} + \ldots,$$
$$\varepsilon' = a_{11} \beta_{11} + \ldots + 2 a_{23} \beta_{23} + \ldots;$$

$$\chi_1 = a_{11} \frac{\partial(\delta'\psi_1)}{\partial b_{11}} + \ldots = b_{11} \frac{\partial\varphi_1}{\partial a_{11}} + \ldots,$$
$$h_1 = \alpha_{11} \frac{\partial g_1}{\partial \beta_{11}} + \ldots = \beta_{11} \frac{\partial(\delta f_1)}{\partial \alpha_{11}} + \ldots.$$

La forme $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 g_1$ du faisceau (f_1, g_1) a pour discriminant

$$\delta\lambda_1^3 + \varepsilon\lambda_1^2\lambda_2 + \varepsilon'\delta'\lambda_1\lambda_2^2 + \delta'^2\lambda_2^3,$$

et pour forme équivalente

$$\lambda_1^2\varphi_1 + \lambda_1\lambda_2\chi_1 + \delta'\lambda_2^2\psi_1;$$

de même la forme $\mu_1\varphi_1 + \mu_2\psi_1$ du faisceau (φ_1, ψ_1) a pour discriminant

$$\delta^2\mu_1^3 + \varepsilon'\delta\mu_1^2\mu_2 + \varepsilon\mu_1\mu_2^2 + \delta'\mu_2^3,$$

et pour forme équivalente

$$\delta\mu_1^2 f_1 + \mu_1\mu_2 h_1 + \mu_2^2 g_1.$$

264. Dans le cas général où δ et δ' sont différents de zéro, la signification géométrique des invariants que nous venons de définir est évidente. Mais supposons par exemple que δ' soit nul, et que $\psi_1 = 0$ représente deux éléments de première espèce A et B. Alors $g_1 = 0$ représente (AB) deux fois; $\varepsilon = 0$ est la condition pour que f touche (AB); $\varepsilon' = 0$ est la condition pour que A et B soient conjugués par rapport à f; les séries du faisceau (f_1, g_1) sont bitangentes suivant les éléments communs à f_1 et à (AB); les séries du faisceau (φ_1, ψ_1) contiennent les éléments tangents à f_1 menés par A et B; $\chi_1 = 0$ représente les éléments communs à f_1 et à (AB); $h_1 = 0$ représente la série des (x) tels que les éléments tangents à f_1 menés par (x) soient conjugués harmoniques par rapport à $(x\text{A})$ et $(x\text{B})$.

Si $\psi_1 = 0$ représente deux fois un même élément A, g_1 est nul identiquement; δ' et ε sont nuls; $\varepsilon' = 0$ est la condition pour que A appartienne à f; les séries du faisceau (φ_1, ψ_1) sont bitangentes suivant les éléments communs à φ_1 et à A; χ_1 est nul identique-

ment; $h_1 = 0$ représente les éléments tangents à f_1 menés par A. On examinerait de même les autres cas particuliers.

265. Revenant au cas général, nous remarquerons l'invariant ε' qui est linéaire par rapport aux coefficients de f_1 et ψ_1; s'il est nul, il existe une infinité de suites triples inscrites à f_1 et conjuguées à ψ_1, et de même une infinité de suites triples inscrites à ψ_1 et conjuguées à f_1. Nous dirons alors que les séries d'espèce opposée f_1 et ψ_1 sont *conjuguées*.

On voit que si des séries f_1 forment un système linéaire à p dimensions, c'est-à-dire si leur équation générale contient linéairement $p+1$ paramètres homogènes, les séries ψ_1 qui sont conjuguées avec toutes les séries f_1, forment elles-mêmes un système linéaire à $4-p$ dimensions. Ainsi les séries ψ_1, qui sont conjuguées avec les séries d'un faisceau ou d'un réseau de première espèce, forment elles-mêmes un système linéaire à trois dimensions ou un réseau de seconde espèce. Les systèmes linéaires qui se correspondent ainsi sont eux-mêmes dits *conjugués*.



CHAPITRE IX.

LA CORRESPONDANCE RÉCIPROQUE ENTRE DEUX ESPACES COINCIDENTS.

266. Considérons la forme bilinéaire

$$f(x, y) = \Sigma a_{ij} x_i y_j, \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, 3 \\ j = 1, 2, 3 \end{pmatrix}$$

et supposons que les (x) et les (y) soient les éléments de première espèce de deux espaces X et Y identiques. Cette forme égalée à zéro définit, comme au Chapitre VI, l'homographie la plus générale entre les espaces X et Y, avec cette différence que les éléments correspondants sont d'espèce différente : on caractérise ce fait en disant que cette homographie est une correspondance réciproque, ou *réciprocité*, entre les espaces coïncidents X et Y.

Les propriétés générales de l'homographie subsistent entièrement; les particularités qui résultent de la coïncidence des espaces X et Y changent seules.

$f(x, y) = 0$ est l'équation de l'élément (η) de Y qui correspond à (x) de X, et l'on a

$$\frac{\eta_1}{a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + a_{31} x_3} = \frac{\eta_2}{a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + a_{32} x_3} = \frac{\eta_3}{a_{13} x_1 + a_{23} x_2 + a_{33} x_3};$$

si le déterminant

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

n'est pas nul, la réciprocité est proprement dite.

$f(x, y) = 0$ est aussi l'équation de l'élément (ξ) de X qui cor-

respond à (y) de Y, et l'on a

$$\frac{\xi_1}{a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3} = \frac{\xi_2}{a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3} = \frac{\xi_3}{a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3}.$$

Si les α_{ij} sont les coefficients des a_{ij} dans le déterminant d, et si l'on fait

$$\psi(\xi, \eta) = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \xi_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \xi_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & 0 \end{vmatrix} = \Sigma\alpha_{ij}\xi_i\eta_j,$$

$\psi = 0$ est l'équation de (y) correspondant à (ξ), ou de (x) correspondant à (η), de sorte que

$$\frac{y_1}{\alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{21}\xi_2 + \alpha_{31}\xi_3} = \frac{y_2}{\alpha_{12}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \alpha_{32}\xi_3} = \frac{y_3}{\alpha_{13}\xi_1 + \alpha_{23}\xi_2 + \alpha_{33}\xi_3},$$

$$\frac{x_1}{\alpha_{11}\eta_1 + \alpha_{12}\eta_2 + \alpha_{13}\eta_3} = \frac{x_2}{\alpha_{21}\eta_1 + \alpha_{22}\eta_2 + \alpha_{23}\eta_3} = \frac{x_3}{\alpha_{31}\eta_1 + \alpha_{32}\eta_2 + \alpha_{33}\eta_3}.$$

On a aussi

$$df(x, y) = -\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & x_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & x_2 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Nous laisserons de côté les réciprocités singulières pour lesquelles $d = 0$; leurs particularités résultent immédiatement du n° 205.

267. Nous allons étudier le système formé par la forme f et les variables (x) et (ξ) : si on lui adjoignait les variables (y) et (η), il serait facile d'obtenir les nouveaux invariants correspondants.

On a d'abord les deux invariants fondamentaux $f(x, x)$, $\psi(\xi, \xi)$, que nous désignerons par f_1 et ψ_1; leurs formes tangentielles φ_1 et g_1 forment avec f_1 et ψ_1, la forme $(\xi \mid x)$, et les invariants proprement dits d et i, un système d'invariants indépendants, i étant défini par l'égalité

$$i = a_{11}\alpha_{11} + \ldots + a_{12}\alpha_{21} + \ldots.$$

La série quadratique $f_1 = 0$ est le lieu des éléments (x) appartenant à X ou Y qui contiennent leurs correspondants; de même la série quadratique $\psi_1 = 0$ est le lieu des éléments (ξ) de X ou Y qui contiennent leurs correspondants.

Cherchons maintenant les éléments (x) qui ont même correspondant, quand on les considère comme appartenant soit à X soit à Y; on doit avoir

$$\frac{a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3}{a_{11}x_1+a_{21}x_2+a_{31}x_3}=\frac{a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3}{a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{32}x_3}=\frac{a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3}{a_{13}x_1+a_{23}x_2+a_{33}x_3},$$

et si ρ est la valeur commune de ces rapports, on a pour déterminer ρ l'équation

$$\varphi(\rho)=\begin{vmatrix} a_{11}(1-\rho) & a_{12}-a_{21}\rho & a_{13}-a_{31}\rho \\ a_{21}-a_{12}\rho & a_{22}(1-\rho) & a_{23}-a_{32}\rho \\ a_{31}-a_{13}\rho & a_{32}-a_{23}\rho & a_{33}(1-\rho) \end{vmatrix}=(1-\rho)[d\rho^2+(d-i)\rho+d]=0.$$

De même, pour déterminer les éléments (ξ) qui ont même correspondant quand on les considère comme appartenant soit à X, soit à Y, on a

$$\frac{\alpha_{11}\xi_1+\alpha_{12}\xi_2+\alpha_{13}\xi_3}{\alpha_{11}\xi_1+\alpha_{21}\xi_2+\alpha_{31}\xi_3}=\frac{\alpha_{21}\xi_1+\alpha_{22}\xi_2+\alpha_{23}\xi_3}{\alpha_{12}\xi_1+\alpha_{22}\xi_2+\alpha_{32}\xi_3}=\frac{\alpha_{31}\xi_1+\alpha_{32}\xi_2+\alpha_{33}\xi_3}{\alpha_{13}\xi_1+\alpha_{23}\xi_2+\alpha_{33}\xi_3},$$

et la valeur commune de ces rapports est encore une racine de l'équation $\varphi(\rho)=0$.

268. Plaçons-nous d'abord dans le cas général où l'équation $\varphi(\rho)=0$ a trois racines distinctes 1, ρ_2 et ρ_3.

On peut choisir les coordonnées de façon que O_1 corresponde à 1, O_2 à ρ_2, O_3 à ρ_3; alors aussi Ω_1 correspond à ρ_1, Ω_3 à ρ_2, Ω_2 à ρ_3, et l'on a

$$a_{12}=a_{21}=a_{13}=a_{31}=a_{22}=a_{33}=0, \qquad a_{23}^2\neq a_{32}^2,$$

$$a_{11}\neq 0, \qquad a_{23}a_{32}\neq 0;$$

il en résulte

$$f=a_{11}x_1y_1+a_{23}x_2y_3+a_{32}x_3y_2,$$
$$\psi=-a_{23}a_{32}\xi_1\eta_1-a_{11}a_{32}\xi_2\eta_3-a_{11}a_{23}\xi_3\eta_2.$$

Les couples O_1 et Ω_1, O_2 et Ω_3, O_3 et Ω_2 sont correspondants.

On a

$$d=-a_{11}a_{23}a_{32}, \qquad i=-a_{11}(a_{23}^2+a_{23}a_{32}+a_{32}^2),$$
$$f_1=a_{11}x_1^2+(a_{23}+a_{32})x_2x_3, \qquad \psi_1=-a_{23}a_{32}\xi_1^2-a_{11}(a_{23}+a_{32})\xi_2\xi_3,$$

$$\varphi_1=-\frac{1}{4}(a_{23}+a_{32})^2\xi_1^2-a_{11}(a_{23}+a_{32})\xi_2\xi_3,$$

$$g_1=-\frac{1}{4}a_{11}^2(a_{23}+a_{32})^2\xi_1^2-a_{11}a_{23}a_{32}(a_{23}+a_{32})\xi_2\xi_3.$$

Les deux séries f_1 et g_1 sont bitangentes en O_2 et O_3, avec Ω_3 et Ω_2 comme éléments tangents.

Pour le système (f_1, ψ_1), les invariants sont, avec les notations du n° 263,

$$\delta = \frac{1}{4}(d+i), \qquad \delta' = \frac{d}{4}(d+i),$$

$$\varepsilon = \frac{1}{16}(i+d)(i+9d), \qquad \varepsilon' = \frac{1}{2}(i+3d),$$

$$\chi_1 = d\varphi_1 + \frac{1}{4}(i+d)\psi_1, \qquad h = g_1 + \frac{1}{4}(i+d)f_1.$$

$\varphi_1 - \psi_1 = 0$ représente deux fois O_1; $d\varphi_1 - \frac{1}{4}(i+d)\psi_1 = 0$ représente O_2 et O_3; $g_1 - df_1 = 0$ représente Ω_1 deux fois; $g_1 - \frac{1}{4}(i+d)f_1 = 0$ représente Ω_2 et Ω_3. On déduirait facilement de ces remarques la façon de ramener f à la forme canonique que nous venons d'employer.

269. Si (x) est un élément quelconque de X, et (η) l'élément correspondant de (Y), le rapport anharmonique formé par les éléments O_2, O_3 d'une part, $(O_1 x)$ et (η) d'autre part (157), est égal à $-\frac{a_{23}}{a_{32}}$; il est donc constant et égal à la racine ρ_3 changée de signe de l'équation $\varphi(\rho) = 0$. Si l'on considérait (x) comme appartenant à Y, on trouverait de même $-\rho_2$ pour le rapport anharmonique correspondant; d'ailleurs $\rho_2 \rho_3 = 1$, et l'on a

$$\left.\begin{matrix}\rho_2 \\ \rho_3\end{matrix}\right\} = \frac{i - d \pm \sqrt{(i+d)(i-3d)}}{2d}.$$

On a ainsi la signification géométrique de l'invariant absolu de la forme f, $\frac{i}{d}$.

Si $i = 0$, les rapports anharmoniques précédents sont équianharmoniques.

Si l'on prend l'élément (x) sur f_1 et qu'on le considère comme appartenant successivement à X et Y, ses deux correspondants sont les éléments tangents à g_1 menés par (x); on pourra les distinguer par la propriété précédente : on retrouve cette proposition connue que, si deux séries quadratiques sont bitangentes, les élé-

ments tangents menés à l'une par les éléments de l'autre se séparent algébriquement.

La même chose peut se répéter pour un élément (ξ) de seconde espèce, avec les modifications convenables évidentes.

Si maintenant (x) est quelconque, on pourra trouver son correspondant en se servant des deux éléments tangents menés à g_1 par (x); l'élément cherché est l'élément commun aux correspondants de ces deux éléments tangents.

On peut encore remarquer la proposition suivante : soient (y) et (z) deux éléments quelconques considérés comme appartenant successivement à X et à Y, de sorte que chacun d'eux a deux correspondants (η) et (η'), (ζ) et (ζ'); si (y) et (z) appartiennent à une même série du faisceau (f_1, g_1), et seulement dans ce cas, les éléments O_1, $(\eta\zeta')$ et $(\eta'\zeta)$ sont alignés. Une proposition analogue a lieu pour les éléments de seconde espèce.

270. Si l'on se donne une série de degré p dans l'espace X, il lui correspond dans Y une série de même degré, mais d'espèce différente. Nous allons chercher, en supposant $p = 2$, si ces deux séries peuvent être équivalentes. En se servant des formules canoniques, si la série donnée est

$$b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 + 2b_{23}x_2x_3 + 2b_{13}x_3x_1 + 2b_{12}x_1x_2 = 0,$$

la série correspondante sera

$$\begin{aligned} &b_{11}\alpha_{11}^2\eta_1^2 + b_{33}\alpha_{32}^2\eta_2^2 + b_{22}\alpha_{23}^2\eta_3^2 \\ &\quad + 2b_{23}\alpha_{23}\alpha_{32}\eta_2\eta_3 + 2b_{12}\alpha_{11}\alpha_{23}\eta_3\eta_1 + 2b_{13}\alpha_{11}\alpha_{32}\eta_1\eta_2 = 0; \end{aligned}$$

en remarquant d'abord que la série donnée doit avoir même correspondante dans X et dans Y, on voit qu'elle doit être de la forme

$$b_{11}x_1^2 + 2b_{23}x_2x_3 = 0;$$

il est alors facile d'achever, et l'on trouve que les deux séries

$$a_{11}x_1^2 \pm 2\sqrt{a_{23}a_{32}}\,x_2x_3 = 0$$

répondent seules à la question.

271. Soit (x) un élément de X, (η) son correspondant dans (Y); considérons (η) comme appartenant à X, et soit (y) son correspondant dans Y; entre les (x) et les (y) existe une correspon-

dance homographique ordinaire, définie par l'équation

$$(a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3)(\alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \alpha_{13}\xi_3) + \ldots = 0,$$

en général. Avec les formules canoniques, on a simplement

$$d(x_1\xi_1 + \rho_3 x_2\xi_2 + \rho_2 x_3\xi_3) = 0.$$

On voit que cette homographie admet les éléments de référence comme éléments doubles; elle est d'ailleurs particulière, puisque l'on a $\rho_2\rho_3 = 1$. En appliquant à cette homographie ce qui a été dit au Chapitre VI, on obtiendra d'intéressantes propriétés nouvelles.

272. Examinons maintenant les différents cas particuliers possibles, en excluant toujours le cas de $d = 0$.

1° ρ_1 et ρ_2 sont égaux et différents de 1; alors leur valeur commune est -1 et l'on a $i + d = 0$. En outre, on suppose que cette racine double n'annule pas tous les mineurs du déterminant $\varphi(\rho)$.

En faisant correspondre O_1 à la racine 1, et O_2 à la racine -1, on a

$$f = a_{11}x_1y_1 + a_{33}x_3y_3 + a_{13}(x_1y_3 + x_3y_1) + a_{23}(x_2y_3 - x_3y_2),$$

avec

$$a_{11}a_{33} - a_{13}^2 \neq 0, \qquad a_{11}a_{23} \neq 0;$$

par suite

$$f_1 = a_{11}x_1^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{13}x_1x_3,$$

et l'on peut disposer de Ω_1 de façon que $a_{13} = 0$. Finalement, on a donc les formules simples

$$f = a_{11}x_1y_1 + a_{33}x_3y_3 + a_{23}(x_2y_3 - x_3y_2),$$

avec

$$a_{11}a_{33}a_{23} \neq 0.$$

Ici

$$\psi = a_{23}^2\xi_1\eta_1 + a_{11}a_{33}\xi_2\eta_2 + a_{11}a_{23}(\xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2),$$

$$d = a_{11}a_{23}^2, \qquad i = -a_{11}a_{23}^2,$$

$$f_1 = a_{11}x_1^2 + a_{33}x_3^2, \qquad \psi_1 = a_{23}^2\xi_1^2 + a_{11}a_{33}\xi_2^2,$$

$$\varphi_1 = a_{11}a_{33}\xi_2^2, \qquad g_1 = a_{11}a_{33}a_{23}^2x_3^2;$$

O_1 et Ω_1, O_2 et Ω_3 sont deux couples correspondants.

Les séries f_1 et ψ_1 se décomposent d'une façon facile à interpréter; à l'élément de ψ_1

$$a_{23}\xi_1 + \sqrt{-a_{11}a_{33}}\,\xi_2 = 0,$$

pris dans X ou dans Y, correspondent les deux éléments de f_1

$$a_{11}x_1+\sqrt{-a_{11}a_{33}}x_3=0 \quad \text{ou} \quad a_{11}x_1-\sqrt{a_{11}a_{33}}x_3=0.$$

2° On conserve les hypothèses précédentes, mais l'on suppose que la racine -1 annule tous les mineurs de $\varphi(\rho)$. Raisonnant comme plus haut, on peut écrire

$$f=a_{11}x_1y_1+a_{23}(x_2y_3-x_3y_2),$$

avec

$$a_{11}a_{23}\neq 0.$$

On a

$$\psi=a_{23}^2\xi_1\eta_1-a_{11}a_{23}(\xi_2\eta_3-\xi_3\eta_2),$$

$$d=a_{11}a_{23}^2, \qquad i=-a_{11}a_{23}^2,$$
$$f_1=a_{11}x_1^2, \qquad \psi_1=a_{23}^2\xi_1^2.$$

O_1 et Ω_1 correspondent à la racine 1 : à la racine -1 correspondent tous les éléments de O_1 et Ω_1 : si M est quelconque sur Ω_1, M et O_1M sont des éléments correspondants.

3° L'équation $\varphi(\rho)=0$ admet trois fois la racine 1, et cette racine n'annule pas tous les mineurs de $\varphi(\rho)$.

On a ici $i-3d=0$.

A $\rho=1$, faisons correspondre O_1 ; on trouve qu'il faut

$$a_{11}=0, \qquad a_{12}=a_{21}, \qquad a_{13}=a_{31}, \qquad a_{23}-a_{32}\neq 0;$$

alors l'élément (ξ) qui correspond à O_1 peut être pris pour Ω_3, de sorte que $a_{12}=0$; on a

$$f=a_{22}x_2y_2+a_{33}x_3y_3+a_{13}(x_1y_3+x_3y_1)+a_{23}x_2y_3+a_{32}x_3y_2,$$

avec

$$a_{23}-a_{32}\neq 0, \qquad a_{13}a_{22}\neq 0.$$

On en déduit

$$f_1=a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{13}x_1x_3+(a_{23}+a_{32})x_2x_3;$$

on peut simplifier en faisant $a_{33}=0$, $a_{32}=-a_{23}$, et il vient finalement

$$f=a_{22}x_2y_2+a_{13}(x_1y_3+x_3y_1)+a_{23}(x_2y_3-x_3y_2),$$

avec

$$a_{13}a_{23}a_{22}\neq 0.$$

On a

$$\psi = a_{23}^2\xi_1\eta_1 - a_{13}^2\xi_2\eta_2 + a_{13}a_{23}(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1) - a_{13}a_{22}(\xi_1\eta_3 + \xi_3\eta_1);$$

$$d = -a_{13}^2 a_{22}, \qquad i = -3a_{13}^2 a_{22},$$

$$f_1 = a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3, \qquad \psi_1 = a_{23}^2\xi_1^2 - a_{13}^2\xi_2^2 - 2a_{13}a_{22}\xi_1\xi_3,$$

$$\varphi_1 = -a_{13}^2\xi_2^2 - 2a_{13}a_{22}\xi_1\xi_3, \qquad g_1 = -a_{13}^2a_{22}^2x_2^2 - a_{13}^2a_{23}^2x_3^2 - 2a_{13}^3a_{22}x_1x_3.$$

Les séries f_1 et g_1 sont surosculatrices en O_1, avec Ω_3 comme élément tangent commun. Ce cas est un cas limite du cas général.

4° On conserve les hypothèses précédentes, mais l'on suppose que la racine 1 annule tous les mineurs de $\varphi(\rho)$.

Si O_1 correspond à la racine 1, on a $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$, $a_{23} = a_{32}$; alors on voit que cette racine annule tous les éléments de $\varphi(\rho)$: il y a *involution*, c'est-à-dire que tout élément a même correspondant, qu'on le considère comme appartenant à X ou à Y.

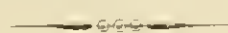
Les séries f_1 et g_1 coïncident : les éléments correspondants sont pôle et polaire par rapport à f_1, et cette série ne se décompose pas. Nous avons eu précédemment des exemples de ce cas. Nous voyons ainsi que l'étude d'une série quadratique peut être regardée comme un cas particulier de celle des réciprocités : inversement, on pourrait transporter à la forme bilinéaire f un grand nombre de formules établies pour les séries quadratiques.

273. Parmi les réciprocités singulières, nous en citerons une qui est involutive, et que nous appellerons *spéciale*. On a alors

$$f = a_{23}(x_2y_3 - x_3y_2) + a_{31}(x_3y_1 - x_1y_3) + a_{12}(x_1y_2 - x_2y_1);$$

à un élément (x) correspond l'élément (Ax), si A est un élément de première espèce de coordonnées a_{23}, a_{31}, a_{12}.

C'est aussi le seul cas où f_1 est nulle identiquement.



CHAPITRE X.

LE SYSTÈME DE DEUX FORMES BILINÉAIRES. LA CORRESPONDANCE QUADRATIQUE BIRATIONNELLE.

I. — La correspondance quadratique birationnelle entre deux espaces distincts.

274. Considérons l'ensemble des deux formes bilinéaires

$$f = \Sigma a_{ij} x_i y_j, \qquad g = \Sigma b_{ij} x_i y_j,$$

et supposons que les espaces X et Y, remplis par les (x) et les (y), ne soient pas identiques; les (x) et les (y) sont supposés de même espèce; l'hypothèse contraire n'amènerait d'ailleurs pas de modifications essentielles.

Nous allons étudier brièvement le système formé par les formes f et g, les variables (x) et (ξ) se rapportant à l'espace X, les variables (y) et (η) se rapportant à l'espace Y : ce sont, par suite, uniquement des invariants multiples que nous allons former.

Cette étude présentera évidemment les plus grandes analogies avec celle du système de deux formes quadratiques, qui peut en être considérée comme un cas particulier : aussi n'en traiterons-nous que les points essentiels. Les résultats obtenus pourront facilement être transportés au cas de deux séries quadratiques et conduire quelquefois à des propriétés nouvelles : inversement, ce qui a été dit sur le cas de deux séries quadratiques pourra, dans certaines circonstances et avec les modifications convenables, s'appliquer au système qui nous occupe.

275. Nous avons d'abord comme invariants les formes f et g, $(x \mid \xi)$ et $(y \mid \eta)$, les déterminants d et d' des coefficients a_{ij} et b_{ij}, les formes

$$\varphi = \Sigma \alpha_{ij} \xi_i \eta_j, \qquad \psi = \Sigma \beta_{ij} \xi_i \eta_j,$$

les α_{ij} étant définis comme au Chapitre précédent, et les β_{ij} jouant le même rôle par rapport aux b_{ij}.

Si l'on a $f = 0$, ou $\varphi = 0$, nous dirons que les éléments (x) et (y), ou (ξ) et (η), sont *conjugués* dans la réciprocité f; (x) et (y) étant conjugués dans f, l'élément correspondant à (x) ou (y) contient (y) ou (x). Si les (x) étaient identiques aux (y), et si la forme f était symétrique par rapport aux (x) et aux (y), on voit que (x) et (y) seraient conjugués par rapport à la série quadratique $f(x, x) = 0$.

Le faisceau de formes $\lambda_1 f + \lambda_2 g$ conduit à de nouveaux invariants e, e', χ, obtenus de la façon suivante : les invariants qui jouent par rapport à $\lambda_1 f + \lambda_2 g$ le même rôle que d et φ par rapport à f sont

$$\Lambda = d\lambda_1^3 + e\lambda_1^2\lambda_2 + e'\lambda_1\lambda_2^2 + d'\lambda_2^3$$

et

$$\lambda_1^2\varphi + \lambda_1\lambda_2\chi + \lambda_2^2\psi'.$$

Λ est le déterminant des quantités $a_{ij}\lambda_1 + b_{ij}\lambda_2$; on a

$$e = \Sigma\alpha_{ij}b_{ij} = \Sigma b_{ij}\frac{\partial d}{\partial a_{ij}} = \frac{1}{2}\left(\Sigma a_{ij}\frac{\partial d'}{\partial b_{ij}}\right)^2,$$

la puissance qui figure au dernier membre étant symbolique. On définit de même e', et enfin l'on a

$$\chi = \Sigma b_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial a_{ij}} = \Sigma a_{ij}\frac{\partial\psi}{\partial b_{ij}}.$$

De même, la forme $\mu_1\varphi + \mu_2\psi$ du faisceau (φ, ψ) a pour invariant analogue à d

$$M = d^2\mu_1^3 + de'\mu_1^2\mu_2 + d'e\mu_1\mu_2^2 + d'^2\mu_2^3,$$

et pour invariant analogue à φ

$$d\mu_1^2 f + \mu_1\mu_2 h + d'\mu_2^2 g,$$

avec

$$h = \Sigma\beta_{ij}\frac{\partial(df)}{\partial\alpha_{ij}} = \Sigma\alpha_{ij}\frac{\partial(d'g)}{\partial\beta_{ij}};$$

h est un nouvel invariant.

Enfin, les jacobiens des formes f, g, h par rapport aux (x) et aux (y), et des formes φ, ψ, χ par rapport aux (ξ) et aux (η) fournissent quatre nouveaux invariants, liés, comme nous allons

bientôt le voir, aux précédents par deux relations. Nous avons donc formé, comme cela devait être, quatorze invariants indépendants.

276. Cherchons un élément (x) tel que les éléments (η) que lui font correspondre les deux réciprocités f et g soient identiques. On aura

$$\frac{a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + a_{3i}x_3}{b_{1i}x_1 + b_{2i}x_2 + b_{3i}x_3} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1},$$

(λ) étant racine de l'équation $\Lambda = 0$.

Les (y) tels que les (ξ) correspondants soient identiques sont de même déterminés par

$$\frac{a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + a_{i3}y_3}{b_{i1}y_1 + b_{i2}y_2 + b_{i3}y_3} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1},$$

les (λ) étant les mêmes que précédemment.

Les éléments (ξ) et (η) ainsi déterminés vérifient eux-mêmes les relations

$$\frac{\alpha_{1i}\xi_1 + \alpha_{2i}\xi_2 + \alpha_{3i}\xi_3}{\beta_{1i}\xi_1 + \beta_{2i}\xi_2 + \beta_{3i}\xi_3} = -\frac{\mu_2}{\mu_1},$$

$$\frac{\alpha_{i1}\eta_1 + \alpha_{i2}\eta_2 + \alpha_{i3}\eta_3}{\beta_{i1}\eta_1 + \beta_{i2}\eta_2 + \beta_{i3}\eta_3} = -\frac{\mu_2}{\mu_1},$$

les (μ) étant racines de l'équation $M = 0$: on passe d'ailleurs de cette équation à l'équation $\Lambda = 0$ par la transformation

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{d'\lambda_2}{d\lambda_1}.$$

Les éléments (x) et (y) que nous venons de déterminer sont précisément les mêmes que les éléments singuliers des réciprocités singulières qui font partie du faisceau (f, g), et qui sont déterminées par l'équation $\Lambda = 0$: nous appelons ici éléments singuliers d'une réciprocité singulière ceux qui ont leur correspondant complètement indéterminé.

La même observation s'applique aux éléments (ξ) et (η) déterminés plus haut, qui sont les éléments singuliers des réciprocités singulières du faisceau (φ, ψ).

Si deux éléments singuliers (x) et (y) correspondent à deux racines distinctes de l'équation $\Lambda = 0$, ils sont conjugués dans toutes les réciprocités du faisceau (f, g).

Remarquons enfin que pour étudier les réciprocités singulières du faisceau (f, g) et leurs éléments singuliers, on peut remplacer f et g par deux séries quelconques distinctes du faisceau.

277. Si le déterminant Δ est nul identiquement, toutes les réciprocités du faisceau (f, g) sont singulières; ceci arrive dans les deux cas suivants : ou bien les deux réciprocités singulières f et g ont dans l'un des espaces X ou Y un élément singulier commun; ou bien, ce cas écarté, f et g sont simplement singulières, et leurs éléments singuliers, A et B pour f dans X et Y, A′ et B′ pour g dans X et Y, sont tels que, dans f, A′ et BB′ et par suite B′ et AA′ soient correspondants, et que, dans g, A et BB′ et par suite B et AA′ soient de même correspondants.

Ce cas étant laissé de côté, nous supposerons d et d' différents de zéro, ce qui est toujours possible d'après une remarque faite plus haut : de cette façon le faisceau (φ, ψ) est lui-même en tout semblable au faisceau (f, g). Si, d'ailleurs, d ou d' devenait nul, les modifications à faire seraient évidentes.

On est amené à distinguer cinq cas, dont deux généraux. Dans le cas le plus général, l'équation $\Delta = 0$ a trois racines simples. Il existe alors dans chacun des espaces X et Y trois éléments singuliers de chaque espèce, formant en tout deux suites triples proprement dites.

En prenant ces suites pour suites de référence, on peut écrire f et g sous la forme simple

$$f = a_{11}x_1y_1 + a_{22}x_2y_2 + a_{33}x_3y_3,$$
$$g = b_{11}x_1y_1 + b_{22}x_2y_2 + b_{33}x_3y_3,$$

et les quantités $a_{ii}b_{jj} - a_{jj}b_{ii}$ sont différentes de zéro.

Il serait facile d'ailleurs de développer les formules qui permettent de ramener f et g à cette forme canonique simultanée. Ici

$$d = a_{11}a_{22}a_{33}, \qquad e = a_{22}a_{33}b_{11} + a_{33}a_{11}b_{22} + a_{11}a_{22}b_{33}, \qquad \ldots,$$

tout comme quand il s'agit de deux séries quadratiques, sauf que x_i^2 et ξ_i^2 sont remplacés par x_iy_i et $\xi_i\eta_i$.

Les jacobiens r et r' de f, g, h par rapport aux (y) et aux (x) déterminent les éléments fondamentaux de seconde espèce; de même les jacobiens ρ et ρ' de φ, ψ, χ déterminent les éléments

fondamentaux. Les produits rr' et $\rho\rho'$ s'expriment au moyen des autres invariants, comme r^2 et ρ^2 au n° 240 en fonction des quantités analogues.

Comme cas limites de ce cas général, nous avons ceux dans lesquels l'équation $\Lambda = 0$ a une racine multiple, double ou triple, n'annulant pas tous les mineurs du déterminant Λ. Les éléments singuliers viennent alors se confondre suivant la même loi que les éléments singuliers d'un faisceau de séries quadratiques dans les cas correspondants.

Le second cas général est celui où l'équation $\Lambda = 0$ admet une racine multiple annulant tous les mineurs du déterminant Λ. Si cette racine est double, les formes canoniques du premier cas subsistent, et cela d'une infinité de façons; mais l'on a, par exemple, $a_{22}b_{33} - a_{33}b_{22} = 0$. Le faisceau (f, g) contient une réciprocité doublement singulière. Dans l'espace X, si les O_i et Ω_i désignent comme d'habitude les éléments fondamentaux, O_1 et tous les éléments de Ω_1 sont singuliers; il en est de même de Ω_1 et de tous les éléments de O_1.

Si la racine multiple de l'équation $\Lambda = 0$ est triple, on a un cas limite du précédent.

On obtiendrait sans peine, comme dans le cas des séries quadratiques, les conditions invariantes qui expriment que l'on est dans l'un des cas que nous venons d'énumérer.

278. Si l'on considère l'élément (x') qui correspond en vertu de g dans X à (η) de Y, correspondant lui-même à (x) de X en vertu de f, entre les (x) et (x') existe une relation homographique; l'équation de (x') est, en se servant des formules canoniques,

$$a_{11}b_{22}b_{33}x_1\xi_1 - \ldots = 0;$$

il est alors facile d'interpréter la signification des conditions $e = 0$ ou $e' = 0$, en se reportant au n° 212. Si, par exemple, $e = 0$, il existe des couples de suites triples proprement dites, l'une dans X, l'autre dans Y, dont les éléments d'espèce opposée se correspondent en vertu de f, et dont les éléments de première espèce correspondants sont conjugués dans g; et ainsi de suite.

279. Envisageons le faisceau $\lambda_1 f + \lambda_2 g$ et un élément (x); les

éléments correspondants dans Y en vertu des différentes réciprocités du faisceau contiennent un élément (y) fixe, défini, en se servant des formules canoniques, par les relations

$$\frac{y_1}{(a_{22}b_{33}-a_{33}b_{22})x_2x_3}=\frac{y_2}{(a_{33}b_{11}-a_{11}b_{33})x_3x_1}=\frac{y_3}{(a_{11}b_{22}-a_{22}b_{11})x_1x_2};$$

inversement, on a

$$\frac{x_1}{(a_{22}b_{33}-a_{33}b_{22})y_2y_3}=\frac{x_2}{(a_{33}b_{11}-a_{11}b_{33})y_3y_1}=\frac{x_3}{(a_{11}b_{22}-a_{22}b_{11})y_1y_2}.$$

Si l'on considère quatre réciprocités du faisceau, elles ont un rapport anharmonique, celui des (λ) correspondants, qui est précisément le même que celui des quatre éléments (η) alignés, contenant (y), qui correspondent à un même élément (x) en vertu des quatre réciprocités. En particulier, si les éléments singuliers dans Y sont les O'_i, et si (η) correspond à (x) en vertu de $\lambda_1 f+\lambda_2 g$, le rapport anharmonique des éléments (η) et (yO'_i) est constant et facile à évaluer en fonction des invariants absolus du système f, g. D'une façon générale on peut étudier en détail le faisceau (f, g) comme nous avons fait pour celui de deux séries quadratiques.

280. Les formules du numéro précédent établissent entre les éléments (x) et (y) des deux espaces X et Y une correspondance spéciale, dont nous avons déjà eu des exemples, dite *quadratique birationnelle*.

A chaque élément de l'un des espaces correspond un seul élément de l'autre, exception faite pour les éléments singuliers qui ont chacun une infinité simple de correspondants.

Dans le cas particulier où l'équation $\Lambda=0$ a une racine double annulant tous les mineurs de Λ, en supposant $a_{22}b_{33}-a_{33}b_{22}=0$, on voit que, si (x) n'est pas singulier, on a toujours $y_1=0$; on est ramené à une homographie singulière. Nous nous bornerons dans ce qui suit à étudier le cas le plus général : les cas particuliers s'en déduisent facilement.

Considérons un élément (ξ) de X : le lieu des éléments (y) que le faisceau (f, g) fait correspondre à tous les éléments (x)

de (ξ) est une série quadratique d'équation

$$\begin{aligned}(a_{22}b_{33}-a_{33}b_{22})\xi_1 y_2 y_3 \\ +(a_{33}b_{11}-a_{11}b_{33})\xi_2 y_3 y_1+(a_{11}b_{22}-a_{22}b_{11})\xi_3 y_1 y_2=0.\end{aligned}$$

D'une façon générale, le premier membre de cette équation est le jacobien des formes f, g et $(\xi|x)$ par rapport aux (x). Cette série quadratique contient toujours les éléments singuliers (y) du faisceau.

On trouve la même série en cherchant le lieu des éléments (y) qui correspondent à (ξ) en vertu des différentes réciprocités du faisceau; son équation tangentielle peut donc s'écrire aussi

$$4\varphi\psi-\chi^2=0.$$

Par suite, $\chi=0$ définit le pôle par rapport à cette série de l'élément (η) qui contient les deux éléments (y) qui correspondent à (ξ) en vertu de f et g : ainsi s'explique la réciprocité définie par l'invariant χ.

Si l'élément (ξ) contient O_1, par exemple, la série quadratique correspondante se décompose, et son élément double situé sur Ω'_1 peut être regardé comme correspondant à (ξ); réciproquement, à un élément de Ω'_1, on peut faire correspondre l'élément (ξ) contenant O_1 et défini par

$$\frac{x_2}{(a_{33}b_{11}-a_{11}b_{33})y_3}=\frac{x_3}{(a_{11}b_{22}-a_{22}b_{11})y_2}.$$

On atténue de cette façon les effets de l'indétermination signalée plus haut dans la correspondance entre les (x) et les (y).

La même chose peut se répéter en intervertissant le rôle des espaces X et Y.

281. La correspondance que nous étudions fait correspondre à une série $l(x_1, x_2, x_3)=0$, de degré p, une série l_0 de l'espace Y, dont l'équation s'obtient immédiatement, et de degré $2p$.

Si la série l admet les éléments singuliers O_1, O_2, O_3 comme multiples des degrés q_1, q_2, q_3 respectivement, la série l_0 contient les éléments singuliers Ω'_i les mêmes nombres de fois; si nous les supprimons, il nous reste une série l' qui correspond à l d'une façon proprement dite. Cette série l' est de degré $2p-q_1-q_2-q_3$; elle admet les éléments singuliers O'_1, O'_2, O'_3 comme multiples

respectivement des degrés $p - q_2 - q_3, p - q_3 - q_1, p - q_1 - q_2$, et les éléments tangents à l' en O'_1, par exemple, correspondent aux éléments communs à l et Ω_1 autres que O_2 et O_3.

Les éléments multiples de ces séries, non coïncidant avec les éléments singuliers du faisceau (f, g), se correspondent d'une façon univoque, et deux tels éléments correspondants ont leurs éléments tangents distribués de la même façon.

Si l'on se donne une série de seconde espèce dans X, on pourra trouver sa correspondante dans Y en cherchant le lieu des éléments qui correspondent à ses divers éléments tangents, ou encore l'enveloppe des séries quadratiques qui correspondent à ses divers éléments.

On aurait des résultats analogues aux précédents en considérant le faisceau (φ, ψ).

II. — La correspondance quadratique birationnelle entre deux espaces coïncidants.

282. Si les espaces X et Y sont supposés identiques, il faut distinguer deux cas, suivant que les éléments (x) et (y) sont de même espèce ou non. Nous ne nous occuperons d'abord que du premier cas.

Si l'on fait les (y) égaux aux (x), f et g deviennent f_1 et g_1: les deux séries quadratiques f_1 et g_1 déterminent en général un faisceau, et si nous supposons que ce faisceau n'offre rien de particulier, on peut prendre pour éléments fondamentaux ceux de la suite triple conjuguée à la fois par rapport à f_1 et g_1. On pourra alors écrire

$$\begin{aligned} f = {} & a_{11}x_1y_1 + a_{22}x_2y_2 + a_{33}x_3y_3 \\ & + a_{23}(x_2y_3 - x_3y_2) + a_{31}(x_3y_1 - x_1y_3) + a_{12}(x_1y_2 - x_2y_1), \\ g = {} & b_{11}x_1y_1 + \ldots \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \varphi = {} & a_{22}a_{33}\xi_1\eta_1 + \ldots + a_{12}a_{23}(\xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2) + \ldots \\ & + (a_{23}\xi_1 + a_{31}\xi_2 + a_{12}\xi_3)(a_{23}\eta_1 + a_{31}\eta_2 + a_{12}\eta_3), \\ \psi = {} & b_{22}b_{33}\xi_1\eta_1 + \ldots \end{aligned}$$

La forme $\lambda_1 f + \lambda_2 g$ conduit d'abord aux invariants d, d', e,

e', χ déjà connus; l'invariant i, défini au n° 267, relatif à cette forme, est

$$i\lambda_1^3 + j\lambda_1^2\lambda_2 + j'\lambda_1\lambda_2^2 + i'\lambda_2^3,$$

et l'on a les nouveaux invariants

$$j = \Sigma b_{ij}\frac{\partial i}{\partial a_{ij}}, \qquad j' = \Sigma a_{ij}\frac{\partial i'}{\partial b_{ij}}.$$

Enfin un procédé connu donne encore les deux invariants

$$k = \Sigma b_{ij}\alpha_{ji}, \qquad k' = a_{ij}\beta_{ji}.$$

En se servant des formes canoniques, on a

$$d = a_{11}a_{22}a_{33} - \Sigma a_{11}a_{23}^2, \qquad e = \Sigma b_{11}a_{22}a_{33} - \Sigma b_{11}a_{23}^2 - 2\Sigma a_{11}a_{23}b_{23},$$
$$i = 3a_{11}a_{22}a_{33} - \Sigma a_{11}a_{23}^2, \qquad j = 3\Sigma b_{11}a_{22}a_{33} - \Sigma b_{11}a_{23}^2 - 2\Sigma a_{11}a_{23}b_{23},$$
$$k = \Sigma b_{11}a_{22}a_{33} - \Sigma b_{11}a_{23}^2 - 2\Sigma a_{11}a_{23}b_{23}, \qquad \ldots.$$

Le faisceau $\mu_1\varphi + \mu_2\psi$ conduit aux mêmes invariants et à l'invariant h défini précédemment.

Il est facile, avec ce qui précède, de former des systèmes fondamentaux d'invariants, et de définir les principaux éléments géométriques du système considéré.

283. Si l'on envisage spécialement la correspondance quadratique définie par le faisceau (f, g), les quatre éléments communs à f_1 et g_1 sont les seuls qui coïncident avec leurs correspondants.

Si φ_1, ψ_1, χ_1 sont les séries quadratiques obtenues en faisant les (η) égaux aux (ξ) dans φ, ψ, χ, la série quadratique lieu des éléments de seconde espèce qui contiennent leur correspondant dans la réciprocité $\lambda_1 f + \lambda_2 g$, a pour équation

$$\lambda_1^2\varphi_1 + \lambda_1\lambda_2\chi_1 + \lambda_2^2\psi_1 = 0;$$

son enveloppe est la série quartique de seconde espèce

$$4\varphi_1\psi_1 - \chi_1^2 = 0:$$

cette série est aussi le lieu des éléments (ξ) qui sont tangents aux séries quadratiques correspondantes, d'après ce qui a été dit antérieurement.

La série quadratique équivalente à celle définie ci-dessus est

bitangente à la série $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 g_1 = 0$; l'élément (x), commun aux deux éléments (ξ) tangents communs, a pour équation

$$\lambda_1(a_{23}\xi_1 + a_{31}\xi_2 + a_{12}\xi_3) + \lambda_2(b_{23}\xi_1 + b_{31}\xi_2 + b_{12}\xi_2) = 0;$$

son lieu est donc un élément de seconde espèce (ζ) d'équation

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_{23} & a_{31} & a_{12} \\ b_{23} & b_{31} & b_{12} \end{vmatrix} = 0.$$

La polaire de (x) par rapport à $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 g_1 = 0$, dont le sens géométrique est évident, a pour équation

$$(\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 b_{11})(\lambda_1 a_{23} + \lambda_2 b_{23}) x_1 + \ldots = 0;$$

son enveloppe est une série quadratique d'équation facile à former.

Le faisceau $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 g_1$ détermine sur l'élément (ζ) une involution, dont les éléments doubles se correspondent mutuellement, quand on les considère comme appartenant soit à X, soit à Y. Avec les éléments communs à f_1 et g_1, nous avons ainsi six éléments jouissant de cette propriété : on voit tout de suite qu'il n'y en a pas d'autres.

284. Examinons quelques cas particuliers.

1° Les séries f_1 et g_1 restant distinctes, la correspondance quadratique définie par le faisceau (f, g) ne pourra être involutive [c'est-à-dire que chaque élément (x) aura même correspondant, quand on le considère comme appartenant soit à X, soit à Y] que si les formes f et g sont symétriques par rapport aux (x) et aux (y), c'est-à-dire si les réciprocités f et g sont elles-mêmes en involution sans être spéciales. Dans ce cas, à chaque élément (x) correspond l'élément commun à ses deux polaires par rapport à f_1 et g_1. Il est donc inutile d'insister : on est ramené à l'étude du faisceau de deux séries quadratiques.

Ce cas est en même temps le seul dans lequel les éléments singuliers du faisceau (f, g), correspondant aux mêmes racines de l'équation $\Delta = 0$, sont les mêmes dans les deux espaces X et Y.

2° Les séries f_1 et g_1 peuvent être confondues, ou bien l'une d'elles disparaît identiquement. Dans ce cas, le faisceau (f, g) contient une réciprocité spéciale. Il existe une série simplement

infinie d'éléments qui coïncident avec leurs correspondants. Il y aura involution si, en outre, le faisceau (f, g) contient une réciprocité involutive non spéciale. Ce cas particulier peut recevoir le nom d'*inversion*.

On l'obtient, par exemple, en supposant que g définisse la réciprocité inverse de f; en d'autres termes, en supposant (x) appartenant successivement à X et Y, et prenant pour (y) l'élément commun à ses deux correspondants. Réciproquement, toute inversion peut être obtenue ainsi, et d'une infinité de façons.

Si nous supposons que f corresponde à la réciprocité involutive non spéciale, et g à la réciprocité spéciale, on pourra prendre en général

$$f = a_{11}x_1y_1 + a_{23}(x_2y_3 + x_3y_2),$$
$$g = b_{23}(x_2y_3 - x_3y_2);$$

les formules de correspondance sont alors

$$\frac{y_1}{-2a_{23}x_2x_3} = \frac{y_2}{a_{11}x_1x_2} = \frac{y_3}{a_{11}x_1x_3}.$$

Les propriétés de cette correspondance sont ainsi en évidence.

Les éléments singuliers dans les deux espaces X et Y coïncident encore; mais O_2 et O_3 correspondent dans ces deux espaces à des racines différentes de l'équation $\Delta = 0$.

Quatre éléments correspondants deux à deux appartiennent avec O_2 et O_3 à une même série quadratique.

Si la série f_1 se décompose, on prendra

$$f = a_{11}x_1y_1 + a_{22}x_2y_2,$$
$$g = b_{23}(x_2y_3 - x_3y_2),$$

et l'on aura

$$\frac{y_1}{-a_{22}x_2^2} = \frac{y_2}{a_{11}x_1x_2} = \frac{y_3}{a_{11}x_1x_3}.$$

Si l'élément singulier de g appartient à f_1, on pourra prendre

$$f = a_{33}x_3y_3 + a_{12}(x_1y_2 + x_2y_1),$$
$$g = b_{23}(x_2y_3 - x_3y_2),$$

et l'on aura

$$-\frac{y_1}{(a_{33}x_3^2 + a_{12}x_1x_2)} = \frac{y_2}{a_{12}x_2^2} = \frac{y_3}{a_{12}x_2x_3}.$$

Si f_1 se décompose, on est ramené à l'homologie.

3° Si les séries f_1 et g_1 disparaissent toutes deux, la correspondance entre les (x) et les (y) est identique.

285. Envisageons maintenant le cas où les éléments (x) et (y) des deux espaces coïncidents X et Y sont d'espèce opposée : pour plus de netteté nous remplacerons donc les (y) par les (η), et inversement.

Le faisceau (f, g) définit une *réciprocité quadratique birationnelle,* les éléments correspondants étant d'espèce différente : les formes f et g elles-mêmes définissent des homographies ordinaires.

Observons d'abord que l'étude de l'homographie dans deux espaces coïncidents peut être regardée comme un cas particulier de celle d'un système de deux formes bilinéaires, définissant des homographies dans deux espaces distincts. Ceci tient à ce que, quand les espaces X et Y sont coïncidents, la forme $(x \mid \eta)$ s'adjoint immédiatement à la forme bilinéaire $f(x, \eta)$ comme invariant, et cette forme $(x \mid \eta)$ est elle-même bilinéaire.

L'étude du système de deux formes $f(x, \eta)$ et $g(x, \eta)$, lorsque les éléments (x) et (η) remplissent le même espace, est de même un cas particulier de l'étude générale d'un système de trois formes bilinéaires que nous ferons un peu plus loin, et à laquelle nous renverrons pour les particularités relatives au cas présent.



CHAPITRE XI.

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DU RÉSEAU DE SÉRIES QUADRATIQUES.

---

286. Si l'on considère une forme linéo-quadratique à deux séries de variables

$$F = \lambda_1 f + \lambda_2 g + \lambda_3 h,$$

les f, g, h étant des formes quadratiques ternaires quelconques en (x), on peut l'étudier à des points de vue bien différents. Nous la regarderons ici simplement comme définissant un système linéaire à deux dimensions, ou *réseau*, de séries quadratiques, d'équations $F = 0$, les (λ) étant des paramètres arbitraires, et nous étudierons les propriétés géométriques de ce réseau. Nous savons qu'à ce réseau on peut faire correspondre un réseau de seconde espèce conjugué défini par

$$\Phi = \mu_1 \varphi + \mu_2 \psi + \mu_3 \chi,$$

tel que chaque série F soit conjuguée avec chaque série Φ. Ces deux réseaux jouent le même rôle l'un par rapport à l'autre. Si l'on pose

$$f = a_{x^2}, \qquad g = b_{x^2}, \qquad h = c_{x^2}, \qquad \varphi = \alpha_{\xi^2}, \qquad \psi = \beta_{\xi^2}, \qquad \chi = \gamma_{\xi^2},$$

on a, quels que soient les (λ) et les (μ),

$$(\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 b_{11} + \lambda_3 c_{11})(\mu_1 \alpha_{11} + \mu_2 \beta_{11} + \mu_3 \gamma_{11}) + \ldots = 0;$$

on ne confondra d'ailleurs pas φ avec la forme tangentielle de f.

Nous rappellerons encore que, si une série F se décompose en deux éléments, ceux-ci sont conjugués par rapport à toutes les séries Φ; et de même, en intervertissant F et Φ.

287. Formons le jacobien de f, g, h, soit

$$P = \begin{vmatrix} f_{x_1} & f_{x_2} & f_{x_3} \\ g_{x_1} & g_{x_2} & g_{x_3} \\ h_{x_1} & h_{x_2} & h_{x_3} \end{vmatrix};$$

nous définissons ainsi une série cubique de première espèce, dite *jacobienne* du réseau F et *cayleyenne* du réseau Φ. De même, le jacobien Π des formes φ, ψ, χ définit une série cubique de deuxième espèce, jacobienne du réseau Φ et cayleyenne du réseau F.

La série P peut être interprétée de plusieurs façons, d'après son équation même :

1° $P = 0$ est le lieu des éléments (y) dont les polaires par rapport aux séries F ont un élément commun (z).

2° $P = 0$ est aussi le lieu des éléments (z) que nous venons de définir et les polaires de (z) contiennent toutes (y) : (y) et (z) sont dits *correspondants* sur P.

3° $P = 0$ est le lieu des éléments doubles des séries décomposables du réseau F.

4° Si une série Φ se décompose en deux éléments (y) et (z), ces deux éléments sont conjugués par rapport à toutes les séries F, et par suite appartiennent à P et sont même correspondants sur P. $P = 0$ est donc aussi le lieu des éléments que représentent les séries décomposables du réseau Φ.

Les mêmes propriétés s'appliquent à la série Π, avec les modifications nécessaires.

Donc encore :

5° (y) et (z) étant correspondants sur P, ces deux éléments forment ensemble une série décomposable du réseau Φ, et par suite le lieu de (yz) est la série Π.

6° (y) et (z) étant correspondants, (yz) détermine, sur chaque série F, deux éléments conjugués harmoniques par rapport à (yz) ; donc $\Pi = 0$ est le lieu des éléments (ξ) qui déterminent avec toutes les séries F des couples en involution ; (y) et (z) sont les éléments doubles de cette involution ; les séries F contenant (y) ou (z) sont toutes tangentes à (yz). Par suite, $P = 0$ est le lieu des éléments (y) tels que toutes les séries F qui contiennent (y) y aient un même élément tangent, savoir (yz), (z) correspondant à (y).

7° Si f, g, h sont trois séries fixes du réseau F, $P = 0$ est le lieu des éléments ayant même polaire par rapport à f et aux séries du faisceau (g, h), quand celles-ci varient ; et $\Pi = 0$ est le lieu des éléments (ξ) contenant deux éléments communs à f et aux séries du faisceau (g, h).

Les mêmes propriétés ont lieu quand on intervertit le rôle des séries F et Φ.

D'après l'une des propriétés ci-dessus, on peut écrire d'une nouvelle façon les équations des séries P et II. Si une série Φ se décompose, de sorte que

$$\mu_1\varphi + \mu_2\psi + \mu_3\chi = (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3)(\xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \xi_3 y_3),$$

P = 0 est le lieu de (x); donc l'équation P = 0 peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{22} & \alpha_{33} & 2\alpha_{23} & 2\alpha_{31} & 2\alpha_{12} \\ \beta_{11} & \beta_{22} & \beta_{33} & 2\beta_{23} & 2\beta_{31} & 2\beta_{12} \\ \gamma_{11} & \gamma_{22} & \gamma_{33} & 2\gamma_{23} & 2\gamma_{31} & 2\gamma_{12} \\ x_1 & 0 & 0 & 0 & x_3 & x_2 \\ 0 & x_2 & 0 & x_3 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & x_3 & x_2 & x_1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

On aurait de même II = 0 sous une forme analogue.

288. Soient (y) et (y') deux éléments de P, (z) et (z') leurs correspondants : (yy') a en commun avec P un troisième élément (t) qui appartient aussi à (zz'). En effet, (t) est élément double pour une série F_0 du réseau F; la polaire de (y) par rapport à F_0 est (zt), et de même la polaire de (y') par rapport à F_0 est $(z't)$: mais ces deux polaires sont identiques, puisque (yy') contient (t): donc aussi (zz') contient (t).

De même, (yz') et $(y'z)$ ont en commun avec P un même troisième élément (u) : (t) et (u) sont correspondants, car la polaire de (t) par rapport à la série F_1 du réseau F, d'élément double (y), coïncide avec celle de (y') et est par suite (yz'); de même, la polaire de (t) par rapport à la série F_2 du réseau F d'élément double (y') est $(y'z)$: l'élément (u) commun à ces deux polaires correspond à (t).

Si (y') se confond avec (y), et par suite (z') avec (z), on voit que les éléments tangents à P en deux éléments correspondants (y) et (z) ont en commun un élément (t) de P, correspondant au troisième élément (u) commun à (yz) et à P. De chaque couple d'éléments correspondants on peut donc en déduire facilement un autre.

Si (y) est inflexionnel sur P, (t) se confond avec (y) et par suite (u) avec (z), de sorte que (yz) touche P en (z).

(y) et (z) étant correspondants sur P, et (u) étant le troisième élément commun à (yz) et à P, la polaire de (y) par rapport à la série F_3 du réseau F qui admet (u) comme élément double contient (z), et par suite est (yz) : donc (yz) fait partie de cette série F_3.

Pour déterminer l'élément tangent à Π suivant (yz), considérons, comme au début de ce numéro, un second couple d'éléments correspondants (y'), (z') : soient (t) et (u) les éléments définis par les couples (yy'), (zz') et (yz'), $(y'z)$; soit, de plus, (u') l'élément commun à (yz) et $(y'z')$; les éléments (u) et (u') sont conjugués harmoniques par rapport à (ty) et (tz), comme on sait. Cette propriété subsistant quand (y') vient se confondre avec (y), et (u') devenant l'élément de contact cherché, on voit que celui-ci est le conjugué harmonique de (u) par rapport à (y) et (z).

Si (y) est inflexionnel sur P, (u) est confondu avec (z) et par suite (u') aussi. Donc la série tangentielle de Π, soit P′, du degré six, est tangente à P suivant les neuf éléments (z) qui correspondent aux neuf éléments inflexionnels (y) de P, et n'a pas d'autre élément commun avec P; les éléments tangents communs sont d'ailleurs les éléments (yz). Une proposition analogue s'énoncerait, résultant de la considération de la série Π et de la série tangentielle Π′ de P. On peut aussi répéter tout ce qui précède en intervertissant le rôle des séries P et Π. En particulier, on voit que les éléments (z), définis plus haut, appartiennent aux éléments inflexionnels de Π, et que les éléments (yz) correspondent à ces éléments inflexionnels.

(y) et (z) étant correspondants et (u) ayant toujours la même signification que précédemment, soient (η) et (η') les éléments qui constituent la série du réseau d'élément double (y), (ζ) et (ζ') les éléments analogues relatifs à (z), (yz) et (ξ) les éléments analogues relatifs à (u) : (η) a en commun avec P deux éléments autres que (y), correspondants et conjugués harmoniques par rapport à (yz) et (ξ) par suite; l'élément $(\xi\eta)$ est donc tangent à Π en (η). L'élément (ξ), tangent à P′, a donc encore en commun avec P′ les quatre éléments déterminés par (η), (η'), (ζ), (ζ').

289. Le réseau F contient une infinité de faisceaux obtenus en assujettissant les séries F à contenir un élément (y) fixe; les trois

autres éléments communs aux séries du faisceau déterminé par (y) sont dits *associés* à (y) : on obtient une correspondance spéciale et involutive, qui fait correspondre à chaque élément (y) chacun de ses trois associés.

Si (y) est quelconque, le faisceau correspondant ne présente aucune particularité; les éléments associés de (y) appartiennent aux trois éléments de H contenant (y) et sont conjugués harmoniques de (y) par rapport aux éléments correspondants de P appartenant à ces éléments. Si (y) appartient à P, les séries du faisceau sont tangentes en (y) à (yz), en conservant les notations précédentes; des trois éléments associés à (y), l'un est (y) lui-même, les deux autres appartiennent à P'. Si (y) appartient à P', les séries du faisceau sont tangentes en un certain élément de P facile à déterminer d'après ce qui précède, et qui compte deux fois comme associé à (y). Si (y) est commun à P et P' et, par suite, correspond à un élément inflexionnel de P, les séries du faisceau sont osculatrices en (y), l'élément tangent commun étant (yz); le quatrième élément commun à ces séries est cuspidal sur P'; donc, si (y) est cuspidal sur P', les séries du faisceau sont encore osculatrices en un élément facile à déterminer.

Les mêmes remarques générales s'appliquent au réseau Φ avec les modifications convenables.

290. Nous venons d'expliquer les principales propriétés géométriques d'un réseau de séries quadratiques : mais nous avons supposé que ce réseau était le plus général, et dans ce cas on s'assure facilement que l'une ou l'autre des séries P et H peut être considérée comme la plus générale de son espèce.

Nous allons maintenant étudier les cas particuliers qui peuvent se présenter : les propriétés générales énoncées précédemment s'appliquent encore à ces cas, avec des modifications évidentes, dont nous ne donnerons pas le détail.

Un calcul facile montre que si la série P a un élément multiple (x), ou bien cet élément est commun à toutes les séries F du réseau, ou bien il appartient à une série F représentant deux fois un élément (ξ), et, de plus, il existe au moins une série F tangente à (ξ) en (x). Les propositions réciproques sont vraies.

Si (x) est commun à toutes les séries F, (x) compté deux fois

appartient au réseau Φ; et réciproquement. De plus, on peut intervertir le rôle des séries F et Φ.

Ceci posé, nous dirons d'un élément (x) qu'il est simplement singulier pour le réseau F, si toutes les séries F le contiennent sans y être tangentes; qu'il est doublement singulier, si toutes les séries F y sont tangentes, sans y être osculatrices; qu'il est triplement singulier, si toutes les séries F y sont osculatrices; enfin qu'il est quadruplement singulier, s'il est singulier pour toutes les séries F. On ne peut faire d'autre hypothèse, car nous supposons essentiellement que les séries F ne forment pas un faisceau.

Quand (x) est singulier pour le réseau F, compté deux fois, il constitue une série du réseau Φ. Si (x) est simplement singulier, les éléments communs à (x) et aux séries Φ ne sont pas fixes tous les deux; si (x) est doublement singulier, ces éléments sont fixes, distincts ou confondus, suivant que les séries F n'ont pas un autre élément commun, ou en ont un; et dans ce dernier cas, les séries Φ, qui sont toutes tangentes à (x) en un même élément, ne sont pas osculatrices; si (x) est triplement singulier, les séries Φ sont toutes tangentes à (x) en un même élément et sont osculatrices; enfin, si (x) est quadruplement singulier, (x) fait partie de toutes les séries Φ.

Ces propositions se démontrent sans peine à l'aide d'un calcul très simple; leurs réciproques sont vraies.

Étant donné le réseau F, on exprimera qu'il a un élément singulier en écrivant le résultant des formes f, g, h et l'égalant à zéro : c'est le déterminant des coefficients dans f, g, h et les dérivées partielles de P.

Pour exprimer que Φ a un élément singulier, on écrira que la forme F peut se réduire à un carré parfait, c'est-à-dire que la forme tangentielle de F peut devenir identiquement nulle. Si, entre les six équations qui expriment ce fait, on élimine linéairement les six quantités λ_i^2 et $\lambda_i \lambda_j$, on obtient encore, égalé à zéro, un déterminant du sixième ordre et du quatrième degré par rapport aux coefficients de chacune des formes f, g, h.

291. L'énumération des différents cas particuliers possibles est maintenant facile à faire.

1° L'un des réseaux, F par exemple, a un élément simplement singulier (x).

La série P ne se décompose pas; elle admet (x) comme élément double, correspondant à lui-même; les éléments tangents en x, distincts, sont ceux qui constituent la série F d'élément multiple (x).

La série Π se compose de (x) et d'une série quadratique contenant les éléments tangents en (x) à P; la série tangentielle de cette série quadratique touche P en trois éléments, qui correspondent aux trois éléments inflexionnels de P.

La correspondance des éléments sur les séries P et Π est, comme dans les cas suivants, facile à reconnaître.

2° L'un des réseaux, F par exemple, a deux éléments simplement singuliers (x) et (x').

La série P se compose de (xx') et d'une série quadratique contenant (x) et (x'); les éléments tangents (ξ) et (ξ') à cette série en (x) et (x') constituent avec (xx') les séries F admettant (x) et (x') comme éléments doubles.

La série Π se compose de (x), (x') et $(\xi\xi')$.

On observera dans ce cas que (x) et (x') sont associés à un élément quelconque (y); le troisième élément associé à (y) est lié à (y) par une inversion définie par $(\xi\xi')$ et la série quadratique qui fait partie de P.

Des remarques analogues pourront être répétées pour quelques-uns des cas suivants.

3° L'un des réseaux, F par exemple, a trois éléments simplement singuliers (nécessairement non alignés), (x), (x') et (x''). La série P se compose de $(x'x'')$, $(x''x)$, (xx'); la série Π se compose de (x), (x'), (x'').

4° Les réseaux F et Φ admettent chacun un élément simplement singulier; ces deux éléments (x) et (ξ) se contiennent nécessairement.

La série P se compose de (ξ) et d'une série quadratique tangente à (ξ) en (x); la série Π se compose de (x) et d'une série quadratique tangente à (x) et (ξ). La série tangentielle de l'une de ces séries quadratiques touche encore l'autre.

5° Le réseau F, par exemple, admet deux éléments simplement singuliers (x) et (x'), et le réseau Φ admet un élément doublement singulier, nécessairement (xx').

Si (y) est l'élément tangent commun aux séries Φ en (xx'), la série P se compose de (xx') deux fois, et d'un élément (ξ), tel que (x) et (x') soient conjugués harmoniques par rapport à (y) et l'élément commun à (ξ) et (xx'). La série Π se compose de (x), (x') et (y).

6° Le réseau F, par exemple, admet (x) comme élément doublement singulier, et (x') comme simplement singulier; et Φ admet un élément doublement singulier (xx').

La série P se compose de (xx') deux fois, et de l'élément tangent commun aux séries F en (x). La série Π se compose de (x) deux fois et de (x').

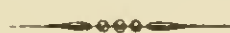
7° Les réseaux F et Φ admettent chacun un élément triplement singulier; ces deux éléments (x) et (ξ) se contiennent nécessairement.

Les séries P et Π se composent de (ξ) et de (x) trois fois.

8° Le réseau F, par exemple, admet (x) comme élément quadruplement singulier, de sorte que toutes les éléments (ξ) de (x) sont singuliers pour le réseau Φ.

La série P disparaît, et la série Φ se compose de (x) trois fois.

Comme conséquence de cette discussion, remarquons que la série P, par exemple, peut devenir toute série cubique particulière, sauf toutefois une série cubique indécomposable à élément cuspidal.



CHAPITRE XII.

LA SÉRIE CUBIQUE.

I. — Premières définitions. — Les polaires.

292. Considérons une série cubique de première espèce d'équation $f = a_{x^3} = 0$, où la forme f renfermant dix coefficients sera écrite

$$f = a_1 x_1^3 + a_2 x_2^3 + a_3 x_3^3 + 3 a_{23} x_2^2 x_3 + 3 a_{32} x_3^2 x_2 + 3 a_{31} x_3^2 x_1 + 3 a_{13} x_1^2 x_3 + 3 a_{12} x_1^2 x_2 + 3 a_{21} x_2^2 x_1 + 6 a x_1 x_2 x_3.$$

Nous supposerons la série indécomposable et, par suite, trois cas seulement se présentent :

1° La série f n'a pas d'élément multiple et, par suite, est de genre un; elle possède neuf éléments inflexionnels proprement dits. La série tangentielle φ est du sixième degré, n'a pas d'éléments doubles ordinaires, ni éléments inflexionnels, mais possède neuf éléments cuspidaux, tangents à f en ses éléments inflexionnels.

2° La série f est rationnelle et possède un élément double ordinaire; elle admet alors trois éléments inflexionnels seulement. La série tangentielle est du quatrième degré et admet trois éléments cuspidaux, mais n'admet aucun élément double ordinaire ou inflexionnel.

3° La série f est rationnelle et possède un élément cuspidal et, par suite, un seul élément inflexionnel.

La série tangentielle est alors du troisième degré, admet un élément cuspidal et un élément inflexionnel, et n'admet aucun élément double.

293. La seconde polaire d'un élément (y) par rapport à f, d'équation $a_{xy^2} = 0$, est une série linéaire. Si un élément (ξ) contient (y) et a en commun avec f les éléments (t), (t') et (t''), tandis que (x) est son élément commun avec la seconde polaire

de (y), on peut écrire

$$1 + (xyt't) + (xyt''t) = 0.$$

Si (y) appartient à f, sa seconde polaire est l'élément tangent à f en (y).

L'enveloppe des secondes polaires de tous les éléments (y) est la hessienne h de f, série cubique, d'équation

$$h = \begin{vmatrix} \frac{1}{6}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{1}{6}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{1}{6}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{1}{6}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{1}{6}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{1}{6}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{1}{6}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{1}{6}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{1}{6}\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{vmatrix} = 0.$$

294. La première polaire d'un élément (y) par rapport à f, d'équation $a_{xy}^2 = 0$, est une série quadratique.

Comme plus haut, les éléments (x) de cette polaire appartenant à (ξ) contenant (y), sont définis par

$$1 + (xytt') + (xytt'') = 0.$$

La première polaire de (y) contient les éléments de contact des éléments tangents à f menés par (y).

Si (x) appartient à la première polaire de (y), (y) appartient à la seconde polaire de (x).

Si (y) appartient à f, sa première polaire touche la deuxième et aussi f en (y); c'est aussi le lieu du conjugué harmonique de (y) par rapport aux deux autres éléments que détermine sur f chaque élément (ξ) contenant (y).

Les premières polaires de tous les éléments (y) forment un réseau de séries quadratiques auquel on peut appliquer tout ce qui a été dit au Chapitre précédent.

La jacobienne de ce réseau est la série hessienne h; la cayleyenne est une série cubique de seconde espèce γ, qui sera définie par l'équation générale

$$\gamma = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & a_{21} & a_{31} & 2a & 2a_{13} & 2a_{12} \\ a_{12} & a_2 & a_{32} & 2a_{23} & 2a & 2a_{21} \\ a_{13} & a_{23} & a_3 & 2a_{32} & 2a_{31} & 2a \\ \xi_1 & 0 & 0 & 0 & \xi_3 & \xi_2 \\ 0 & \xi_2 & 0 & \xi_3 & 0 & \xi_1 \\ 0 & 0 & \xi_3 & \xi_2 & \xi_1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Mais on peut ajouter que la première polaire de (y) a un élément double (z), si (y) appartient lui-même à h; la première polaire de (z) a elle-même (y) comme élément double et, par suite, (y) et (z) sont correspondants sur h dans le réseau formé des premières polaires.

La cayleyenne γ, qui est le lieu des éléments (yz), est donc aussi la cayleyenne de f, comme nous l'avons définie généralement pour une série de degré quelconque, tandis que la steinérienne de f coïncide avec sa hessienne.

Si (y) et (z) sont correspondants sur h, la polaire linéaire de l'un, (y), est tangente à h en (z).

Toutes ces propositions sont faciles à vérifier directement; la plupart d'entre elles résultent de propositions plus générales énoncées antérieurement.

Les premières polaires de tous les éléments (y) d'un même élément (ξ) forment un faisceau, et réciproquement.

Les séries décomposables de ce faisceau correspondent aux éléments communs à (ξ) et à h; elles sont donc distinctes si (ξ) ne touche pas h; les séries du faisceau sont simplement tangentes entre elles, si (ξ) touche h, sans être un élément tangent stationnaire; elles sont osculatrices, si cette dernière condition est réalisée. Quand les séries du faisceau sont tangentes entre elles, leur élément de contact (z) appartient à h, et leur élément tangent commun est (yz), (y) correspondant à (z) et étant l'élément de contact de (ξ) et (h).

295. Considérons le cas où (y) est commun à f et à h, c'est-à-dire inflexionnel pour f; la polaire quadratique de (y) se compose alors de l'élément tangent (η) à f en (y), et d'un élément (η'), qui, à cause de ses propriétés évidentes d'après ce qu'on a dit plus haut, est dit *polaire harmonique* de (y). Cette polaire contient les éléments de contact des trois éléments tangents à f autres que (η) qui contiennent (y). L'élément $(\eta\eta')$ ou (z) correspond à (y) sur h; mais l'élément tangent à h en (z) est (η) : alors, d'après les propriétés des réseaux, on en conclut que les éléments inflexionnels (y) de f sont aussi inflexionnels pour h; que h touche les éléments tangents stationnaires (η) de f en des éléments (z) correspondant aux (y); que ces éléments inflexionnels (η) appar-

tiennent à la cayleyenne γ, et que les éléments tangents correspondants sont les (ε); que les (η'), correspondants des (η) sur γ, sont les éléments inflexionnels de γ.

296. Enfin, remarquons que le réseau des premières polaires par rapport à f n'a aucun élément singulier si la série f n'est pas rationnelle. Si f a un élément double ordinaire, le réseau considéré admet cet élément comme simplement singulier; si f a un élément cuspidal, le réseau admet cet élément comme doublement singulier. Les formules développées ultérieurement montrent sans peine dans quels cas particuliers on se trouve alors, comme aussi les cas de décomposition de h, quand la série f n'a aucun élément singulier.

II. — Les éléments inflexionnels et la forme canonique.

297. Cherchons une forme canonique pour f, dans le cas où cette série n'a pas d'élément cuspidal.

Supposons d'abord que nous prenions pour éléments fondamentaux O_2 et O_3 deux éléments inflexionnels de f, et pour éléments Ω_2 et Ω_3 les éléments tangents correspondants. On aura alors

$$f = a_1 x_1^3 + 3 x_2 x_3 (2 a x_1 + a_{23} x_2 + a_{32} x_3).$$

Ceci nous montre que le troisième élément commun à f et à Ω_1 est aussi inflexionnel, l'élément tangent correspondant étant

$$2 a x_1 + a_{23} x_2 + a_{32} x_3 = 0.$$

Les neuf éléments inflexionnels sont donc alignés trois par trois sur douze éléments de seconde espèce, appelés *axes inflexionnels,* et chacun d'eux contient quatre de ces axes.

Toutefois si f a un élément double, il n'y a que trois éléments inflexionnels, alignés sur un seul axe.

Les polaires harmoniques de O_2 et O_3 sont

$$2 a x_1 + 2 a_{23} x_2 + a_{32} x_3 = 0,$$
$$2 a x_1 + a_{23} x_2 + 2 a_{32} x_3 = 0;$$

prenons-les pour nouveaux éléments fondamentaux Ω'_3 et Ω'_2, Ω'_1

coïncidant avec Ω_1. Ceci est possible, car a_{23} et a_{32} sont certainement non nuls dans les hypothèses faites; f prend alors la forme

$$A x_1'^3 + B x_1' (x_2'^2 - x_2' x_3' + x_3'^2) + C(x_2' + x_3')(x_2' - 2x_3')(x_3' - 2x_2') = 0.$$

Mais si maintenant nous remarquons que $x_2'^2 - x_2' x_3' + x_3'^2$ est précisément le hessien de la forme cubique binaire

$$(x_2' + x_3')(x_2' - 2x_3')(x_3' - 2x_2'),$$

on voit que si nous réduisons cette forme à la forme canonique, à l'aide d'un changement de variables fait sur x_2' et x_3' seulement, f prend finalement la forme suivante, où les accents ont été supprimés :

$$f = a_1 x_1^3 + a_2 x_2^3 + a_3 x_3^3 + 6 a x_1 x_2 x_3.$$

Telle est la forme canonique que nous emploierons presque exclusivement.

298. La première polaire de (y) a pour équation

$$y_1(a_1 x_1^2 + 2a x_2 x_3) + y_2(a_2 x_2^2 + 2a x_3 x_1) + y_3(a_3 x_3^2 + 2a x_1 x_2) = 0;$$

on voit que le réseau ainsi défini ne peut avoir d'élément singulier que si l'une des quantités a_i est nulle, ou bien si l'on a $a_1 a_2 a_3 + 8a^3 = 0$. Mais ce dernier cas est à écarter, car alors f se décompose en trois facteurs linéaires, ce que nous ne supposons pas.

La forme canonique trouvée ne correspond donc à une série à élément double que si l'une des quantités a_i, a_1 par exemple, est nulle. O_1 est alors l'élément double, et Ω_1 est l'axe inflexionnel; Ω_2 et Ω_3 sont les éléments tangents à f en O_1; O_2 et O_3 sont les deux éléments qui déterminent avec les trois éléments inflexionnels de f sur Ω_1 un rapport équianharmonique. Les polaires harmoniques contiennent O_1 et, sur Ω_1, les éléments conjugués harmoniques de l'un des éléments inflexionnels par rapport aux deux autres. La réduction à la forme canonique ne peut se faire que d'une seule façon.

299. Occupons-nous maintenant du cas général.

Les éléments de référence Ω_i jouent évidemment tous les trois le même rôle; ce sont des axes inflexionnels. Il est clair que les

douze axes inflexionnels forment quatre telles suites triples proprement dites, et que la réduction à la forme canonique est par suite possible de quatre façons différentes.

Les éléments inflexionnels sont distribués trois par trois sur les éléments Ω_i. Voici le Tableau de leurs coordonnées, en appelant ω une racine cubique imaginaire de l'unité, et prenant pour nouvelles coordonnées les quantités x'_i définies par les relations $a_i x_i^3 = x_i'^3$,

$$\begin{array}{llll}
I_1 : 0, & 1, & -1; & I_4 : -\omega^2, \quad 0, \quad 1; \qquad I_7 : 1, \quad -\omega, \quad 0;\\
I_2 : 0, & 1, & -\omega; & I_5 : -1, \quad 0, \quad 1; \qquad I_8 : 1, \quad -\omega^2, \quad 0;\\
I_3 : 0, & 1, & -\omega^2; & I_6 : -\omega, \quad 0, \quad 1; \qquad I_9 : 1, \quad -1, \quad 0.
\end{array}$$

Les axes inflexionnels, rangés par suites triples, sont alors

$$\begin{array}{ll}
(I_1 I_2 I_3) : x'_1 = 0; & (I_1 I_4 I_7) : \omega x'_1 + x'_2 + x'_3 = 0;\\
(I_4 I_5 I_6) : x'_2 = 0; & (I_2 I_5 I_8) : x'_1 + \omega x'_2 + x'_3 = 0;\\
(I_7 I_8 I_9) : x'_3 = 0; & (I_3 I_6 I_9) : x'_1 + x'_2 + \omega x'_3 = 0;
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
(I_1 I_5 I_9) : x'_1 + x'_2 + x'_3 = 0; & (I_1 I_6 I_8) : \omega^2 x'_1 + x'_2 + x'_3 = 0;\\
(I_2 I_6 I_7) : x'_1 + \omega^2 x'_2 + \omega x'_3 = 0; & (I_2 I_4 I_9) : x'_1 + x'_2 + \omega^2 x'_3 = 0;\\
(I_3 I_4 I_8) : x'_1 + \omega x'_2 + \omega^2 x'_3 = 0; & (I_3 I_5 I_7) : x'_1 + \omega^2 x'_2 + x'_3 = 0.
\end{array}$$

On remarquera que les axes inflexionnels correspondent aux termes du déterminant

$$\begin{vmatrix} I_1 & I_2 & I_3 \\ I_4 & I_5 & I_6 \\ I_7 & I_8 & I_9 \end{vmatrix}$$

et, en outre, aux produits obtenus en prenant trois termes dans une même ligne horizontale ou verticale. Les quatre suites de trois axes correspondent aux quatre groupes de trois termes obtenus par l'un de ces procédés, les termes du déterminant étant partagés en deux groupes, suivant leur signe.

Les Tableaux précédents conduisent à de nombreuses propositions qu'il est inutile d'énoncer explicitement : ils mettent en évidence en particulier les substitutions que l'on doit faire pour passer d'une forme canonique à une autre.

Un élément inflexionnel appartenant à Ω_1 a pour coordonnées $0, -\sqrt[3]{a_3}, \sqrt[3]{a_2}$; sa polaire harmonique est donc

$$x_2 \sqrt[3]{a_2} = x_3 \sqrt[3]{a_3},$$

et contient O_1.

Les polaires harmoniques, qui jouent par rapport à la cayleyenne le même rôle que les éléments inflexionnels par rapport à la hessienne, sont donc alignées trois par trois avec les éléments tels que O_i; chacune d'elles contient quatre de ces douze éléments, analogues aux axes inflexionnels.

Si l'on considère les formes cubiques en x_2 et x_3 par exemple, qui définissent, sur Ω_1, les éléments fondamentaux, les éléments inflexionnels, et enfin les polaires harmoniques des précédents, la première de ces formes est, à des facteurs près, le hessien de chacune des deux autres, et chacune de ces dernières peut être regardée comme l'invariant cubique de l'autre.

III. — Les invariants fondamentaux.

300. Nous allons maintenant calculer les invariants les plus intéressants du système formé par f et les variables (x) et (ξ).

Huit de ces invariants sont indépendants.

Après la forme f elle-même que nous écrivons, sous la forme canonique,

$$f = a_1 x_1^3 + a_2 x_2^3 + a_3 x_3^3 + 6 a x_1 x_2 x_3,$$

nous avons d'abord la hessienne h et la cayleyenne γ, déjà définies en général. Ici

$$h = -a^2(a_1 x_1^3 + a_2 x_2^3 + a_3 x_3^3) \quad + (a_1 a_2 a_3 + 2a^3) x_1 x_2 x_3,$$
$$\gamma = a(a_2 a_3 \xi_1^3 + a_3 a_1 \xi_2^3 + a_1 a_2 \xi_3^3) + (a_1 a_2 a_3 - 4a^3)\xi_1 \xi_2 \xi_3.$$

On voit, comme on devait s'y attendre d'après ce qui a été dit plus haut, que les formes h et γ sont elles-mêmes réduites à la forme canonique, et l'on vérifie que les éléments inflexionnels de h coïncident avec ceux de f; les polaires harmoniques de ces éléments sont les mêmes pour f et pour h, et sont les éléments inflexionnels de γ.

Si f a un élément double en O_1, il en est de même de h, qui ne se décompose pas, et γ se compose de O_1 et d'une série quadratique d'équation

$$a_2 a_3 \xi_1^2 - 4a^2 \xi_2 \xi_3 = 0.$$

Si f n'a pas d'élément double, h peut en avoir, d'après ce qu'on a dit plus haut, si $a = 0$, ou si $a_1 a_2 a_3 - a^3 = 0$; dans chacun de

ces cas, h se décompose en trois éléments, et il en est de même de γ.

Les éléments dans lesquels se décompose h forment l'une des suites triples d'axes inflexionnels, et la propriété analogue a lieu pour γ.

301. Nous joindrons tout de suite aux invariants précédents la hessienne δ de γ, soit

$$\delta = -\frac{1}{36}\, a(a_1 a_2 a_3 - 4a^3)^2 (a_2 a_3 \xi_1^3 + a_3 a_1 \xi_2^3 + a_1 a_2 \xi_3^3)$$
$$+ \frac{1}{108}\,[(a_1 a_2 a_3 - 4a^3)^3 + 108\, a_1^2 a_2^2 a_3^2 a^3]\,\xi_1 \xi_2 \xi_3.$$

Si maintenant nous multiplions ensemble les coefficients correspondants des formes opposées f et γ, et si nous ajoutons les produits ainsi obtenus, en tenant compte des coefficients polymoniaux convenables, nous obtenons l'invariant proprement dit $K^3(f, \gamma)$, et nous écrirons

$$i = \frac{1}{4} K^3(f, \gamma) = a(a_1 a_2 a_3 - a^3);$$

de même, on obtient

$$j = 6K^3(h, \gamma) = a_1^2 a_2^2 a_3^2 - 20 a_1 a_2 a_3 a^3 - 8a^6.$$

Ces deux invariants proprement dits forment un système complet de telles fonctions.

Le discriminant de f calculé comme résultant de $\frac{1}{3}\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{1}{3}\frac{\partial f}{\partial x_2}$, $\frac{1}{3}\frac{\partial f}{\partial x_3}$ est

$$a_1 a_2 a_3 (a_1 a_2 a_3 + 8a^3)^3;$$

il est égal à $64 i^3 + j^2$.

On a aussi l'identité

$$j\gamma - 108\delta = 4i[(a_1 a_2 a_3 - 10a^3)(a_2 a_3 \xi_1^3 + a_3 a_1 \xi_2^3 + a_1 a_2 \xi_3^3)$$
$$- 6a^2(5a_1 a_2 a_3 + 4a^3)\xi_1 \xi_2 \xi_3],$$

et l'invariant ε, entre crochets, défini plus naturellement un peu plus loin, peut remplacer δ, comme étant plus simple.

302. Nous aurons des invariants du sixième degré par rapport

aux (x) ou aux (ξ) en prenant les formes tangentielles des précédentes. Écrivons seulement celle de f :

$$\begin{aligned}\varphi = & a_2^2 a_3^2 \xi_1^6 + a_3^2 a_1^2 \xi_2^6 + a_1^2 a_2^2 \xi_3^6 \\ & -(2a_1 a_2 a_3 + 32 a^3)(a_1 \xi_2^3 \xi_3^3 + a_2 \xi_3^3 \xi_1^3 + a_3 \xi_1^3 \xi_2^3) \\ & - 24 a^2 (a_2 a_3 \xi_1^3 + a_3 a_1 \xi_2^3 + a_1 a_2 \xi_3^3)\xi_1 \xi_2 \xi_3 - 24 a (a_1 a_2 a_3 + 2 a_3) \xi_1^2 \xi_2^2 \xi_3^2.\end{aligned}$$

Pour préciser complètement cette forme, ajoutons que l'on a

$$K^6(f^2, \varphi) = \frac{12}{5} j.$$

De plus,

$$K^3(f, \varphi) = \frac{4}{5} \varepsilon,$$

et c'est là la façon la plus naturelle d'introduire l'invariant ε.

303. Envisageons un élément (y); on sait que si l'on forme le discriminant de la forme binaire en (λ)

$$\lambda_1^3 a_{x^3} + 3\lambda_1^2 \lambda_2 a_{x^2 y} + 3\lambda_1 \lambda_2^2 a_{xy^2} + \lambda_2^3 a_{y^3},$$

on obtient l'équation des éléments tangents à f contenant (y). Si (y) appartient à f, l'équation

$$4 a_{x^3} a_{xy^2} - 3 a_{x^2 y}^2 = 0$$

représente donc les quatre éléments tangents menés par (y) à f, autres que l'élément tangent en (y). Nous allons chercher le rapport anharmonique de ces quatre éléments tangents; c'est le même que celui des racines de la forme binaire en x_2 et x_3, obtenue en faisant $x_1 = 0$ dans le premier membre de l'équation précédente, soit, en faisant le calcul sur la forme canonique,

$$\begin{aligned} & x_2^4 (a_2^2 y_2^2 + 8 a_2 a y_1 y_3) + 4 x_2^3 x_3 (a_2 a_3 y_3^2 - a_2 a y_1 y_2) \\ & - 6 x_2^2 x_3^2 (a_2 a_3 y_2 y_3 + 2 a^2 y_1^2) + 4 x_2 x_3^3 (a_2 a_3 y_2^2 - a_3 a y_1 y_3) \\ & + x_3^4 (a_3^2 y_3^2 + 8 a_3 a y_1 y_2).\end{aligned}$$

Si nous appelons i' et j' les invariants de cette forme biquadratique, on trouve sans peine, en tenant compte de $a_{y^3} = 0$,

$$\begin{aligned} i' &= -12 a (a_1 a_2 a_3 - a^3) y_1^4 = -12 i y_1^4, \\ j' &= -(a_1^2 a_2^2 a_3^2 - 20 a_1 a_2 a_3 a^3 - 8 a^6) y_1^6 = -j y_1^6.\end{aligned}$$

Si donc $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ est l'un des rapports anharmoniques cherchés, on a

$$\frac{(\rho_1+\rho_2)^2(\rho_1-2\rho_2)^2(\rho_2-2\rho_1)^2}{j^2}=\frac{4(\rho_1^2-\rho_1\rho_2+\rho_2^2)^3}{-64\,i^3}=\frac{27\rho_1^2\rho_2^2(\rho_1-\rho_2)^2}{-(64\,i^3+j^2)}.$$

Le rapport anharmonique cherché est donc constant, quel que soit l'élément (y) sur f; il correspond à l'invariant absolu $\frac{i^3}{j^2}$. Il est équianharmonique si $i=0$; il est harmonique si $j=0$: telle est la signification simple de ces conditions invariantes. Si $64\,i^3+j^2=0$, deux des éléments tangents considérés se confondent, en allant contenir l'élément double.

Ce théorème pourra être appliqué aux séries cubiques rencontrées dans l'étude d'un réseau de séries quadratiques, et conduira à de nouvelles propriétés.

En voici encore une conséquence immédiate : si l'on considère les deux groupes de quatre éléments tangents menés à f par deux éléments (y) et (z) de f, les seize éléments communs aux éléments de ces deux groupes appartiennent quatre par quatre à quatre séries quadratiques contenant (y) et (z).

304. La première polaire de (y) est

$$a_{x^2y}=y_1(a_1x_1^2+2a\,x_2x_3)+y_2(a_2x_2^2+2a\,x_3x_1)+y_3(a_3x_3^2+2a\,x_1x_2).$$

L'équation $a_{x^2y}=0$, où l'on suppose les (y) ou les (x) donnés, est le lieu des éléments (x) ou (y) dont la seconde ou la première polaire contient (y) ou (x).

Prenons la forme tangentielle de a_{x^2y} par rapport aux (x); c'est un invariant à deux séries de variables très intéressant

$$p(y,\xi)=(a_2a_3y_2y_3-a^2y_1^2)\xi_1^2+\ldots+2a(ay_2y_3-a_1y_1^2)\xi_2\xi_3+\ldots.$$

Si (y) est donné, la série $p(y,\xi)=0$ est le lieu des éléments (ξ) qui touchent la première polaire de (y); le discriminant de cette série est $h^2(y)$ à un facteur numérique près; elle touche (y) si l'on a $f(y)h(y)=0$; d'ailleurs si $h(y)=0$, elle représente deux fois l'élément (z) correspondant à (y) sur h.

Supposons maintenant (ξ) donné; l'équation $p(y,\xi)=0$ définit une série quadratique en (y). C'est le lieu des éléments dont la première polaire touche (ξ); c'est aussi l'enveloppe des secondes

polaires des différents éléments de (ξ); c'est aussi le lieu des pôles de (ξ) par rapport aux premières polaires des différents éléments de (ξ), car, en cherchant ce lieu, on est conduit aux mêmes calculs que précédemment, à cause de l'identité des dérivées partielles de a_{x^2y} et a_{xy^2} par rapport aux (x) et aux (y). On démontre aisément, d'après les propriétés des polaires et celles du hessien d'une forme cubique binaire, que les éléments communs à (ξ) et à la série $p(y, \xi) = 0$ forment un rapport équianharmonique avec les éléments communs à (ξ) et à f.

De plus, il est visible que la série $p(y, \xi) = 0$ touche la hessienne h en trois éléments qui correspondent aux éléments communs à (ξ) et h, puisqu'elle ne peut avoir avec h d'autres éléments communs que ceux dont la première polaire a un élément double appartenant à (ξ).

Si les éléments (y), (z), (t) sont alignés et appartiennent à f, et s'il en est de même de (y), (z'), (t'); si, de plus, (u) et (u') sont les éléments communs à la première polaire de (y) et à (zt) et $(z't')$, la propriété de cette polaire, quand (y) appartient à f, montre tout de suite que (zz'), (tt'), (uu') sont trois éléments alignés en (v) par exemple, et que les deux premiers sont conjugués harmoniques par rapport au troisième et à (yv). Cette propriété subsiste si les éléments (zt) et $(z't')$ viennent à se confondre et fournit un théorème facile à énoncer. Appliquant ce théorème et regardant $p(y, \xi) = 0$ comme le lieu des pôles de (ξ) par rapport aux premières polaires des éléments de (ξ), et aussi comme l'enveloppe des secondes polaires de ces éléments, on voit que cette série touche les éléments tangents (τ), (τ'), (τ'') à f suivant les éléments communs (t), (t'), (t'') à f et à (ξ), et que l'élément de contact avec (τ), par exemple, est conjugué harmonique de (t) par rapport à (τ') et (τ'').

Le discriminant de $p(y, \xi)$ par rapport aux (y) est $\gamma^2(\xi)$: d'ailleurs, si (ξ) appartient à la cayleyenne γ, (ξ) constitue avec un autre élément (γ_1) la première polaire d'un élément (z), que contiendra la seconde polaire de tout élément de (ξ). La condition pour que l'élément (ξ) touche la série $p(y, \xi) = 0$ est évidemment $\varphi(\xi) = 0$.

305. Considérons la forme $p(y, \xi)$ où (y) est donné, et la

forme analogue $q(y, \xi)$ relative à h; ces deux formes quadratiques

$$p(y, \xi) = p_{11}\xi_1^2 + \ldots + 2p_{23}\xi_2\xi_3 + \ldots,$$
$$q(y, \xi) = q_{11}\xi_1^2 + \ldots + 2q_{23}\xi_2\xi_3 + \ldots,$$

ont un invariant simultané

$$(p_{22}q_{33} + p_{33}q_{22} - 2p_{23}q_{23})x_1^2 + \ldots;$$

si, dans cet invariant, on fait les (y) égaux aux (x), on obtient un invariant du sixième degré par rapport aux (x), plus simple que les formes tangentielles de γ et ε.

Si l'on appelle k cet invariant, on trouve à un facteur près

$$\begin{aligned} k = {} & 3a^3(a_1a_2a_3 + 2a^3)(a_1^2x_1^6 + a_2^2x_2^6 + a_3^2x_3^6) \\ & + [6a^3(a_1a_2a_3 + 2a^3) - (a_1a_2a_3 + 8a^3)^2](a_2a_3x_2^3x_3^3 + a_3a_1x_3^3x_1^3 + a_1a_2x_1^3x_2^3 \\ & - aj(a_1x_1^3 + a_2x_2^3 + a_3x_3^3)x_1x_2x_3 - 3a^2jx_1^2x_2^2x_3^2. \end{aligned}$$

Pour définir complètement k, ajoutons que l'on a

$$K^6(k, \varphi) = \frac{3}{10}j^2 + 32i^3.$$

306. On peut choisir comme invariants fondamentaux i, j, f, h, k, γ, ε, φ.

Pour abréger l'écriture, soit

$$\Lambda = a_1a_2a_3;$$

$$l = a_1x_1^3 + a_2x_2^3 + a_3x_3^3,$$
$$m = a_2a_3x_2^3x_3^3 + a_3a_1x_3^3x_1^3 + a_1a_2x_1^3x_2^3,$$
$$n = x_1x_2x_3;$$

$$\lambda = a_2a_3\xi_1^3 + a_3a_1\xi_2^3 + a_1a_2\xi_3^3,$$
$$\mu = a_1\xi_2^3\xi_3^3 + a_2\xi_3^3\xi_1^3 + a_3\xi_1^3\xi_2^3,$$
$$\nu = \xi_1\xi_2\xi_3;$$

on a

$$i = a(\Lambda - a^3), \qquad j = \Lambda^2 - 20\Lambda a^3 - 8a^6;$$

$$f = l + 6an,$$
$$h = -a^2l + (\Lambda + 2a^3)n,$$
$$k = 3a^3(\Lambda + 2a^3)l^2 - ajln - 3a^2jn^2 - (\Lambda + 8a^3)^2m;$$

$$\gamma = a\lambda + (\Lambda - 4a^3)\nu,$$
$$\varepsilon = (\Lambda - 10a^3)\lambda - 6a^2(5\Lambda + 4a^3)\nu,$$
$$\varphi = \lambda^2 - 24a^2\lambda\nu - 24a(\Lambda + 2a^3)\nu^2 - 4(\Lambda + 8a^3)\mu.$$

A ces invariants nous pouvons joindre les jacobiens r et ρ des formes f, h, k et γ, ε, φ. On a exactement

$$r = -\frac{1}{6}(A + 8a^3)^3(a_2x_2^3 - a_3x_3^3)(a_3x_3^3 - a_1x_1^3)(a_1x_1^3 - a_2x_2^3),$$

$$\rho = -\frac{2}{3}(A + 8a^3)^3(a_2\xi_3^3 - a_3\xi_2^3)(a_3\xi_1^3 - a_1\xi_3^3)(a_1\xi_2^3 - a_2\xi_1^3).$$

Donc les équations $r = 0$ et $\rho = 0$ représentent les polaires harmoniques des éléments inflexionnels de f, et ces éléments eux-mêmes.

Les carrés de r et ρ s'expriment aisément en fonction des invariants fondamentaux; en effet, on peut regarder $a_1x_1^3$, $a_2x_2^3$, $a_3x_3^3$ comme les racines de l'équation

$$X^3 - lX^2 + mX - An^3 = 0,$$

et l, m, n s'expriment à l'aide de f, h, k.

De même $a_2a_3\xi_1^3$, $a_3a_1\xi_2^3$, $a_1a_2\xi_3^3$ sont racines de l'équation

$$X^3 - \lambda X^2 + A\mu X - A^2\nu^3 = 0.$$

Nous reviendrons d'ailleurs sur cette question un peu plus loin.

307. Les séries f, h, γ, ε mènent, par des procédés analogues aux précédents, à bien d'autres invariants qui s'expriment à l'aide des invariants fondamentaux; c'est ainsi que l'on peut chercher le lieu des éléments dont la polaire linéaire par rapport à f ou h est tangente à la polaire quadratique du même élément par rapport à h ou f, etc.

Cherchons encore, pour montrer l'usage des invariants, l'équation des éléments tangents stationnaires (τ_1) à f.

On trouve sans peine, en se servant des formules canoniques, que ceux de ces éléments qui correspondent aux éléments inflexionnels pour lesquels $x_1 = 0$, ont pour équation

$$f - \frac{A + 8a^3}{A} a_1x_1^3 = 0.$$

L'équation cherchée est donc

$$f^3 - \frac{A + 8a^3}{A} f^2 l + \frac{(A + 8a^3)^2}{A^2} fm - \frac{(A + 8a^3)^3}{A^2} n^3 = 0.$$

ou, en remplaçant l, m, n par leurs valeurs,

$$5if^2h - h^3 - fk = 0.$$

La série h touchant les éléments (γ_1), on voit par cette équation qu'il en est de même de la série $k=0$, et suivant les mêmes éléments.

On formerait de même l'équation des éléments tangents stationnaires de γ; et ainsi de suite.

IV. — La réduction à la forme canonique.

308. La connaissance des invariants fondamentaux d'une forme cubique f permet sa réduction à la forme canonique d'une façon simple.

Nous garderons les notations précédentes pour la forme canonique, et nous prendrons les mêmes lettres affectées de l'indice zéro pour désigner les invariants correspondants, tels que le calcul les donne directement en partant de la forme donnée f_0.

On a d'abord

$$\frac{i_0^3}{j_0^2} = \frac{a^3(\Lambda - a^3)^3}{(\Lambda^2 - 20\Lambda a^3 - 8a^6)^2},$$

d'où, posant

$$\frac{\Lambda}{a^3} = \rho,$$

l'équation en ρ

$$\frac{i_0^3}{j_0^2} = \frac{(\rho - 1)^3}{(\rho^2 - 20\rho - 8)^2}.$$

Faisant $\frac{j_0^2}{i_0^3} = J^2$, et prenant arbitrairement la détermination de J, une fois pour toutes, puis remplaçant ρ par $1 + \frac{1}{\lambda^2}$, on est amené à l'équation biquadratique

$$27\lambda^4 + 18\lambda^2 + J\lambda - 1 = 0.$$

Si i' et j' sont les invariants du premier membre de cette équation considéré comme forme binaire, après rétablissement de l'homogénéité, on a

$$i' = 0, \qquad j' = -\frac{27}{16}(J^2 + 64)$$

la résolution est alors immédiate, et donne

$$\lambda = \frac{1}{6}\left[\sqrt{-4+\sqrt[3]{J^2+64}}+\sqrt{-4+\omega\sqrt[3]{J^2+64}}+\sqrt{-4+\omega^2\sqrt[3]{J^2+64}}\right],$$

ω étant une racine cubique imaginaire de l'unité, et les trois radicaux carrés ayant pour produit $-J$.

Les formules canoniques donnent

$$l = \frac{(A+2a^3)f-6ah}{A+8a^3}, \qquad n = \frac{a^2f+h}{A+8a^3},$$

$$m = \frac{a^3(2A+a^3)f^2-a(A+2a^3)h+3a^2h^2-k}{(A+8a^3)^2};$$

de plus, si δ est le déterminant de la substitution qui permet de passer des $(x^{(0)})$ aux (x'), on a

$$f=f_0, \qquad h=\delta^2 h_0, \qquad k=\delta^4 k_0, \qquad i=\delta^4 i_0, \qquad j=\delta^6 j_0;$$

on en tire

$$\delta^2 = a^2\frac{i_0 J}{j_0\lambda},$$

et, par suite,

$$l = \frac{3\lambda^2+1}{9\lambda^2+1}f_0-\frac{6\lambda}{9\lambda^2+1}\frac{i_0 J}{j_0}h_0,$$

$$A n^3 = \frac{\lambda(\lambda^2+1)}{(9\lambda^2+1)^3}\left(\lambda f_0+\frac{i_0 J}{j_0}h_0\right)^3,$$

$$m = \frac{\lambda^2(3\lambda^2+2)}{(9\lambda^2+1)^2}f_0^2-\frac{\lambda(3\lambda^2+1)}{(9\lambda^2+1)^2}\frac{i_0 J}{j_0}f_0 h_0$$
$$+\frac{3\lambda^2}{(9\lambda^2+1)^2}\frac{h_0^2}{i_0}-\frac{\lambda}{(9\lambda^2+1)^2}\frac{J k_0}{j_0}.$$

Les quantités $a_i x_i^3$ sont les racines de l'équation

$$X^3-lX^2+mX-An^3=0;$$

si l'on trouve

$$a_i x_i^3 = l_i(x^0),$$

on aura, pour déterminer x_i,

$$x_i\sqrt[3]{a_i} = \frac{D^2_{x^{(0)}y^{(0)}}\, l_i(x^{(0)})}{[l_i(y_0)]^{\frac{2}{3}}};$$

les a_i sont arbitraires, et l'on a

$$f = a_1x_1^3+a_2x_2^3+a_3x_3^3+6\sqrt[3]{\frac{a_1a_2a_3\lambda^2}{\lambda^2+1}}\,x_1x_2x_3;$$

pour lever toute ambiguïté, on remarque d'ailleurs que l'on a, à cause de l'expression de n,

$$a x_1 x_2 x_3 = \frac{\lambda}{9\lambda^2+1}\left(\lambda f_0 + \frac{i_0 J}{j_0} h_0\right).$$

Pour résoudre l'équation en X, on observera que son discriminant n'est autre chose que

$$\frac{1}{27}(a_2 x_2^3 - a_3 x_3^3)^2 (a_3 x_3^3 - a_1 x_1^3)^2 (a_1 x_1^3 - a_2 x_2^3)^2.$$

c'est-à-dire

$$\frac{4}{3}\frac{r^2}{(\Lambda + 8a^3)^6},$$

ou bien

$$\frac{4}{3} r_0^2 \left(\frac{i_0 J}{j_0 \lambda}\right)^9 \frac{a^{18}}{(\Lambda + 8a^3)^6} = \frac{4}{3}\frac{J}{i_0^3 j_0}\frac{\lambda^3}{(9\lambda^2+1)^6} r_0^2.$$

Par suite, il n'y aura pas de racine carrée à extraire pour résoudre l'équation proposée; on aura seulement à extraire les racines cubiques de deux formes du neuvième degré qui seront des cubes parfaits, et ceci se fera sans difficulté.

L'équation en λ étant du quatrième degré, on voit bien qu'il y a quatre façons distinctes de réduire la forme f à la forme canonique.

Les invariants γ, ε, φ et ρ permettraient de calculer les ξ_i de la même façon.

V. — Le faisceau (f, h).

309. Considérons toutes les séries cubiques d'équation

$$\lambda_1 \sqrt{i} f + \lambda_2 h = 0,$$

où $\sqrt{i} = \frac{j}{iJ}$. Ce sont toutes les séries qui contiennent les éléments inflexionnels de f : comme elles sont réduites à la forme canonique en même temps que f, elles ont mêmes éléments inflexionnels et mêmes polaires harmoniques que f.

Calculons les invariants de la série (λ) du faisceau que nous venons de définir, et d'abord son discriminant. C'est

$$\frac{1}{27^3} i^5 (64 i^3 + j^2)(27\lambda_1^4 + 18\lambda_1^2\lambda_2^2 + J\lambda_1\lambda_2^3 - \lambda_2^4)^3.$$

La forme binaire en λ_1, λ_2 qui figure dans cette expression a été déjà rencontrée : égalée à zéro, c'est l'équation canonisante. Nous ferons

$$\psi(\lambda) = 27\lambda_1^4 + 18\lambda_1^2\lambda_2^2 + J\lambda_1\lambda_2^3 - \lambda_2^4 :$$

pour cette forme biquadratique, les invariants sont, avec les notations du n° 92 affectées de l'indice ψ.

$$i_\psi = 0, \qquad j_\psi = -\frac{27}{16}(64 + J^2),$$

$$H_\psi = 81\lambda_1^4 + \frac{27J}{2}\lambda_1^3\lambda_2 - 54\lambda_1^2\lambda_2^2 - \frac{3}{2}J\lambda_1\lambda_2^3 - \left(3 + \frac{J^2}{16}\right)\lambda_2^4,$$

$$J_\psi = \frac{729}{4}J\lambda_1^6 - 2916\lambda_1^5\lambda_2 - \frac{1215}{4}J\lambda_1^4\lambda_2^2 - \frac{135}{8}J^2\lambda_1^3\lambda_2^3$$
$$+ \frac{135}{4}J\lambda_1^2\lambda_2^4 - \left(108 + \frac{9J^2}{16}\right)\lambda_1\lambda_2^5 - \left(\frac{9J}{4} + \frac{J^3}{32}\right)\lambda_2^6;$$

de plus, nous ferons

$$\psi_1 = \frac{1}{4}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda_1} = 27\lambda_1^3 + 9\lambda_1\lambda_2^2 + \frac{J}{4}\lambda_2^3,$$

$$\psi_2 = \frac{1}{4}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda_2} = 9\lambda_1^2\lambda_2 + \frac{3}{4}J\lambda_1\lambda_2^2 - \lambda_2^3.$$

Nous aurons alors, en marquant les invariants relatifs à la série (λ) par l'indice λ,

$$i_\lambda = \frac{i^3}{81}H_\psi, \qquad j_\lambda = \frac{4}{729}i^4\sqrt{i}\,J_\psi,$$

$$h_\lambda = -\frac{i\sqrt{i}}{27}(\psi_2\sqrt{i}f - \psi_1 h),$$

$$\gamma_\lambda = \frac{i}{54}\left[(54\lambda_1^3 - 18\lambda_1\lambda_2^2 - J\lambda_2^3)\sqrt{i}\gamma + (9\lambda_1^2\lambda_2 + \lambda_2^3)\varepsilon\right].$$

Cette dernière formule permet en particulier de calculer ε quand $i = 0$, après remplacement de $\lambda_1\sqrt{i}$ par λ'_1.

On peut multiplier ces calculs et envisager de même le faisceau $\mu_1\sqrt{i}\gamma + \mu_2\varepsilon$; nous y ajouterons seulement les invariants de γ et la cayleyenne g de γ, soit

$$i_\gamma = \frac{1}{1296}(192i^3 - j^2), \qquad j_\gamma = -\frac{j}{5832}(576i^3 + j^2),$$

$$g = \frac{4i^2}{27}f - \frac{j}{54}h.$$

310. Les formules précédentes nous montrent que dans le

faisceau (f, h) il y a quatre séries qui se décomposent en trois éléments : ce sont celles qui sont formées par les quatre suites triples d'éléments inflexionnels ; et ces quatre séries ont un rapport équianharmonique, c'est-à-dire que les quatre axes inflexionnels, qui contiennent un même élément inflexionnel, ont un tel rapport. Il y a aussi quatre séries équianharmoniques, c'est-à-dire pour lesquelles l'invariant i est nul, et de même six séries harmoniques : leurs éléments tangents en un élément inflexionnel sont faciles à définir. Chaque série du faisceau est la hessienne de trois autres ; par exemple, f est la hessienne des trois séries définies par

$$27\lambda_1^3 + 9\lambda_1\lambda_2^2 + \frac{J}{4}\lambda_2^3 = 0,$$

en particulier de h si $j = 0$.

De même, chaque série du faisceau (γ, ε) est la cayleyenne de trois séries du faisceau (f, h).

Si $j = 0$, les séries h et γ sont harmoniques comme f.

Si $i = 0$, les formules précédentes deviennent illusoires, mais il est facile de les transformer de façon qu'il n'en soit plus ainsi : dans ce cas, la forme f peut se réduire à une somme de trois cubes ; h et γ se décomposent.

311. Étant donné un réseau de séries quadratiques, on peut le regarder, en général, comme formé des polaires quadratiques des éléments (y) par rapport à une certaine série cubique f : car, pour déterminer cette série f, on a autant d'équations du premier degré que d'inconnues. On peut facilement obtenir cette série f de la façon suivante : on calcule d'abord la jacobienne et la cayleyenne du réseau par les formules précises données antérieurement ; ce seront la hessienne h et la cayleyenne γ de f ; leurs invariants donnent

$$i_h = -\left(\frac{i^3}{27} + \frac{j^2}{1296}\right), \qquad j_h = -j\left(\frac{i^3}{81} + \frac{j^2}{5832}\right),$$

$$i_\gamma = \frac{4i^3}{27} - \frac{j^2}{1296}, \qquad j_\gamma = -j\left(\frac{8i^3}{81} + \frac{j^2}{5832}\right).$$

Ces formules donnent i^3 et j surabondamment ; enfin, on calculera la cayleyenne g de γ, ou la hessienne h_h de h, et l'on aura

$$f = \frac{27g}{4i^2} + \frac{jh}{8i^2} = \frac{27h_h}{i^2} - \frac{jh}{4i^2}.$$

Ceci tombe en défaut quand la quantité i calculée directement est nulle; en effet, dans ce cas, le réseau conjugué du réseau donné admet un élément double, et les séries considérées ne peuvent être regardées, en général, comme les polaires quadratiques relatives à une série cubique f. Mais nous laisserons ici de côté l'étude des divers cas particuliers.

Si l'on connaît la jacobienne ou la cayleyenne seulement d'un réseau, il y a trois réseaux correspondants, puisque la série connue est hessienne ou cayleyenne pour trois séries.

Si l'on connaît la jacobienne et la cayleyenne, mais sans connaître le réseau, il faudra multiplier le premier membre de la série cayleyenne, par exemple, par un facteur ρ inconnu, afin d'être ramené au cas précédent. Le fait que les valeurs de i_h, i_γ, j_h, j_γ déterminent j et i^3 permettra de calculer ce facteur, ou au moins son carré; pour avoir son signe, on pourra se servir de l'identité

$$g = 4h_h - \frac{jh}{18}.$$

En particulier, on pourra ainsi chercher la série cubique dont les premières polaires forment le réseau conjugué du réseau des premières polaires de f, et l'on trouvera pour son équation

$$3j\gamma - 4i\varepsilon = 0.$$

VI. — Théorèmes généraux sur les séries cubiques.

312. Nous avons déjà dit qu'une série cubique était la jacobienne de trois réseaux de séries quadratiques. Il y a donc trois systèmes d'éléments correspondants sur la série donnée.

On peut les obtenir ainsi : par un élément A de f, on peut mener à f quatre éléments tangents, dont les éléments de contact sont A_1, A_2, A_3, A_4 : si l'on regarde A_1 et A_2 comme correspondants, il en sera de même de A_3 et A_4 ; et l'on voit qu'il y a trois façons de réaliser cette distribution. Alors A correspond lui-même à l'élément commun à A_1A_2 et A_3A_4, élément appartenant à f, comme l'on sait. Si A est inflexionnel, A_1, par exemple, coïncide avec A. D'une façon générale les propriétés indiquées au Chapitre précédent se transporteront immédiatement au cas pré-

sent. Trois couples d'éléments correspondants déterminent le réseau et par suite la jacobienne de ce réseau.

Si la série donnée a un élément double, elle est la jacobienne d'un seul réseau : il n'y a plus qu'un seul mode de correspondance évident sur la série.

313. Un théorème fondamental de la théorie des séries cubiques est le suivant : toutes les séries cubiques qui ont huit éléments communs en ont un neuvième; car si f_1 et f_2 sont deux séries contenant les huit éléments donnés, toutes celles qui les contiennent sont de la forme $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$.

En appliquant ce théorème à une suite de six éléments inscrite à une série quadratique, on démontre immédiatement le théorème de Pascal : il suffit de considérer les deux séries cubiques formées par les éléments de seconde espèce de la suite pris de deux en deux, et celle formée par la série quadratique donnée et la série linéaire contenant deux des éléments déterminés par les éléments de seconde espèce de la suite, pris de trois en trois.

Voici d'autres applications. Si (x), (x'), (x'') appartiennent à f et à (ξ); si (y), (y'), (y'') appartiennent à f et à (η); si (xy), $(x'y')$, $(x''y'')$, ont encore en commun (z), (z'), (z'') avec f, ces trois derniers éléments sont alignés sur un même élément (ζ) : il suffit, pour le voir, d'envisager la série cubique f, celle formée par (xy), $(x'y')$, $(x''y'')$ et celle formée par (ξ), (η) et (zz').

Si (θ), (θ'), (θ'') sont les éléments (xy), $(x'y')$, $(x''y'')$, l'équation de f peut s'écrire

$$\lambda(\xi \mid x)(\eta \mid x)(\zeta \mid x) + \mu(\theta \mid x)(\theta' \mid x)(\theta'' \mid x) = 0.$$

Ce théorème subsiste si (ξ) et (η) sont confondus; alors (xy) devient l'élément tangent en (x), et (z) est dit *tangentiel* de (x); si donc (x), (x'), (x'') sont alignés sur (ξ), leurs éléments tangentiels (z), (z'), (z'') sont alignés sur (ζ), et (ζ) est dit *tangentiel* de (ξ).

Si (x) et (x') sont inflexionnels, il faut que (x'') le soit aussi; c'est une proposition connue.

314. (y) appartenant à f, cherchons son élément tangentiel (x). Supposons que f soit la hessienne d'une série f', et

que (z) corresponde alors à (y) sur f; (x) appartient à l'élément tangent à f en (z), qui, comme on sait, est la polaire linéaire de (y) par rapport à f'; mais f' appartient au faisceau (f, h); donc (x) est commun aux polaires linéaires de (y) par rapport à f et h; l'équation de (x) est le jacobien de $f(y)$, $h(y)$ et $(\xi|y)$ égalé à zéro. Si (y) est quelconque, la même équation représente l'élément tangentiel de (y) dans la série du faisceau (f, h) qui contient (y).

Cherchons maintenant l'élément tangentiel d'un élément donné (η). Nous le trouverons en cherchant plus généralement le lieu de l'élément commun aux polaires linéaires de (y) par rapport à f et h, quand (y) appartient à (η). Cela revient à chercher l'équation des éléments communs aux deux séries quadratiques en (y)

$$a_1 x_1 y_1^2 - a_2 x_2 y_2^2 + a_3 x_3 y_3^2 = 0,$$
$$2 x_1 y_2 y_3 + 2 x_2 y_3 y_1 + 2 x_3 y_1 y_2 = 0,$$

ce qui donne

$$(a_2 a_3 x_2 x_3 \eta_1^2 + \ldots)(x_1^2 \eta_1^2 + \ldots - 2 x_2 x_3 \eta_2 \eta_3 - \ldots) + (a_1 x_1^2 \eta_2 \eta_3 + \ldots)^2 = 0,$$

ou bien

$$\begin{aligned}(a_1 x_1 \eta_1^2 \eta_3^2 + \ldots)(a_1 x_1^3 + a_2 x_2^3 + a_3 x_3^3)\\ + x_1 x_2 x_3 [x_1 \eta_1 (a_2 a_3 \eta_1^3 - 2 a_3 a_1 \eta_2^3 - 2 a_1 a_2 \eta_3^3) + \ldots] = 0.\end{aligned}$$

Donc l'équation de l'élément tangentiel de (η) par rapport à f est

$$6a(a_1 x_1 \eta_2^2 \eta_3^2 + \ldots) + x_1 \eta_1 (-a_2 a_3 \eta_1^3 + 2 a_3 a_1 \eta_2^3 + 2 a_1 a_2 \eta_3^3) + \ldots = 0.$$

Si l'on forme, en appelant t le premier membre de cette équation, la fonction $K^1(t, \gamma)$, on trouve, en remplaçant les (η) par les (ξ),

$$\frac{\gamma\xi - 2 i \varphi}{\Lambda + 8a^3};$$

le produit $t(\Lambda + 8a^3)$ est donc un invariant.

315. Considérons une série quadratique variable g ayant en commun avec f quatre éléments A_1, A_2, A_3, A_4, fixes, et deux autres B_1 et B_2 variables; $B_1 B_2$ a avec f un nouvel élément commun C qui est fixe, comme on le voit en considérant la série cubique f et celles qui sont formées par deux séries g et les éléments B_1, B_2 correspondants.

Si la série quadratique g touche f en trois éléments A_1, A_2 A_3, les éléments tangentiels correspondants T_1, T_2, T_3 sont alignés, comme on le voit en considérant la série cubique f, celle formée par les $A_i T_i$, et celle formée par g et $T_1 T_2$.

Si donc on se donne A_2 et A_3, T_1 est déterminé, et A_1 est l'un des quatre éléments de contact des éléments tangents à f contenant T_1; toutefois l'un de ces éléments est aligné avec A_2 et A_3, et ne donne pas de solution proprement dite : il y a donc trois systèmes de séries quadratiques triplement tangentes à f.

Ces trois systèmes sont, d'après le n° 304, les séries $p(y, \xi)$ relatives aux trois séries cubiques dont f est la hessienne.

Si la série quadratique g a un contact du second ordre avec f en A_1 et A_2, et si $A_1 A_2$ a encore en commun avec f l'élément B, celui-ci est inflexionnel, comme on le voit en considérant la série cubique f, celle composée de $A_1 A_2$ trois fois, et celle composée de g et de l'élément tangent à f en B. Si donc on se donne A_1, il lui correspond neuf positions différentes de A_2; il y a neuf systèmes de séries quadratiques doublement osculatrices à f.

Si A_1 et A_2 se confondent, la série g a un contact du cinquième ordre avec f; il y a vingt-sept telles séries, et les éléments de contact A_1 sont les éléments communs à f et à ses neuf polaires harmoniques.

Les résultats que nous venons d'obtenir subissent des modifications évidentes, si la série f a un élément multiple.

316. Le théorème fondamental qui nous a guidés dans les numéros précédents peut se généraliser. Nous savons en effet (160) que, parmi les $3p$ éléments communs à la série cubique f et à une série de degré p, on peut en regarder un comme déterminé par les autres, de sorte que toutes les séries de degré p qui contiennent $3p - 1$ éléments fixes de f, en contiennent encore un autre qui est fixe.

En appliquant convenablement ce théorème, on verra, par exemple, que les six éléments tangentiels des éléments communs à f et à une série quadratique appartiennent eux-mêmes à une même série quadratique; que, par suite, si g est une conique triplement tangente à f en A_1, A_2, A_3 et si une série quadratique quelconque contenant A_1, A_2, A_3 a encore B_1, B_2, B_3, communs

avec f, il existe une série quadratique triplement tangente à f en B_1, B_2, B_3; etc.

317. On peut rattacher l'étude de la série cubique à celle de la forme bilinéaire à deux séries de variables binaires.

Si

$$g = a_{11}\lambda_1\mu_1 + a_{12}\lambda_1\mu_2 + a_{21}\lambda_2\mu_1 + a_{22}\lambda_2\mu_2$$

est la forme donnée, il suffit d'imaginer, par exemple, que les (λ) définissent les séries quadratiques d'un faisceau

$$\lambda_1 h + \lambda_2 k = 0,$$

h et k étant deux formes quadratiques ternaires; et que les (μ) définissent les éléments de seconde espèce d'un faisceau

$$\mu_1(\eta \mid x) + \mu_2(\zeta \mid x) = 0.$$

En cherchant le lieu des éléments communs aux séries (λ) et (μ), quand on suppose $g = 0$, on trouve une série cubique, la plus générale de son espèce. Ceci correspond à ce que nous avons dit au commencement du n° 315.

Nous n'insisterons pas sur cette façon d'envisager une série cubique.

318. On peut encore rattacher l'étude de la série cubique à celle d'une forme doublement quadratique à deux séries de variables linéaires, $g(\lambda, \mu) = 0$.

A cet effet, on considérera les deux faisceaux de séries linéaires

$$\lambda_1(\eta \mid x) + \lambda_2(\zeta \mid x) = 0, \qquad \mu_1(\theta \mid x) + \mu_2(\varkappa \mid x) = 0,$$

et l'on cherchera le lieu de l'élément commun aux séries (λ) et (μ), sous la condition $g = 0$, en supposant que l'élément défini par $(\eta\zeta)$ et $(\theta\varkappa)$ se corresponde à lui-même dans les deux faisceaux en vertu de $g = 0$.

La série cubique ainsi obtenue contient $(\eta\zeta)$ et $(\theta\varkappa)$.

Inversement, prenons sur une série cubique f deux éléments fixes et un élément variable; les éléments définis par les deux éléments fixes et l'élément variable sont liés manifestement par une relation doublement quadratique.

Supposons que les éléments fondamentaux O_2 et O_3 soient les

deux éléments fixes, et que Ω_3 et Ω_2 soient les éléments tangents correspondants, de sorte que

$$f = a_1 x_1^3 + 3 a_{23} x_2^2 x_3 + 3 a_{32} x_3^2 x_2 + 3 a_{13} x_1^2 x_3 + 3 a_{12} x_1^2 x_2 + 6 a x_1 x_2 x_3;$$

écrivons que $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_3 = 0$ et $\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 = 0$ ont en commun un élément de f; il vient

$$\begin{aligned} 0 = g = 3(a_{32}\lambda_1^2\mu_1\mu_2 + a_{23}\lambda_1\lambda_2\mu_1^2) + 3(a_{13}\lambda_1\lambda_2\mu_2^2 + a_{12}\lambda_2^2\mu_1\mu_2) \\ - 6a\lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2 - a_1\lambda_2^2\mu_2^2. \end{aligned}$$

Le théorème relatif à la constance du rapport anharmonique des quatre éléments tangents à f contenant un élément donné de f, résulte alors immédiatement des propriétés de la forme doublement quadratique.

Sans insister davantage, remarquons que l'on peut appliquer la théorie des nos 110, 111 et 112 à cette représentation. Si l'on considère, comme au no 112, la relation doublement quadratique symétrique qui lie les deux valeurs de (λ) correspondant à une même valeur de (μ), l'invariant ω_n du no 110, relatif à cette forme, égalé à zéro, exprime que l'on peut trouver une suite proprement dite de $2n + 2$ éléments, inscrite à f, et telle que les éléments de seconde espèce de cette suite, pris de deux en deux, contiennent les uns l'élément O_2, les autres O_3.

Il y a alors une infinité simple de telles suites.

Si $n = 1$, la forme dont nous venons de parler doit être un carré parfait, pour qu'il existe des suites de quatre éléments jouissant de la propriété précédente. Donc il faut que l'invariant i_3 de la forme g soit nul; or, ici,

$$i_3 = \frac{9}{4} a_1 a_{23} a_{32};$$

la condition $i_3 = 0$ revient donc, en supposant que O_2 ou O_3 n'est pas multiple pour f, à $a_1 = 0$; les éléments tangents à f en O_2 et O_3 ont en commun un nouvel élément de f : O_2 et O_3 sont correspondants sur f, comme il était facile de le prévoir.

Si O_2 et O_3 sont inflexionnels, on vérifie sans peine que $\omega_2 = 0$.

319. Envisageons une suite de $2n$ éléments, $A_1 B_1 A_2 B_2 \ldots A_n B_n$, inscrite à f et telle que $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, ... d'une part, $B_1 A_2$, $B_2 A_3$, ... d'autre part, contiennent deux éléments fixes de f, C_1 et C_n. Il

est facile de voir que, de même, les éléments A_1B_k, A_2B_{k+1}, A_3B_{k+2}, ... contiennent un élément fixe C_k de f : en effet, la série cubique f, celle formée par A_1B_k, $B_1A_2C_n$, $A_{k+1}B_{k+1}C_1$, et celle formée par A_2B_{k+1}, $A_1B_1C_1$, $B_kA_{k+1}C_n$ ont en commun huit éléments et, par suite, un neuvième élément qui est précisément C_k.

Si nous disons de deux éléments tels que C_1 et C_n qu'ils sont correspondants pour le nombre n, on voit tout de suite que deux quelconques des éléments C_i sont aussi correspondants pour le nombre n ou l'un de ses diviseurs : s'il s'agit de C_h et de C_k par exemple, il suffit, pour vérifier l'assertion précédente, d'envisager la suite $A_1B_hA_{h-k+1}B_{2h-k}A_{2h-2k+1}B_{3h-k}\ldots$, chaque indice étant remplacé par son plus petit reste positif par rapport à n. On verra aussi que les A_i ou les B_i jouent par rapport aux B_i et C_i ou A_i et C_i le même rôle que les C_i par rapport aux A_i et B_i.

Si A_1 et B_1, A_2 et B_2 sont deux couples d'éléments correspondants pour le nombre n, et si A_1A_2, B_1B_2 ont encore A_3 et B_3 communs avec f, A_3 et B_3 forment aussi un couple d'éléments correspondants pour le nombre n ou l'un de ses diviseurs. Considérons, en effet, une suite $C_1D_1C_2D_2C_3D_3\ldots$ correspondant au premier couple, et une suite $C'_1D'_1C'_2D'_2C'_3D'_3\ldots$ correspondant au second couple; soient C''_i et D''_i les troisièmes éléments communs à f et à $C_iC'_i$ et $D_iD'_i$, et envisageons la suite $C''_1D''_1C''_2D''_2C''_3D''_3\ldots$; d'après un théorème connu, les éléments $C''_1D''_1$, $C''_2D''_2$, ... d'une part, $D''_1C''_2$, $D''_2C''_3$, ... contiendront respectivement A_3 et B_3, ce qui démontre la proposition. En particulier, on peut supposer que A_2 et B_2 coïncident en un élément quelconque de f.

On peut supposer encore que A_1 et A_2 coïncident ainsi que B_1 et B_2. Réciproquement, on démontrera alors d'une façon analogue que si A_1 et B_1 sont correspondants pour le nombre n, et sont les éléments tangentiels de A_2 et B_2, ceux-ci sont eux-mêmes correspondants pour le nombre $2n$ ou l'un de ses diviseurs.

VII. — Les séries cubiques rationnelles.

320. Les propriétés générales des séries cubiques s'appliquent encore avec des modifications évidentes, qu'il est inutile de dé-

tailler, aux séries particulières douées d'un élément multiple, ou séries rationnelles.

Nous allons insister sur les propriétés particulières à ces séries. Si d'abord il s'agit d'une série cubique avec élément double ordinaire, à éléments tangents distincts, on peut lui appliquer la forme canonique générale, avec $a_1 = 0$ par exemple. Si donc

$$f = a_2 x_2^3 + a_3 x_3^3 + 6 a x_1 x_2 x_3,$$

on aura

$$h = -a^2(a_2 x_2^3 + a_3 x_3^3) + 2 a^3 x_1 x_2 x_3,$$
$$\gamma = a a_2 a_3 \xi_1^3 - 4 a^3 \xi_1 \xi_2 \xi_3,$$
$$\varepsilon = -10 a^3 a_2 a_3 \xi_1^3 - 24 a^5 \xi_1 \xi_2 \xi_3,$$

$$i = -a^4, \qquad j = -8a^6.$$

La forme canonique est possible d'une seule façon.

Pour déterminer l'élément double, on remarquera la relation

$$3j\gamma - 4i\varepsilon = -64 a^7 a_2 a_3 \xi_1^3;$$

f est la hessienne d'une seule autre série cubique et, par suite, la jacobienne d'un seul réseau, etc.

Supposons maintenant que f soit une série à élément cuspidal. Une forme canonique immédiate est

$$f = a_1 x_1^3 + 3 a_{23} x_2^2 x_3;$$

O_3 est l'élément cuspidal, avec Ω_2 comme élément tangent; O_2 est l'élément inflexionnel, avec Ω_3 comme élément tangent. On a ici

$$h = -a_1 a_{23}^2 x_1 x_2^2, \qquad \gamma = a_1 a_{23}^2 \xi_1 \xi_3^2.$$
$$\varepsilon = 2 a_1^2 a_{23}^3 \xi_3^3; \qquad i = 0. \qquad j = 0.$$

f n'est la hessienne d'aucune série et, par suite, la jacobienne d'aucun réseau, etc.

321. D'après ce qui précède, $64 i^3 + j^2 = 0$ est la condition pour que f ait un élément multiple; $i = 0$ et $j = 0$ sont les deux conditions pour que cet élément multiple soit cuspidal.

Donnons encore les conditions invariantes qui expriment que la série f se décompose d'une façon déterminée.

Si f se compose d'une série quadratique et d'une série linéaire

non tangentes, la forme canonique générale subsiste avec

$$a_2 = a_3 = 0,$$

par exemple. On a

$$f = a_1 x_1^3 + 6 a x_1 x_2 x_3, \qquad h = -a^2 a_1 x_1^3 + 2 a^3 x_1 x_2 x_3;$$
$$\gamma = -4 a^3 \xi_1 \xi_2 \xi_3, \qquad \varepsilon = -24 a^5 \xi_1 \xi_2 \xi_3;$$
$$i = -a^4, \qquad j = -8 a^6.$$

L'invariant $3 j \gamma - 4 i \varepsilon$, ou plutôt ρ, ou encore r, est nul identiquement.

Si f se compose d'une série quadratique et d'une série linéaire tangentes, on peut prendre

$$f = 3 a_{21} x_1 x_2^2 + 3 a_{13} x^2 x_3,$$

et l'on a

$$h = -a_{21} a_{13}^2 x_1^3, \qquad \gamma = \frac{1}{2} a_{21}^2 a_{13} \xi_3^3, \qquad i = 0, \qquad j = 0.$$

L'invariant ε est nul identiquement.

Si f se décompose en trois éléments de seconde espèce non alignés, on peut encore appliquer la forme canonique générale :

$$f = 6 a x_1 x_2 x_3, \qquad h = 2 a^3 x_1 x_2 x_3, \qquad \gamma = -4 a^3 \xi_1 \xi_2 \xi_3,$$
$$\varepsilon = -24 a^5 \xi_1 \xi_2 \xi_3, \qquad i = -a^4, \qquad j = -8 a^6.$$

L'invariant $j f - 24 i h$, ou plutôt le jacobien de f, h et $(\xi | x)$, est nul identiquement.

Si f se décompose en trois éléments alignés, h est nul identiquement, comme on le vérifie sans peine ; si deux de ces éléments coïncident, φ est nul identiquement ; s'ils coïncident tous trois, la forme $p(y, \xi)$, définie antérieurement, est nulle identiquement.

322. Nous allons maintenant étudier la série cubique rationnelle définie par des formules de la forme

$$\rho x_i = f_i(\lambda_1, \lambda_2),$$

les f_i étant des formes cubiques binaires par rapport aux (λ) ; cette étude revient à celle de la forme

$$g = \xi_1 f_1(\lambda_1, \lambda_2) + \xi_2 f_2(\lambda_1, \lambda_2) + \xi_3 f_3(\lambda_1, \lambda_2).$$

Nous emploierons tout de suite une forme canonique de cette représentation, fournie par les formes canoniques du n° 320.

Si f a un élément double ordinaire, on fera

$$\rho x_1 = a(\lambda_1^3 + \lambda_2^3),$$
$$\rho x_2 = b\lambda_1^2\lambda_2,$$
$$\rho x_3 = c\lambda_1\lambda_2^2,$$

et alors, si l'on prend pour f le déterminant du neuvième ordre analogue à celui du n° 225, on aura

$$f = a^3c^3x_2^3 + a^3b^3x_3^3 - a^2b^2c^2x_1x_2x_3.$$

Si f a un élément cuspidal, on prendra

$$\rho x_1 = a\lambda_1^2\lambda_2,$$
$$\rho x_2 = b\lambda_1^3,$$
$$\rho x_3 = c\lambda_2^3,$$

et, comme plus haut,

$$f = b^3c^3x_1^3 - a^3bc^2x_2^2x_3.$$

Dans tous les cas, il est facile de calculer les coordonnées d'un élément tangent, ou celles de la série linéaire définie par deux éléments de f, ou deux éléments tangents à f. Si f a un élément cuspidal, on remarquera que la série tangentielle de f jouit des mêmes propriétés que f et, pour définir cette série, on aura les formules analogues aux précédentes :

$$\rho\xi_1 = bc\lambda_1\lambda_2^2,$$
$$\rho\xi_2 = -\frac{2}{3}ac\lambda_2^3,$$
$$\rho\xi_3 = -\frac{1}{3}ab\lambda_1^3.$$

On peut parler du rapport anharmonique de quatre éléments de f, ou des quatre éléments tangents correspondants : c'est celui des valeurs des (λ) qui définissent ces éléments, ou encore des séries linéaires alignées définies par ces quatre éléments et l'élément double, comme le montrent les formules.

Dans le cas où la série f a un élément cuspidal, c'est aussi le rapport anharmonique des quatre éléments définis par l'élément tangent stationnaire et les quatre éléments tangents à f correspondant aux éléments donnés.

On peut regarder l'élément double, quand il est ordinaire, comme la réunion de deux éléments simples, correspondant, en

employant les formules canoniques, à $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 0$. Ces deux éléments ont avec les éléments inflexionnels un rapport équianharmonique.

323. La forme g admet pour invariant multiple le déterminant

$$h = 9 \begin{vmatrix} \frac{1}{6}\frac{\partial^2 f_1}{\partial\lambda_1^2} & \frac{1}{6}\frac{\partial^2 f_1}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2} & \frac{1}{6}\frac{\partial^2 f_1}{\partial\lambda_2^2} \\ \frac{1}{6}\frac{\partial^2 f_2}{\partial\lambda_1^2} & \frac{1}{6}\frac{\partial^2 f_2}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2} & \frac{1}{6}\frac{\partial^2 f_2}{\partial\lambda_2^2} \\ \frac{1}{6}\frac{\partial^2 f_3}{\partial\lambda_1^2} & \frac{1}{6}\frac{\partial^2 f_3}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2} & \frac{1}{6}\frac{\partial^2 f_3}{\partial\lambda_2^2} \end{vmatrix};$$

pour les formules canoniques

$$h = abc(\lambda_1^3 + \lambda_2^3);$$

le discriminant de cette forme h en (λ), soit ici $-a^4b^4c^4$, est le seul invariant multiple proprement dit de la forme g. Les invariants de f s'expriment facilement en fonction de ce discriminant de h.

Le hessien de l'invariant h définit les valeurs de (λ) qui correspondent à l'élément double de f; l'invariant cubique de h définit les éléments de contact des éléments tangents à f contenant les éléments inflexionnels : ceci résulte immédiatement de ce qui suivra.

Dans le cas d'un élément cuspidal, on a

$$h = -3abc\lambda_1^2\lambda_2;$$

le discriminant de h est nul.

324. Cherchons la condition pour que trois éléments (λ), (μ), (ν) de f soient alignés; (λ), (μ), (ν) étant racines d'une équation telle que $g = 0$, on voit tout de suite, en se servant des formules canoniques, que l'on a

$$\lambda_1\mu_1\nu_1 + \lambda_2\mu_2\nu_2 = 0,$$

ou

$$\Sigma\lambda_1\mu_1\nu_2 = 0,$$

suivant que l'élément double est ordinaire ou cuspidal.

D'une façon générale, la condition cherchée est $h_{\lambda\mu\nu} = 0$, si h_{λ^3} est l'invariant h défini plus haut.

Si (μ) et (ν) coïncident, on a $h_{\lambda\mu^2} = 0$. Les éléments (μ) et (μ'), définis par cette équation du second degré en (μ), sont alors correspondants sur f, puisque les éléments tangents en (μ) et (ν) ont en commun l'élément (λ); les éléments correspondants sur f forment donc une involution définie par $h_{\lambda\mu^2} = 0$; les éléments doubles de cette involution sont ceux qui sont confondus en l'élément double de f.

On vérifiera sans peine avec les formules précédentes les propositions plus générales énoncées au paragraphe précédent. Ainsi deux éléments (λ) et (μ) seront correspondants pour le nombre n, si l'on a

$$\lambda_1^n \mu_2^n - \lambda_2^n \mu_1^n = 0;$$

cette formule simple est d'un usage fort commode et permet d'énoncer de nouvelles propriétés.

Si f a un élément cuspidal, il n'y a plus d'éléments correspondants pour le nombre n.

En général, $3p$ éléments (λ), (μ), (ν), ... appartiendront, dans le cas où f a un élément double ordinaire, à une même série de degré p, si l'on a

$$\lambda_1 \mu_1 \nu_1 \ldots + (-1)^{p-1} \lambda_2 \mu_2 \nu_2 \ldots = 0.$$

Trois éléments (λ), (μ), (ν) seront les éléments de contact d'une série quadratique triplement tangente à f, si l'on a

$$\lambda_1^2 \mu_1^2 \nu_1^2 - \lambda_2^2 \mu_2^2 \nu_2^2 = 0.$$

ou, ôtant la solution qui correspond à une série linéaire double,

$$\lambda_1 \mu_1 \nu_1 - \lambda_2 \mu_2 \nu_2 = 0.$$

Si f a un élément cuspidal, $3p$ de ses éléments appartiendront à une même série de degré p, si l'on a

$$\Sigma \lambda_2 \mu_1 \nu_1 \ldots = 0;$$

on voit qu'il n'existe pas de série quadratique proprement dite triplement tangente à f.

On peut encore chercher à construire des suites à la fois inscrites et circonscrites à f, ce qui est possible quand f n'a pas d'élément cuspidal; et ainsi de suite.

325. On peut encore rattacher l'étude de la série cubique

rationnelle à celle de la forme linéoquadratique à deux séries de variables binaires; et cela de deux façons différentes.

Si $g(\lambda, \mu)$ est la forme donnée, et si l'on cherche le lieu de l'élément commun aux deux séries linéaires

$$\lambda_1(\eta \mid x) + \lambda_2(\zeta \mid x) = 0, \qquad \mu_1(\theta \mid x) + \mu_2(\varkappa \mid x) = 0,$$

sous la condition $g = 0$, on obtient une série cubique f, admettant $(\eta\zeta)$ comme élément double, et contenant $(\theta\varkappa)$, si g est du second degré par rapport aux (λ). On voit que les couples d'éléments de f qui appartiennent aux différents éléments (μ) forment une involution, dont les éléments doubles sont les éléments de contact des éléments tangents à f contenant $(\theta\varkappa)$. L'élément $(\eta\zeta)$ sera cuspidal pour f, si la série linéaire définie par $(\eta\zeta)$ et $(\theta\varkappa)$ correspond à l'un des éléments doubles de l'involution signalée ci-dessus.

Nous pouvons maintenant regarder (λ) et (μ) comme définissant deux éléments d'une série quadratique F, et chercher le lieu de l'élément commun aux éléments tangents à F correspondants, sous la condition $g = 0$. On obtient une série cubique f, trois fois tangente à F, et rationnelle. Les éléments de contact de f et F sont déterminés pour $g(\lambda, \lambda) = 0$; l'élément double se trouvera en résolvant les équations $g(\lambda, \mu) = 0$, $g(\mu, \lambda) = 0$, et supprimant les solutions précédentes; les éléments tangents communs à F et f, autres que ceux déjà connus, sont déterminés par les équations

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda_1} = 0, \qquad \frac{\partial g}{\partial \lambda_2} = 0.$$

Les éléments communs à f et à un élément (ξ) tangent à F se partagent en deux groupes; ceux qui sont accouplés déterminent une involution, dont les éléments doubles sont les éléments de contact des éléments tangents communs à f et F.

Si l'élément double appartient à F, il devient cuspidal. On verra encore sans peine que, réciproquement, toute involution sur f correspond à une des deux représentations que nous venons de signaler. La série linéaire définie par un couple de l'involution contient un élément fixe de f, ou touche une série quadratique fixe triplement tangente à f.

On engendrera encore une série cubique rationnelle en établis-

sant une relation homographique entre les éléments (ξ) d'un faisceau et les éléments tangents d'une série quadratique, considérée comme rationnelle; cette série quadratique sera triplement tangente à la série cubique. Enfin, les développements du n° 230 enseignent un nouveau moyen d'engendrer une série cubique qu'il suffit de signaler.



CHAPITRE XIII.

LA FORME TRILINÉAIRE.

326. Considérons une forme f linéaire à la fois par rapport à des variables (x), (y), (z) : ces variables définissent elles-mêmes des éléments qui remplissent trois espaces X, Y, Z; ces éléments peuvent être supposés de l'une ou de l'autre espèce; ces espaces peuvent être supposés distincts ou coïncidants, en tout ou en partie.

L'étude générale d'une telle forme comprend, en particulier, celle d'un réseau d'homographies ou de réciprocités entre des espaces coïncidants ou non, celle d'un réseau de séries quadratiques et celle d'une série cubique. Nous allons donner quelques indications sur cette étude, qui, développée complètement, prendrait une trop grande extension.

Nous supposerons d'abord que les espaces X, Y, Z sont distincts : dans ce cas, les (x), (y), (z) peuvent être supposés de première espèce, sans diminuer la généralité, et les (ξ), (η), (ζ) désigneront les éléments de seconde espèce des mêmes espaces X, Y, Z.

La forme $f = \Sigma a_{ijk} x_i y_j z_k$ dépend de vingt-sept coefficients, et par suite possédera trois invariants multiples proprement dits distincts, au moins : un calcul simple montre qu'il n'y en a pas davantage. Ceci admis, nous prendrons immédiatement f sous la forme canonique suivante, possible en général, puisqu'elle nous fournira trois invariants proprement dits distincts :

$$\begin{aligned} f = \quad & a_1 x_1 y_1 z_1 + a_2 x_2 y_2 z_2 + a_3 x_3 y_3 z_3 \\ & + b_1 x_1 y_2 z_3 + b_2 x_2 y_3 z_1 + b_3 x_3 y_1 z_2 \\ & + c_1 x_1 y_3 z_2 + c_2 x_2 y_1 z_3 + c_3 x_3 y_2 z_1. \end{aligned}$$

Nous désignerons respectivement par l, m, n les trois lignes du

second membre de cette formule, et nous ferons de même

$$\lambda = a_2 a_3 \xi_1 \eta_1 \zeta_1 + a_3 a_1 \xi_2 \eta_2 \zeta_2 + a_1 a_2 \xi_3 \eta_3 \zeta_3,$$
$$\mu = b_2 b_3 \xi_1 \eta_2 \zeta_3 + b_3 b_1 \xi_2 \eta_3 \zeta_1 + b_1 b_2 \xi_3 \eta_1 \zeta_2,$$
$$\nu = c_2 c_3 \xi_1 \eta_3 \zeta_2 + c_3 c_1 \xi_2 \eta_1 \zeta_3 + c_1 c_2 \xi_3 \eta_2 \zeta_1.$$

Nous ferons aussi

$$\alpha = a_1 a_2 a_3, \qquad \beta = b_1 b_2 b_3, \qquad \gamma = c_1 c_2 c_3,$$
$$s = \alpha + \beta + \gamma, \qquad q = \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta, \qquad p = \alpha\beta\gamma.$$

327. La forme f fait correspondre à un élément (x) de X, par exemple, une réciprocité entre les espaces Y et Z, d'équation $f = 0$; à l'ensemble des éléments de X correspond ainsi un réseau de réciprocités entre Y et Z. Cherchons le lieu des éléments (x), tels que la réciprocité correspondante soit singulière : on a pour définir ces éléments et, en même temps, les éléments singuliers correspondants (y) et (z) dans Y et Z, les deux systèmes d'équations

$$a_1 x_1 y_1 + c_3 x_3 y_2 + b_2 x_2 y_3 = 0, \qquad a_1 x_1 z_1 + b_3 x_3 z_2 + c_2 x_2 z_3 = 0,$$
$$b_3 x_3 y_1 + a_2 x_2 y_2 + c_1 x_1 y_3 = 0, \qquad c_3 x_3 z_1 + a_2 x_2 z_2 + b_1 x_1 z_3 = 0,$$
$$c_2 x_2 y_1 + b_1 x_1 y_2 + a_3 x_3 y_3 = 0, \qquad b_2 x_2 z_1 + c_1 x_1 z_2 + a_3 x_3 z_3 = 0.$$

Le lieu des (x) est donc la série cubique

$$0 = g_1 = \begin{vmatrix} a_1 x_1 & c_3 x_3 & b_2 x_2 \\ b_3 x_3 & a_2 x_2 & c_1 x_1 \\ c_2 x_2 & b_1 x_1 & a_3 x_3 \end{vmatrix} = -a_1 b_1 c_1 x_1^3 - a_2 b_2 c_2 x_2^3 - a_3 b_3 c_3 x_3^3 + s x_1 x_2 x_3;$$

celui des (y) est de même

$$0 = g_2 = \begin{vmatrix} a_1 y_1 & b_2 y_3 & c_3 y_2 \\ c_1 y_3 & a_2 y_2 & b_3 y_1 \\ b_1 y_2 & c_2 y_1 & a_3 y_3 \end{vmatrix} = -a_1 b_3 c_2 y_1^3 - a_2 b_1 c_3 y_2^3 - a_3 b_2 c_1 y_3^3 + s y_1 y_2 y_3;$$

et celui des (z)

$$0 = g_3 = \begin{vmatrix} a_1 z_1 & c_2 z_3 & b_3 z_2 \\ b_1 z_3 & a_2 z_2 & c_3 z_1 \\ c_1 z_2 & b_2 z_1 & a_3 z_3 \end{vmatrix} = -a_1 b_2 c_3 z_1^3 - a_2 b_3 c_1 z_2^3 - a_3 b_1 c_2 z_3^3 + s z_1 z_2 z_3.$$

On voit tout de suite que, de même, g_2 est le lieu des (y) tels que la réciprocité correspondante entre X et Z soit singulière, et que

g_1 et g_3 sont les lieux des éléments singuliers de cette réciprocité dans X et Z; ....

A un élément (ξ) de X, considéré comme lieu d'éléments (x), correspond un faisceau de réciprocités entre Y et Z; les éléments singuliers de ce faisceau correspondent aux éléments communs à g_1 et (ξ); deux d'entre eux sont confondus si (ξ) touche f; ils sont confondus tous trois si (ξ) est élément tangent stationnaire pour f.

Si l'on considère le réseau de réciprocités entre Y et Z défini par f, on peut dire que g_2 et g_3 sont les lieux des éléments singuliers des réciprocités singulières de ce réseau; on peut dire aussi que g_2, par exemple, est le lieu des éléments (y) tels que les éléments (ξ) correspondants dans Z en vertu de toutes les réciprocités du réseau aient en commun un même élément (z) dont le lieu est g_3; la relation entre (y) et (z) est d'ailleurs fournie par les équations

$$\begin{aligned} a_1 y_1 z_1 + b_1 y_2 z_3 + c_1 y_3 z_2 &= 0,\\ c_2 y_1 z_3 + a_2 y_2 z_2 + b_2 y_3 z_1 &= 0,\\ b_3 y_1 z_2 + c_3 y_2 z_1 + a_3 y_3 z_3 &= 0. \end{aligned}$$

Les séries g_2 et g_3 sont ainsi définies indépendamment de l'espace X. Comme d'ailleurs ce sont des séries cubiques générales, on a, de cette façon, une génération intéressante de la série cubique.

328. Les séries cubiques g_1, g_2, g_3 sont réduites en même temps à la forme canonique. Leurs invariants proprement dits sont les mêmes et ont pour valeurs, avec les notations du Chapitre précédent,

$$i = -\frac{s}{1296}(s^3 + 216p),$$

$$j = -\frac{1}{5832}(s^6 - 540ps^3 - 5832p^2).$$

Ce sont deux invariants proprement dits pour f, respectivement du douzième et du dix-huitième degré par rapport aux coefficients.

Les autres invariants des séries g_1, g_2, g_3 sont faciles à calculer.

329. Si l'on considère la réciprocité entre Y et Z qui corres-

pond à (x), elle admet comme invariant la forme en (η) et (ζ)

$$\begin{aligned}\varphi_1 = &- x_1^2(b_1 c_1 \eta_1 \zeta_1 + c_1 a_1 \eta_2 \zeta_3 + a_1 b_1 \eta_3 \zeta_2)\\ &+ x_2 x_3(a_2 a_3 \eta_1 \zeta_1 + b_2 b_3 \eta_2 \zeta_3 + c_2 c_3 \eta_3 \zeta_2)\\ &- x_2^2(b_2 c_2 \eta_2 \zeta_2 + c_2 a_2 \eta_3 \zeta_1 + a_2 b_2 \eta_1 \zeta_3)\\ &+ x_3 x_1(a_3 a_1 \eta_2 \zeta_2 + b_3 b_1 \eta_3 \zeta_1 + c_3 c_1 \eta_1 \zeta_3)\\ &- x_3^2(b_3 c_3 \eta_3 \zeta_3 + c_3 a_3 \eta_1 \zeta_2 + a_3 b_3 \eta_2 \zeta_1)\\ &+ x_1 x_2(a_1 a_2 \eta_3 \zeta_3 + b_1 b_2 \eta_1 \zeta_2 + c_1 c_2 \eta_2 \zeta_1),\end{aligned}$$

dont la formation est évidente.

On obtient de même, en remplaçant X par Y ou Z, deux autres formes analogues φ_2 et φ_3, dont nous n'écrivons que les premiers termes

$$\begin{aligned}\varphi_2 = &- y_1^2(b_3 c_2 \zeta_1 \xi_1 + a_1 b_3 \zeta_2 \xi_3 + a_1 c_2 \zeta_3 \xi_2)\\ &+ y_2 y_3(a_2 a_3 \zeta_1 \xi_1 + c_1 c_3 \zeta_2 \xi_3 + b_1 b_2 \zeta_3 \xi_2) + \ldots;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_3 = &- z_1^2(b_2 c_3 \xi_1 \eta_1 + a_1 c_3 \xi_2 \eta_3 + a_1 b_2 \xi_3 \eta_2)\\ &+ z_2 z_3(a_2 a_3 \xi_1 \eta_1 + b_1 b_3 \xi_2 \eta_3 + c_1 c_2 \xi_3 \eta_2) + \ldots.\end{aligned}$$

L'opération symbolique

$$\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial y_1}\frac{\partial\varphi_3}{\partial\eta_1} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_2}\frac{\partial\varphi_3}{\partial\eta_2} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_3}\frac{\partial\varphi_3}{\partial\eta_3}\right)\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\zeta_1}\frac{\partial\varphi_3}{\partial z_1} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\zeta_2}\frac{\partial\varphi_3}{\partial z_2} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\zeta_3}\frac{\partial\varphi_3}{\partial z_3}\right)$$

conduit à l'invariant

$$\begin{aligned}\psi_1 = 6\xi_1^2&(b_2 b_3 c_2 c_3 y_1 z_1 + c_2 c_3 a_2 a_3 y_2 z_3 + a_2 a_3 b_2 b_3 y_3 z_2)\\ + 2\xi_2\xi_3&[a_1(\alpha - 2\beta - 2\gamma) y_1 z_1\\ &\quad + b_1(\beta - 2\gamma - 2\alpha) y_2 z_3 + c_1(\gamma - 2\alpha - 2\beta) y_3 z_2]\\ + \ldots&\ldots;\end{aligned}$$

et l'on a de même deux invariants analogues ψ_2 et ψ_3, qu'il est inutile d'écrire.

Si maintenant nous effectuons l'opération symbolique

$$\frac{1}{12}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial\xi_1} + \ldots\right)^2\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial y_1} + \ldots\right)\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\zeta_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial z_1} + \ldots\right),$$

nous trouvons l'invariant proprement dit

$$k = s^2 - 12q,$$

du sixième degré par rapport aux coefficients.

k, i et j sont les invariants fondamentaux de f.

330. Calculons maintenant, en considérant ψ_1 comme ne dépendant que des (ξ), la fonction $K^2(g_1, \psi_1)$; on obtient un invariant

semblable à f, soit $f' - \frac{2}{3} kf$, en faisant

$$f' = (\alpha s - 6\beta\gamma - 8q)l + (\beta s - 6\gamma\alpha - 8q)m + (\gamma s - 6\alpha\beta - 8q)n.$$

Opérons de même en remplaçant g_1 par son hessien h_1; on a

$$K^2(h_1, \psi_1) = 8if + \frac{1}{108} f'',$$

en faisant

$$f'' = [\alpha(s^3 - 108p) + 18\beta\gamma s^2 + 216ps]l + [\beta(s^3 - 108p) + 18\gamma\alpha s^2 + 216ps]m$$
$$+ [\gamma(s^3 - 108p) + 18\alpha\beta s^2 + 216ps]n.$$

On peut donc regarder comme invariant relatif à f, le réseau tout entier des formes f, f', f'', correspondant à

$$F = \lambda_1 f + \lambda_2 f' + \lambda_3 f''.$$

Considérons la cayleyenne γ_1 de g_1, et la forme Φ_1, jouant par rapport à F le même rôle que φ_1 par rapport à f : formons la fonction $K^2(\gamma_1, \Phi_1)$, en considérant Φ_1 comme ne dépendant que des (x), et prenons-y les coefficients de λ_1^2, $\lambda_1\lambda_2$ et $\lambda_1\lambda_3$; nous obtenons trois invariants semblables de la forme

$$-\frac{1}{324}\varphi', \quad -\frac{1}{162}\varphi'', \quad -\frac{1}{162}\varphi''',$$

où l'on a fait

$$\varphi' = (54\beta\gamma s + s^3 + 54p)\lambda + (54\gamma\alpha s + s^3 + 54p)\mu + (54\alpha\beta s + s^3 + 54p)\nu,$$
$$\varphi'' = [\beta\gamma(21s^3 - 432qs - 324p) + \alpha s(s^3 + 216p)$$
$$- 8qs^3 - 189ps^2 - 432pq]\lambda + \ldots,$$
$$\varphi''' = [\beta\gamma s^2(45s^3 + 9720p) + \alpha(s^6 - 540ps^3 - 5832p^2)$$
$$+ ps(675s^3 + 14580p)]\lambda + \ldots.$$

D'ailleurs, on a

$$-\frac{10}{9}\frac{i}{j}\varphi' - \frac{1}{972j}\varphi''' = \varphi,$$

en faisant

$$\varphi = (6\alpha - 5s)\lambda + (6\beta - 5s)\mu + (6\gamma - 5s)\nu,$$

et ce nouvel invariant remplacera φ'''; on pourrait l'obtenir plus naturellement en suivant une autre voie : il suffirait de chercher le coefficient de $\frac{\omega}{2}$ dans l'invariant k relatif à la forme

$$f + \omega(\xi \mid x)(\eta \mid y)(\zeta \mid z),$$

mais cette forme n'est pas réduite à la forme canonique et, par

suite, son étude, qui mènerait aux résultats précédents, demanderait de nouveaux calculs en général.

On a un nouveau réseau invariant d'espèce opposée à F, correspondant à

$$\Phi = \mu_1 \varphi + \mu_2 \varphi' + \mu_3 \varphi''.$$

Si l'on fait la somme des produits obtenus en multipliant chaque coefficient de F par le coefficient correspondant de Φ, on obtient un invariant proprement dit, dont la valeur est, au facteur 3 près,

$$\begin{aligned} &\lambda_1 \mu_1 k + \lambda_1 \mu_2(-1296\, i) + \lambda_1 \mu_3(-1080\, ik - 972\, j) + \lambda_2 \mu_1 \left(\frac{2}{3}\, k^2 - 432\, i\right) \\ &+ \lambda_2 \mu_2(-1080\, ik - 972\, j) + \lambda_2 \mu_3(-864\, ik^2 - 1458\, jk + 139968\, i^2) \\ &+ \lambda_3 \mu_1(-864\, ik - 1944\, j) + \lambda_3 \mu_2(-972\, jk + 1399680\, i^2) \\ &+ \lambda_3 \mu_3(-648\, jk^2 + 1166400\, i^2 k + 1469664\, ij). \end{aligned}$$

Si l'on se donne une forme F par exemple, on voit qu'il existe un faisceau de formes Φ telles que, pour chacune de ces formes et la forme F, l'invariant précédent soit nul ; ces formes Φ peuvent être dites *conjuguées de* F.

Les réciprocités définies par ces formes Φ entre les espaces Y et Z, quand (ξ) est considéré comme donné quelconque, forment un système cinq fois infini ; chacune d'elles est conjuguée des réciprocités entre les mêmes espaces définies par la forme F, c'est-à-dire que si l'on pose

$$F = \Sigma a_{ij} y_i z_j, \qquad \Phi = \Sigma \alpha_{ij} \eta_i \zeta_j,$$

l'invariant $\Sigma a_{ij} \alpha_{ij}$ est nul. Les réciprocités Φ ainsi définies sont d'ailleurs les seules qui soient conjuguées de la réciprocité F.

Les séries cubiques qui résultent des formes F et Φ comme g_1, g_2, g_3 résultent de f, appartiennent toutes aux faisceaux déterminés par ces dernières et leurs hessiennes.

331. Supposons les espaces Y et Z coïncidants, et les éléments (y) et (z) de même espèce. Les invariants précédemment définis gardent leur sens ; mais il faut en ajouter d'autres, que nous ne calculerons pas, et qui seront les invariants simultanés des séries cubiques g_2 et g_3, qui ne peuvent plus être supposées réduites simultanément à la forme canonique.

Il y aura lieu aussi de considérer le réseau de séries quadratiques obtenu en faisant dans f les (y) égaux aux (z) ; le lieu de l'élé-

ment (yz), quand (y) et (z) se correspondent sur g_2 et g_3; ....

Si les éléments (y) et (z) sont d'espèce opposée, nous remplacerons les (z) par les (ζ), et inversement. La forme f définit alors un réseau d'homographies dans les espaces coïncidants Y et Z; la série g_2 est le lieu des (y) tels que leurs correspondants dans toutes ces homographies soient alignés sur un élément (ζ), dont le lieu est la série g_3. En particulier, l'une des homographies du réseau peut être la correspondance identique définie par $(y|\zeta)$; on est alors ramené au cas d'un faisceau d'homographies ordinaires.

332. Revenons au premier cas, les éléments (y) et (z) étant de même nature, et supposons la forme f symétrique par rapport aux (y) et aux (z). La forme canonique employée précédemment subsiste alors, avec les hypothèses $b_1 = c_1$, $b_2 = c_2$, $b_3 = c_3$.

On est ramené à une nouvelle étude d'un réseau de séries quadratiques, dont la jacobienne est la série g_2 ou g_3.

Les invariants k, i et j ne sont plus distincts. En gardant

$$k = \alpha^2 - 20\alpha\beta - 8\beta^2,$$

et faisant

$$i_1 = \beta(\alpha - \beta)^3,$$

on a

$$i = -\frac{k^2 + 48 i_1}{1296},$$

$$j = -\frac{1}{5832} k(k^2 + 72 i_1).$$

On remarquera que

$$k^2 + 64 i_1 = \alpha(\alpha + 8\beta)^3,$$

$$j^2 + 64 i^3 = -\frac{i_1^2}{19683}(k^2 + 64 i_1).$$

La forme f'' n'est pas distincte des formes f et f', et à celle-ci nous substituerons

$$f'_1 = f' - kf = (\alpha - \beta)[6\beta l - (\alpha + 2\beta)(m + n)].$$

On a aussi

$$\varphi = (\alpha - 10\beta)\lambda - (5\alpha + 4\beta)(\mu + \nu),$$

et laissant de côté φ'', nous ferons

$$\varphi'_1 = \frac{\varphi' - k\varphi}{6} = (\alpha - \beta)^2[6\beta\lambda + (\alpha - 4\beta)(\mu + \nu)].$$

Nous remarquerons la combinaison

$$\varphi_1'' = 8 i_1 \varphi - k\varphi_1' = (\alpha - \beta)^2(\alpha + 8\beta)^2[2\beta\lambda - \alpha(\mu + \nu)].$$

Au réseau de réciprocités involutives défini par $\lambda_1 f + \lambda_2 f_1'$, correspond un réseau conjugué de réciprocités involutives aussi, de la forme $\mu_1 \varphi + \mu_2 \varphi_1'$, avec la condition

$$\lambda_1 \mu_1 k + 8\lambda_1 \mu_2 i_1 + 16\lambda_2 \mu_1 i_1 - 2\lambda_2 \mu_2 i_1 k = 0.$$

En particulier, au réseau f correspond le réseau φ_1''.

La même équation convient pour définir le réseau conjugué du réseau de séries quadratiques obtenu en faisant les (y) égaux aux (z).

Les séries g_1 et g_2 sont chacune la hessienne de trois autres séries cubiques; ici ces séries se séparent en deux groupes, dont l'un est composé des séries g_1' et g_2',

$$g_1' = -\frac{k}{4} g_1 + 27 h_1 = (\alpha - \beta)^2 [a_1 b_1 c_1 x_1^3 + a_2 b_2 c_2 x_2^3 + a_3 b_3 c_3 x_3^3 + 6\beta x_1 x_2 x_3],$$

$$g_2' = -\frac{k}{4} g_2 + 27 h_2 = (\alpha - \beta)^2 [a_1 b_3 c_2 y_1^3 + a_2 b_1 c_3 y_2^3 + a_3 b_2 c_1 y_3^3 + 6\beta y_1 y_2 y_3],$$

h_1 et h_2 étant les hessiennes de g_1 et g_2.

La cayleyenne de g_1' est $i_1 \gamma_1'$, avec

$$\gamma_1' = (\alpha - \beta)^3 [a_2 a_3 b_2 b_3 c_2 c_3 \xi_1^3 + \ldots + \beta(\alpha - 4\beta)\xi_1 \xi_2 \xi_3];$$

celle de g_2' est $i_1^2 \gamma_2'$, avec

$$\gamma_2' = a_2 a_3 b_1 \eta_1^3 + a_3 a_1 b_2 \eta_2^3 + a_1 a_2 b_3 \eta_3^3 + (\alpha - 4\beta)\eta_1 \eta_2 \eta_3;$$

cette dernière série est la cayleyenne du réseau de séries quadratiques défini par f, quand les (z) sont égaux aux (y); ces formes γ_1' et γ_2' correspondent d'ailleurs à φ_1'' comme g_1 et g_2 à f_1, à des facteurs près.

La condition pour que le réseau F de séries quadratiques défini par f_1 ait un élément singulier est $k^2 + 64 i_1 = 0$; celle pour que le réseau conjugué Φ ait un élément singulier, ou encore que le réseau F lui-même contienne un élément double, est $i_1 = 0$; on obtient ces résultats en faisant un calcul déjà indiqué.

333. Examinons les différentes particularités qui se présentent

et les différentes formes canoniques que l'on peut attribuer à la forme f, lorsque cette forme correspond aux différentes espèces possibles de réseaux quadratiques proprement dits.

a. *Cas général*. — Tout ce qui précède s'applique entièrement.

b. Le réseau Φ contient un élément simplement singulier.

La forme canonique générale s'applique avec $b_1 = 0$ par exemple, et, par suite, $\beta = 0$.

On a

$$k = \alpha^2, \qquad i_1 = 0;$$

g_2 se compose de $y_1 = 0$ et d'une série quadratique; g'_2 est $x_1 = 0$ trois fois; γ'_2 a un élément double; g_1 a un élément double et g'_1 se compose de trois éléments alignés.

c. Le réseau Φ contient deux éléments simplement singuliers.

La forme canonique subsiste avec $b_2 = b_3 = 0$, par exemple.

g_2 se compose de trois éléments non alignés; g'_2 disparaît; γ'_2 se compose d'une série quadratique et de $\alpha_1 = 0$; g_1 est formée d'une série quadratique et de $x_1 = 0$, et g'_1 se compose d'un élément triple.

d. Le réseau Φ contient trois éléments simplement singuliers.

La forme canonique subsiste avec $b_1 = b_2 = b_3 = 0$.

g_2 se compose de trois éléments non alignés, ainsi que γ'_2 et g_1; g'_1 et g'_2 disparaissent.

e. Le réseau F contient un élément simplement singulier.

La forme canonique subsiste avec $a_1 = 0$.

On a

$$k = -8\beta^2, \qquad i_1 = -\beta^4.$$

Les séries g_2, g'_2, g_1, g'_1 ont chacune un élément double; γ'_2 se compose d'une série quadratique et de $\alpha_1 = 0$.

f. Le réseau F contient deux éléments simplement singuliers.

La forme canonique subsiste avec $a_2 = a_3 = 0$.

Les séries g_2, g'_2, g_1, g'_1 se décomposent chacune en une série quadratique et une série linéaire; γ'_2 se décompose en trois séries linéaires.

g. Le réseau F contient trois éléments simplement singuliers.

On a de plus qu'au cas précédent $a_1 = 0$.

Les séries g_2, g'_2, g_1, g'_1 se décomposent chacune en trois séries linéaires; il en est de même de γ'_2.

h. Les réseaux F et Φ admettent chacun un élément simplement singulier.

On peut alors employer la forme canonique suivante pour f :

$$a_1 x_1 y_1 z_1 + b_2 x_2 (y_2 z_3 + y_3 z_2) + b_3 x_3 y_2 z_2 + c_3 x_3 (y_3 z_1 + y_1 z_3).$$

Il vient

$$g_2 = a_1 b_2 y_1 (c_3 y_1 y_3 - b_3 y_2^2),$$
$$g'_2 = a_1^3 b_2^3 b_3 c_3^2 y_1^3,$$
$$\gamma'_2 = a_1 b_2 \eta_3 (2 c_3 \eta_2^2 - b_3 \eta_3 \eta_1).$$
$$g_1 = -(b_3 c_3^2 x_3^3 + a_1 b_2^2 x_2^2 x_1),$$
$$g'_1 = 3 a_1^2 b_2^4 b_3 c_3^2 x_2^2 x_3,$$
$$k = 0, \qquad i_1 = 0.$$

g_2 et γ'_2 se décomposent en une série quadratique et une série linéaire ; g_1 a un élément cuspidal ; etc.

i. Le réseau F admet un élément doublement singulier et le réseau Φ deux éléments simplement singuliers.

On peut employer la forme canonique

$$b_1 x_1 (y_3 z_1 + y_1 z_3) + c_1 x_1 (y_1 z_2 + y_2 z_1) + a_2 x_2 y_2 z_2 + a_3 x_3 y_3 z_3 ;$$

on a alors

$$g_2 = a_2 a_3 y_2 y_3 (c_1 y_2 + b_1 y_3),$$
$$g'_2 = 0,$$
$$\gamma'_2 = - a_2 a_3 \eta_1^2 (b_1 \eta_2 + c_1 \eta_3),$$
$$g_1 = - x_1^2 (a_2 b_1^2 x_2 + a_3 c_1^2 x_3),$$
$$g'_1 = 0,$$
$$k = 0, \qquad i_1 = 0.$$

j. Le réseau F admet deux éléments simplement singuliers, et le réseau Φ un élément doublement singulier.

On peut prendre pour f

$$a_1 x_1 y_1 z_1 + b_2 x_2 (y_2 z_3 + y_3 z_2) + b_3 x_3 (y_3 z_1 + y_1 z_3) + c_3 x_3 (y_1 z_2 + y_2 z_1) :$$

alors

$$g_2 = a_1 b_2 y_1^2 (b_3 y_3 - c_3 y_2),$$
$$g'_2 = 0,$$
$$\gamma'_2 = 2 a_1 b_2 \eta_2 \eta_3 (b_3 \eta_2 - c_3 \eta_3),$$
$$g_1 = b_2 x_2 (2 b_3 c_3 x_3^2 - a_1 b_2 x_1 x_2),$$
$$g'_1 = - 2 a_1^2 b_2^5 b_3 c_3 x_2^3,$$
$$k = 0, \qquad i_1 = 0.$$

k. Le réseau F admet un élément doublement singulier; le réseau Φ admet un élément simplement singulier et un élément doublement singulier.

La forme canonique du cas (*h*) convient avec $c_3 = 0$, ou bien celle du cas (*i*) avec $b_1 = 0$ ou $c_1 = 0$.

Les particularités sont faciles à énoncer.

l. Le réseau F admet un élément simplement singulier et un élément doublement singulier; le réseau Φ admet un élément doublement singulier.

La forme canonique du cas (*h*) convient avec $b_3 = 0$, ou bien celle du cas (*j*) avec $b_3 = 0$ ou $c_3 = 0$.

m. Les réseaux F et Φ admettent chacun un élément triplement singulier.

La forme canonique générale convient à nouveau avec les hypothèses $a_1 = b_2 = 0$, par exemple.

On a

$$g_2 = -a_2 b_1 b_3 x_2^3,$$
$$g'_2 = a_2 a_3 b_1 x_1^3,$$
$$g_1 = -a_3 b_3^2 x_3^3;$$

les autres invariants sont nuls.

n. Le réseau Φ admet un élément quadruplement singulier.

On peut conserver les formules du cas précédent, avec $a_3 = 0$.

o. Le réseau F admet un élément quadruplement singulier.

On peut conserver les formules du cas (*m*), avec $b_3 = 0$.

334. Si les espaces X, Y, Z coïncident, on aura encore de nouveaux invariants, obtenus en considérant les trois séries cubiques g_1, g_2, g_3 non réduites en même temps à la forme canonique en général. Si les éléments (x), (y), (z) sont de même nature, il y aura lieu d'envisager la série cubique f_0 obtenue en faisant, dans f, les (y) et les (z) égaux aux (x).

En particulier, on peut supposer la forme f symétrique par rapport aux (x), (y) et (z).

La forme canonique générale est alors applicable, sauf exception, avec $b_1 = b_2 = b_3 = c_1 = c_2 = c_3$; si b est la valeur commune de ces quantités

$$f_0 = a_1 x_1^3 + a_2 x_2^3 + a_3 x_3^3 + 6 b x_1 x_2 x_3;$$

les invariants i et j de f_0 sont, avec les notations du n° 332, $\sqrt[3]{i_1}$ et k; g_1 et g_2 sont la hessienne de f_0 qui coïncide à un facteur près avec g'_1 et g'_2.

Les formes f'_1, φ'_1 et φ jouent le même rôle, à des facteurs près, par rapport à la hessienne, la cayleyenne et l'invariant ε de la série f_0, que la forme f par rapport à cette même série.

Sans insister davantage, on voit que l'on retrouve toute la théorie des séries cubiques, le réseau F, défini par f, étant celui des polaires quadratiques des divers éléments (x) par rapport à f_0.

Les différents cas particuliers possibles sont en évidence. Il y a deux autres formes exceptionnelles qui correspondent à

$$f_0 = ax_1^3 + 3bx_2^2x_3,$$

et

$$f_0 = 3ax_1^2x_2 + 3bx_2^2x_3;$$

dans le premier cas, f_0 admet un élément cuspidal; dans le second, f_0 se compose d'une série quadratique et d'une série linéaire tangente.

On voit que les réseaux de séries quadratiques proprement dits qui peuvent être considérés comme le réseau des polaires quadratiques des divers éléments (x) par rapport à une série cubique sont ceux qui correspondent aux cas (a), (d), (e), (f), (g), (k), (m).

Réciproquement, si l'on se donne uniquement le réseau dans l'un de ces cas, on pourra trouver au moins une série cubique telle que ce réseau coïncide avec celui de ses polaires quadratiques; il n'y aura qu'une seule solution dans les cas (a), (e), (f), (g); il y en aura une double infinité dans les cas (d), (k), (m), comme on le constatera facilement.

335. Revenons au cas où les espaces Y et Z seuls coïncident, la forme f étant symétrique par rapport aux (y) et (z) et définissant, comme précédemment, un réseau F de séries quadratiques, proprement dit. Si f_0 est ce que devient f quand on y fait les (z) égaux aux (y), on peut considérer cette forme comme définissant une correspondance quadratique entre les espaces X et Y : à l'élément (x) de X correspond dans Y une série du réseau F, d'équation $f_0 = 0$.

Cette série quadratique se décompose si (x) appartient à g_1, et le lieu de son élément double est la jacobienne g_2 du réseau F,

tandis que le lieu des éléments de seconde espèce dans lesquels elle se décompose est la cayleyenne γ'_2 du même réseau.

A une série linéaire (ξ) de X correspondra un faisceau de séries quadratiques appartenant au réseau F ou, si l'on veut, l'ensemble des quatre éléments communs aux séries de ce faisceau. Les séries décomposables de ce faisceau correspondront aux éléments communs à (ξ) et à g_1 : le faisceau sera donc composé de séries tangentes ou même osculatrices, si (ξ) touche g_1 ou bien est élément tangent stationnaire pour g_1. Les propositions du n° 289 s'appliquent sans difficulté.

Si F est la série qui correspond à (x), aux six éléments tangents à g_1 contenant (x), correspondent six faisceaux de séries tangentes dont les éléments singuliers doubles sont communs à F et g_2, et dont les éléments singuliers simples sont communs à F et à la série tangentielle de γ'_2.

A une série d'éléments (x) correspondra l'enveloppe des séries quadratiques correspondant à ces divers éléments, et cette enveloppe sera aussi le lieu des éléments associés qui correspondent aux divers éléments (ξ) tangents à la série considérée. Par exemple, à une série quadratique correspondra une série quartique de X, d'équation facile à former.

A un élément (y) correspond un élément (ξ) défini par $f_0 = 0$; le même correspond aux trois autres éléments associés à (y). A un élément (η) correspond une série quadratique de seconde espèce de X, lieu des éléments (ξ) qui correspondent aux différents éléments de (η).

A une série d'éléments (x) correspond le lieu des éléments (ξ) correspondant aux divers éléments de cette série, et ce lieu est aussi l'enveloppe des séries quadratiques qui correspondent aux différents éléments (η) tangents à la série considérée. Par exemple, à une série quadratique en (x) correspondra une série quartique en (ξ) rationnelle.

Quand les séries quadratiques du réseau F ont trois éléments communs, on retrouve la correspondance quadratique birationnelle.

Nous n'insisterons pas sur l'étude que nous venons d'esquisser : nous en trouverons d'ailleurs un cas particulier dans le Chapitre suivant.

CHAPITRE XIV.

LA SÉRIE QUARTIQUE.

I. — Les invariants de la série quartique.

336. Nous donnerons quelques indications seulement sur la théorie des invariants des séries quartiques.

Soit f la forme qui définit une telle série, renfermant quinze coefficients. Les principaux invariants que l'on peut former sont les suivants : si dans f on fait $x_i = \lambda_1 y_i + \lambda_2 z_i$, on obtient une forme biquadratique en (λ), dont les invariants i et j s'expriment à l'aide des quantités ξ_i ou $(yz)_i$; ils sont respectivement des degrés 4 et 6 par rapport aux (ξ), 2 et 3 par rapport aux coefficients (a) de f : leur signification géométrique est évidente. La forme équivalente f est $i^3 - 27j^2$; les séries i et j contiennent les 24 éléments tangents stationnaires de f, et ne contiennent aucun autre élément tangent de f.

Un autre invariant évident est le hessien h de f, des degrés 6 et 3 par rapport aux (x) et aux (a).

Deux invariants proprement dits, des degrés 3 et 6 par rapport aux (a), sont $K^4(f, i)$, $K^6(h, j)$; une fonction de ces invariants est le déterminant des coefficients des variables dans les six dérivées partielles du second ordre de f.

Ce déterminant est nul, s'il existe une relation linéaire entre ces dérivées partielles; or, c'est ce qui arrive évidemment si f est sous la forme d'une somme de cinq quatrièmes puissances de fonctions linéaires. On ne peut donc, en général, mettre f sous cette forme, bien qu'elle contienne aussi quinze coefficients.

On voit, de même, que les mineurs du premier ordre ou du second ordre de ce déterminant sont tous nuls, si f peut se réduire à une somme de quatre ou trois quatrièmes puissances.

On obtient deux invariants quadratiques en (x) et (ξ), des

degrés 5 et 4 par rapport aux (a), par les opérations $K^4(h, i)$, $K^4(f, j)$; si on les désigne par l et m, $K^2(l, m)$ et $K^4(f, m^2)$ donnent deux invariants du degré 9 par rapport aux (a); et ainsi de suite.

On remarquera encore l'invariant analogue à f, obtenu en calculant l'invariant i de la série cubique qui est la première polaire de (x); on peut alors, par la considération du faisceau formé par f et cet invariant, engendrer de nouveaux invariants.

II. — La série quartique comme enveloppe de séries quadratiques.

337. Nous allons maintenant envisager la série quartique comme correspondant à une série quadratique, dans le mode de correspondance défini à la fin du Chapitre précédent.

Soit un réseau F de séries quadratiques, d'équations

$$y_1 f_1 + y_2 f_2 + y_3 f_3 = 0,$$

les f_i étant des formes quadratiques quelconques en (x); nous supposons d'ailleurs ce réseau proprement dit, c'est-à-dire que les formes f_i sont linéairement distinctes. Nous appellerons j et γ les séries jacobienne et cayleyenne de ce réseau; nous appellerons aussi k la série cubique, lieu des éléments (y) dans l'espace auxiliaire Y, tels que la série F correspondante se décompose; enfin l sera la série cubique de l'espace Y dont k est la hessienne, et qui se distingue des deux autres, inséparables, jouissant de la même propriété. Rien n'empêche d'ailleurs de supposer les espaces X et Y coïncidants et rapportés aux mêmes coordonnées; et si le réseau F peut être regardé comme le réseau des polaires quadratiques d'une série cubique g, on pourra supposer que la série F qui correspond à (y) est précisément la polaire quadratique de (y) par rapport à (g) : alors les séries j et k coïncident, et g remplace l. On peut ainsi énoncer, d'une façon plus caractéristique, les propositions que nous allons rencontrer, et les rattacher à la théorie d'une série cubique simplement. Mais nous ne ferons pas cette transposition facile, laissant aux théorèmes toute leur généralité.

338. Nous savons qu'à un élément (y) correspond une série

quadratique F; si (y) appartient à k, cette série F se décompose en deux éléments dont le lieu est γ, l'élément singulier de F appartenant alors à j.

A un élément (η) de Y correspond un groupe de quatre éléments (x) associés déterminant un faisceau de séries F; les séries singulières de ce faisceau, déterminées par ces quatre éléments d'une façon évidente, correspondent aux éléments communs à (ξ) et k. Ce faisceau est composé de séries tangentes si (ξ) touche k. En un mot, toutes les propriétés des réseaux s'appliquent sans qu'il soit nécessaire de les répéter.

Considérons maintenant une série quadratique q d'équation

$$q = a_{11}y_1^2 + a_{22}y_2^2 + a_{33}y_3^2 + 2a_{23}y_2y_3 + 2a_{31}y_3y_1 + 2a_{12}y_1y_2 = 0,$$

de l'espace Y. Les séries F qui correspondent aux différents éléments (y) de q ont une enveloppe dont l'équation est évidemment

$$f = \alpha_{11}f_1^2 + \alpha_{22}f_2^2 + \alpha_{33}f_3^2 + 2\alpha_{23}f_2f_3 + 2\alpha_{31}f_3f_1 + 2\alpha_{12}f_1f_2 = 0,$$

les α_{ij} étant les coefficients de la forme tangentielle χ de q. La série f est une série quartique, que nous allons étudier comme engendrée de cette façon. Il est clair, d'ailleurs, que cette forme convient à toute série quartique, les coefficients a_{ij} et le réseau F étant convenablement choisis.

Si la série q est décomposable, la série f est la série quadratique qui correspond à l'élément singulier de q, comptée deux fois.

La série f est aussi le lieu des éléments associés qui correspondent aux différents éléments tangents à la série q : des éléments associés forment d'ailleurs un groupe d'éléments de contact avec f pour une série F quadruplement tangente à f.

On voit par là que si l'on établit entre les éléments (x) la correspondance qui fait correspondre à un tel élément l'un de ses associés en vertu du réseau F, la série f se transformera elle-même, les séries quadratiques du réseau F qui lui sont quadruplement tangentes ne changeant pas.

Si l'on prend q sous la forme simple

$$q = y_1^2 - 4y_2y_3,$$

on aura

$$f = 4(f_2f_3 - f_1^2).$$

On peut d'ailleurs, dans ce cas, poser

$$y_1 = 2\lambda_1\lambda_2, \qquad y_2 = \lambda_1^2, \qquad y_3 = \lambda_2^2,$$

et f est l'enveloppe des séries

$$\lambda_1^2 f_2 + 2\lambda_1\lambda_2 f_1 + \lambda_2^2 f_3 = 0;$$

on voit donc que l'on peut encore faire correspondre l'étude de la série f à celle de la forme doublement quadratique à variables binaires et ternaires.

Si l'on prend q sous la forme

$$q = 2a_{23}y_2y_3 + 2a_{31}y_3y_1 + 2a_{12}y_1y_2,$$

de sorte que les séries F, qui correspondent aux éléments fondamentaux de Y, soient quadruplement tangentes à f, on aura

$$\begin{aligned} f = & -a_{23}^2 f_1^2 - a_{31}^2 f_2^2 - a_{12}^2 f_3^2 \\ & + 2a_{31}a_{12}f_2f_3 + 2a_{12}a_{23}f_3f_1 + 2a_{23}a_{31}f_1f_2; \end{aligned}$$

cette forme particulière nous sera utile plus tard.

339. Soient (y) un élément de Y, (η') et (η'') les éléments tangents à q contenant (y); (y') et (y'') leurs éléments de contact. La série F qui correspond à (y) contient évidemment les deux groupes d'éléments de contact avec f des séries quadruplement tangentes à f qui correspondent à (y') et (y'') : ainsi les huit éléments communs à f et à une série F se décomposent en deux groupes d'éléments de contact pour des séries quadruplement tangentes à f; les éléments de contact de deux séries F′ et F″ quadruplement tangentes à f appartiennent à une même série quadratique F; et si (y), (y'), (y'') correspondent respectivement à F, F′, F″, (y) est le pôle de $(y'y'')$ par rapport à q; la série F peut donc être dite *pôle* par rapport à f du faisceau (F′, F″).

Si les équations de F′ et F″ sont

$$\lambda_1^2 f_2 + 2\lambda_1\lambda_2 f_1 + \lambda_2^2 f_3 = 0, \qquad \mu_1^2 f_2 + 2\mu_1\mu_2 f_1 + \mu_2^2 f_3 = 0,$$

celle de F sera

$$\lambda_1\mu_1 f_2 + (\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1) f_1 + \lambda_2\mu_2 f_3 = 0.$$

Les séries q et k admettent en général douze éléments tangents communs; aux éléments de contact avec q de ces douze éléments

correspondront des séries quadruplement tangentes à f, mais avec deux éléments de contact confondus; ces éléments de contact seront d'ailleurs les douze éléments communs à f et à j.

Les séries q et k ont six éléments communs; à ces six éléments correspondent six couples d'éléments (ξ) bitangents à f. Si l'on applique à ces couples les propositions générales connues, on verra, en particulier, que si (a) et (b), (c) et (d) sont les éléments de contact de deux éléments bitangents d'un même couple, les six éléments (ab), (cd), (ac), (bd), (ad), (bc) appartiennent à γ, et que les trois éléments $[(ab)(cd)]$, $[(ac)(bd)]$, $[(ad)(bc)]$ appartiennent à j; que les huit éléments de contact des éléments bitangents de deux couples appartiennent à une même série F; et, puisqu'il y a six couples, il y a quinze telles séries F.

En appliquant les théorèmes de Pascal et de Brianchon à la suite formée par les éléments (y) qui correspondent aux couples d'éléments bitangents à f et à leurs groupes d'éléments de contact, on trouvera de nouvelles propriétés faciles à énoncer.

Si $(\alpha\,|\,x)$ et $(\alpha'\,|\,x)$, $(\beta\,|\,x)$ et $(\beta'\,|\,x)$ forment deux couples d'éléments bitangents à f, et si f' est la série qui contient leurs éléments de contact, on peut écrire f sous la forme

$$(\alpha\,|\,x)(\alpha'\,|\,x)(\beta\,|\,x)(\beta'\,|\,x)-f'^2=0.$$

340. Une série quartique admet, d'une façon générale, 28 éléments bitangents, qui forment par suite 378 couples. Chacun de ces couples détermine une façon de représenter f comme une enveloppe de séries quadratiques, et comme chacune de ces façons détermine elle-même six couples, on voit qu'il existe en tout 63 telles façons. Il existe, en d'autres termes, 63 systèmes de séries quadratiques quadruplement tangentes à f.

Si $(\alpha\,|\,x)$ et $(\alpha'\,|\,x)$, $(\beta\,|\,x)$ et $(\beta'\,|\,x)$ sont deux couples d'éléments bitangents appartenant à un même système, l'équation écrite ci-dessus montre que $(\alpha\,|\,x)$ et $(\beta\,|\,x)$, $(\alpha'\,|\,x)$ et $(\beta'\,|\,x)$ forment encore deux couples appartenant à un même système autre que le précédent, et qu'il en est de même de $(\alpha\,|\,x)$ et $(\beta'\,|\,x)$, $(\alpha'\,|\,x)$ et $(\beta\,|\,x)$. On en conclut qu'il existe en tout 315 séries quadratiques contenant les huit éléments de contact de deux couples d'éléments bitangents.

341. Désignons par α et α', β et β', γ et γ' trois couples d'éléments bitangents d'un même système, et par les mêmes lettres, afin d'abréger les notations, les premiers membres

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3, \quad \ldots$$

de leurs équations. L'équation de f sera alors de la forme

$$a^2\alpha^2\alpha'^2 + b^2\beta^2\beta'^2 + c^2\gamma^2\gamma'^2 - 2bc\beta\beta'\gamma\gamma' - 2ca\gamma\gamma'\alpha\alpha' - 2ab\alpha\alpha'\beta\beta' = 0.$$

Soient γ_1 et γ_1' un couple de deux éléments bitangents appartenant au système $\alpha\beta'$, $\alpha'\beta$, de sorte que l'équation de f pourra encore s'écrire

$$\begin{aligned} a'^2\alpha^2\beta'^2 + b'^2\alpha'^2\beta^2 + c'^2\gamma_1^2\gamma_1'^2 \\ - 2b'c'\alpha'\beta\gamma_1\gamma_1' - 2c'a'\gamma_1\gamma_1'\alpha\beta' - 2a'b'\alpha\beta'\alpha'\beta = 0. \end{aligned}$$

Les équations précédentes peuvent être mises sous la forme

$$(a\alpha\alpha' + b\beta\beta' - c\gamma\gamma')^2 - 4ab\alpha\alpha'\beta\beta' = 0,$$
$$(a'\alpha\beta' + b'\alpha'\beta - c'\gamma_1\gamma_1')^2 - 4a'b'\alpha\alpha'\beta\beta' = 0,$$

et, par suite, on a identiquement

$$\sqrt{a'b'}(a\alpha\alpha' + b\beta\beta' - c\gamma\gamma') \pm \sqrt{ab}(a'\alpha\beta' + b'\alpha'\beta - c'\gamma_1\gamma_1') = 0,$$

ou bien

$$(\alpha\sqrt{aa'} + \beta\sqrt{bb'})(\alpha'\sqrt{ab'} + \beta'\sqrt{a'b}) = \gamma\gamma'c\sqrt{a'b'} + \gamma_1\gamma_1'c'\sqrt{ab}.$$

D'après cela, on voit que γ et γ_1, par exemple, ne peuvent coïncider : car si cela était, l'équation de γ serait $\alpha\sqrt{aa'} + \beta\sqrt{bb'} = 0$ ou bien $\alpha'\sqrt{ab'} + \beta'\sqrt{a'b} = 0$, et il est évident que f aurait un élément double, ce que nous ne supposons pas.

Ceci posé, on voit encore sur l'équation précédente que les éléments des deux couples $(\gamma\gamma_1)$ et $(\gamma'\gamma_1')$, $(\gamma\gamma_1')$ et $(\gamma'\gamma_1)$ appartiennent les uns à l'élément d'équation $\alpha\sqrt{aa'} + \beta\sqrt{bb'} = 0$, et les autres à celui d'équation $\alpha'\sqrt{ab'} + \beta'\sqrt{a'b} = 0$: en d'autres termes, $(\alpha\beta)$, $(\gamma\gamma_1)$, $(\gamma'\gamma_1')$ par exemple sont alignés, et il en est de même de $(\alpha'\beta')$, $(\gamma\gamma_1')$, $(\gamma'\gamma_1)$.

342. Soient $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$, $\varepsilon\varepsilon'$, $\zeta\zeta'$, les six couples d'éléments bitangents d'un même système.

Les systèmes déterminés par $\alpha\beta'$ et $\alpha'\beta$, $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$, d'après ce

qui précède, contiendront les seize autres éléments bitangents à f; soient $\eta\eta'$, $\theta\theta'$, $\varkappa\varkappa'$, $\lambda\lambda'$ les couples qui correspondent à $\alpha\beta'$ et $\alpha'\beta$; $\mu\mu'$, $\nu\nu'$, $\xi\xi'$, $\pi\pi'$ ceux qui correspondent à $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$.

Envisageons maintenant le système déterminé par $\alpha\gamma'$ et $\alpha'\gamma$; chacun des quatre autres couples de ce système contiendra un des éléments η, η', θ, θ', $\varkappa$, $\varkappa'$, λ, λ' et un des éléments μ, μ', ν, ν', ξ, ξ', π, π', sans quoi il y aurait absurdité; nous supposerons que ces couples soient $\eta\mu$, $\theta\nu$, $\varkappa\xi$, $\lambda\pi$.

Pour préciser davantage, supposons que η soit $x_1 = 0$, et que ses éléments de contact avec f soient $\xi_2 = 0$ et $\xi_3 = 0$. $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ étant des couples d'un même système, l'équation de f est de la forme

$$a^2\alpha^2\alpha'^2 + b^2\beta^2\beta'^2 + c^2\gamma^2\gamma'^2 - 2bc\beta\beta'\gamma\gamma' - 2ca\gamma\gamma'\alpha\alpha' - 2ab\alpha\alpha'\beta\beta' = 0;$$

écrivant que f contient les éléments $\xi_2 = 0$ et $\xi_3 = 0$, on a d'abord

$$a = \left(\sqrt{\beta_2\beta_2'\gamma_3\gamma_3'} - \sqrt{\beta_3\beta_3'\gamma_2\gamma_2'}\right)^2,$$

$$b = \left(\sqrt{\gamma_2\gamma_2'\alpha_3\alpha_3'} - \sqrt{\gamma_3\gamma_3'\alpha_2\alpha_2'}\right)^2, \qquad c = \left(\sqrt{\alpha_2\alpha_2'\beta_3\beta_3'} - \sqrt{\alpha_3\alpha_3'\beta_2\beta_2'}\right)^2.$$

Écrivant alors que $\eta\eta'$ et $\eta\mu$ sont des couples d'éléments bitangents des systèmes $\alpha\beta'$, $\alpha'\beta$ et $\alpha\gamma'$, $\alpha'\gamma$, on trouve sans peine les conditions

$$\frac{\alpha_2\alpha_3'}{\alpha_3\alpha_2'} = \frac{\beta_2\beta_3'}{\beta_3\beta_2'} = \frac{\gamma_2\gamma_3'}{\gamma_3\gamma_2'}.$$

On en conclut que η est aussi un des éléments bitangents qui appartiennent au système $\beta\gamma'$, $\beta'\gamma$.

Alors on voit que les autres couples des systèmes $\alpha\gamma$ et $\alpha'\gamma'$, $\beta\gamma'$ et $\beta'\gamma$, $\beta\gamma$ et $\beta'\gamma'$ sont respectivement $\eta'\mu'$, $\theta'\nu'$, $\varkappa'\xi'$, $\lambda'\pi'$; $\eta\mu'$, $\theta\nu'$, $\varkappa\xi'$, $\lambda\pi'$; $\eta'\mu$, $\theta'\nu$, $\varkappa'\xi$, $\lambda'\pi$.

Si enfin on suppose, comme on peut le faire, que les couples $\eta\nu'$, $\eta\xi'$, $\eta\pi'$ appartiennent respectivement aux systèmes déterminés par $\alpha\delta'$ et $\alpha'\delta$, $\alpha\varepsilon'$ et $\alpha'\varepsilon$, $\alpha\zeta'$ et $\alpha'\zeta$, on dresse sans peine le Tableau suivant des couples d'éléments bitangents à f, répartis en soixante-trois systèmes, comme il a été dit précédemment :

$\alpha\alpha'$,	$\beta\beta'$,	$\gamma\gamma'$,	$\delta\delta'$,	$\varepsilon\varepsilon'$,	$\zeta\zeta'$;
$\alpha\beta'$,	$\alpha'\beta$,	$\eta\eta'$,	$\theta\theta'$,	$\varkappa\varkappa'$,	$\lambda\lambda'$;
$\alpha\beta$,	$\alpha'\beta'$,	$\mu\mu'$,	$\nu\nu'$,	$\xi\xi'$,	$\pi\pi'$;
$\alpha\gamma'$,	$\alpha'\gamma$,	$\eta\mu$,	$\theta\nu$,	$\varkappa\xi$,	$\lambda\pi$;
$\alpha\gamma$,	$\alpha'\gamma'$,	$\eta'\mu'$,	$\theta'\nu'$,	$\varkappa'\xi'$,	$\lambda'\pi'$;

$\beta\gamma'$,	$\beta'\gamma$,	$\eta\mu'$,	$\theta\nu'$,	$\kappa\xi'$,	$\lambda\pi'$:
$\beta\gamma$,	$\beta'\gamma'$,	$\eta'\mu$,	$\theta'\nu$,	$\kappa'\xi$,	$\lambda'\pi$.
$\alpha\delta'$.	$\alpha'\delta$,	$\eta\nu'$,	$\theta\mu'$,	$\kappa'\pi$,	$\lambda'\xi$;
$\alpha\delta$,	$\alpha'\delta'$.	$\eta'\nu$,	$\theta'\mu$,	$\kappa\pi'$,	$\lambda\xi'$:
$\beta\delta'$.	$\beta'\delta$,	$\eta\nu$,	$\theta\mu$,	$\kappa'\pi'$,	$\lambda'\xi'$:
$\beta\delta$,	$\beta'\delta'$,	$\eta'\nu'$,	$\theta'\mu'$.	$\kappa\pi$,	$\lambda\xi$:
$\gamma\delta'$,	$\gamma'\delta$,	$\eta\theta'$,	$\eta'\theta$,	$\xi\pi'$,	$\xi'\pi$:
$\gamma\delta$,	$\gamma'\delta'$,	$\kappa\lambda'$.	$\kappa'\lambda$,	$\mu\nu'$,	$\mu'\nu$:
$\alpha\varepsilon'$,	$\alpha'\varepsilon$,	$\eta\xi'$,	$\theta'\pi$,	$\kappa\mu'$,	$\lambda'\nu$:
$\alpha\varepsilon$,	$\alpha'\varepsilon'$,	$\eta'\xi$,	$\theta\pi'$.	$\kappa'\mu$,	$\lambda\nu'$:
$\beta\varepsilon'$.	$\beta'\varepsilon$,	$\eta\xi$,	$\theta'\pi'$.	$\kappa\mu$,	$\lambda'\nu'$:
$\beta\varepsilon$,	$\beta'\varepsilon'$,	$\eta'\xi'$,	$\theta\pi$,	$\kappa'\mu'$,	$\lambda\nu$;
$\gamma\varepsilon'$.	$\gamma'\varepsilon$.	$\eta\kappa'$	$\eta'\kappa$,	$\nu\pi'$,	$\nu'\pi$:
$\gamma\varepsilon$,	$\gamma'\varepsilon'$,	$\theta\lambda'$.	$\theta'\lambda$,	$\mu\xi'$.	$\mu'\xi$:
$\delta\varepsilon'$,	$\delta'\varepsilon$,	$\eta\lambda$,	$\eta'\lambda'$,	$\mu\pi$,	$\mu'\pi'$:
$\delta\varepsilon$,	$\delta'\varepsilon'$,	$\theta\kappa$.	$\theta'\kappa'$,	$\nu\xi$,	$\nu'\xi'$:
$\alpha\zeta'$.	$\alpha'\zeta$,	$\eta\pi'$,	$\theta'\xi$,	$\kappa'\nu$,	$\lambda\mu'$:
$\alpha\zeta$,	$\alpha'\zeta'$,	$\eta'\pi$.	$\theta\xi'$.	$\kappa\nu'$.	$\lambda'\mu$:
$\beta\zeta'$,	$\beta'\zeta$,	$\eta\pi$,	$\theta'\xi'$,	$\kappa'\nu'$.	$\lambda\mu$:
$\beta\zeta$,	$\beta'\zeta'$,	$\eta'\pi'$,	$\theta\xi$,	$\kappa\nu$.	$\lambda'\mu'$;
$\gamma\zeta'$.	$\gamma'\zeta$,	$\eta\lambda'$.	$\eta'\lambda$.	$\nu\xi'$,	$\nu'\xi$;
$\gamma\zeta$,	$\gamma'\zeta'$,	$\theta\kappa'$.	$\theta'\kappa$,	$\mu\pi'$.	$\mu'\pi$;
$\delta\zeta'$,	$\delta'\zeta$,	$\eta\kappa$,	$\eta'\kappa'$,	$\mu\xi$,	$\mu'\xi'$:
$\delta\zeta$.	$\delta'\zeta'$,	$\theta\lambda$,	$\theta'\lambda'$,	$\nu\pi$,	$\nu'\pi'$:
$\varepsilon\zeta'$.	$\varepsilon'\zeta$,	$\eta\theta$,	$\eta'\theta'$,	$\mu\nu$.	$\mu'\nu'$:
$\varepsilon\zeta$,	$\varepsilon'\zeta'$,	$\kappa\lambda$,	$\kappa'\lambda'$,	$\xi\pi$,	$\xi'\pi'$:
$\alpha\eta'$.	$\beta'\eta$.	$\gamma\mu'$,	$\delta\nu$.	$\varepsilon\xi$,	$\zeta\pi$:
$\alpha'\eta$.	$\beta\eta'$.	$\gamma\mu$,	$\delta\nu'$,	$\varepsilon\xi'$.	$\zeta\pi'$:
$\alpha\eta$.	$\beta'\eta'$,	$\gamma'\mu$.	$\delta'\nu'$.	$\varepsilon'\xi'$.	$\zeta'\pi'$:
$\alpha'\eta'$.	$\beta\eta$.	$\gamma'\mu'$,	$\delta'\nu$,	$\varepsilon'\xi$,	$\zeta'\pi$:
$\alpha\theta'$.	$\beta'\theta$,	$\gamma\nu'$.	$\delta\mu$.	$\varepsilon'\pi$.	$\zeta'\xi$:
$\alpha'\theta$,	$\beta\theta'$.	$\gamma\nu$,	$\delta\mu'$.	$\varepsilon'\pi'$.	$\zeta'\xi'$:
$\alpha\theta$.	$\beta'\theta'$,	$\gamma'\nu$.	$\delta'\mu'$,	$\varepsilon\pi'$.	$\zeta\xi'$:
$\alpha'\theta'$.	$\beta\theta$,	$\gamma'\nu'$,	$\delta'\mu$.	$\varepsilon\pi$,	$\zeta\xi$:
$\alpha\kappa'$.	$\beta'\kappa$.	$\gamma\xi'$,	$\delta'\pi$.	$\varepsilon\mu$.	$\zeta'\nu$:
$\alpha'\kappa$	$\beta\kappa'$.	$\gamma\xi$,	$\delta'\pi'$.	$\varepsilon\mu'$.	$\zeta'\nu'$:
$\alpha\kappa$,	$\beta'\kappa'$,	$\gamma'\xi$.	$\delta\pi'$,	$\varepsilon'\mu'$,	$\zeta\nu'$;
$\alpha'\kappa'$.	$\beta\kappa$,	$\gamma'\xi'$.	$\delta\pi$.	$\varepsilon'\mu$,	$\zeta\nu$:
$\alpha\lambda'$.	$\beta'\lambda$,	$\gamma\pi'$.	$\delta'\xi$.	$\varepsilon'\nu$.	$\zeta\mu$:
$\alpha'\lambda$.	$\beta\lambda'$.	$\gamma\pi$.	$\delta'\xi'$,	$\varepsilon'\nu'$.	$\zeta\mu'$:
$\alpha\lambda$,	$\beta'\lambda'$,	$\gamma'\pi$.	$\delta\xi'$,	$\varepsilon\nu'$,	$\zeta'\mu'$:
$\alpha'\lambda'$.	$\beta\lambda$,	$\gamma'\pi'$,	$\delta\xi$,	$\varepsilon\nu$,	$\zeta'\mu$;
$\alpha\mu'$.	$\beta\mu$.	$\gamma\eta'$,	$\delta'\theta$.	$\varepsilon'\kappa$,	$\zeta'\lambda$;
$\alpha'\mu$.	$\beta'\mu'$.	$\gamma\eta$.	$\delta'\theta'$,	$\varepsilon'\kappa'$,	$\zeta'\lambda'$;
$\alpha\mu$,	$\beta\mu'$.	$\gamma'\eta$.	$\delta\theta'$,	$\varepsilon\kappa'$.	$\zeta\lambda'$:
$\alpha'\mu'$,	$\beta'\mu$,	$\gamma'\eta'$.	$\delta\theta$,	$\varepsilon\kappa$,	$\zeta\lambda$;

$\alpha\nu'$,	$\beta\nu$,	$\gamma\theta'$,	$\delta'\eta$,	$\varepsilon\lambda$,	$\zeta\varkappa$;
$\alpha'\nu$,	$\beta'\nu'$,	$\gamma\theta$,	$\delta'\eta'$,	$\varepsilon\lambda'$,	$\zeta\varkappa'$;
$\alpha\nu$,	$\beta\nu'$,	$\gamma'\theta$,	$\delta\eta'$,	$\varepsilon'\lambda'$,	$\zeta'\varkappa'$;
$\alpha'\nu'$,	$\beta'\nu$,	$\gamma'\theta'$,	$\delta\eta$,	$\varepsilon'\lambda$,	$\zeta'\varkappa$;
$\alpha\xi'$,	$\beta\xi$,	$\gamma\varkappa'$,	$\delta\lambda$,	$\varepsilon'\eta$,	$\zeta\theta$;
$\alpha'\xi$,	$\beta'\xi'$,	$\gamma\varkappa$,	$\delta\lambda'$,	$\varepsilon'\eta'$,	$\zeta\theta'$;
$\alpha\xi$,	$\beta\xi'$,	$\gamma'\varkappa$,	$\delta'\lambda'$,	$\varepsilon\eta'$,	$\zeta'\theta'$;
$\alpha'\xi'$,	$\beta'\xi$,	$\gamma'\varkappa'$,	$\delta'\lambda$.	$\varepsilon\eta$,	$\zeta'\theta$;
$\alpha\pi'$,	$\beta\pi$,	$\gamma\lambda'$,	$\delta\varkappa$,	$\varepsilon\theta$,	$\zeta'\eta$;
$\alpha'\pi$,	$\beta'\pi'$,	$\gamma\lambda$,	$\delta\varkappa'$,	$\varepsilon\theta'$,	$\zeta'\eta'$;
$\alpha\pi$,	$\beta\pi'$,	$\gamma'\lambda$,	$\delta'\varkappa'$,	$\varepsilon'\theta'$,	$\zeta\eta'$;
$\alpha'\pi'$,	$\beta'\pi$,	$\gamma'\lambda'$,	$\delta'\varkappa$,	$\varepsilon'\theta$.	$\zeta\eta$

Ce Tableau peut suggérer de nombreuses propositions. Remarquons seulement que les éléments tels que $(\alpha\alpha')$, $(\eta\mu')$, $(\eta'\mu)$ sont alignés, en vertu de ce qui a été dit plus haut. On voit sans peine que $(\alpha\alpha')$ par exemple est aligné avec 40 couples tels que $(\eta\mu')$ et $(\eta'\mu)$, et par suite qu'il y a 5040 groupes alignés tels que $(\alpha\alpha')$, $(\eta\mu')$, $(\eta'\mu)$.

III. — Les séries quartiques à éléments singuliers.

343. Nous allons maintenant énumérer les diverses espèces de séries quartiques, et nous rechercherons de quelles façons on peut les considérer comme des enveloppes de séries quadratiques.

La série quartique générale, sans éléments singuliers, sera désignée par (A). Elle peut présenter les particularités suivantes : 1° admettre un ou plusieurs éléments tangents ayant avec f quatre éléments communs confondus; un tel élément tangent compte pour un élément tangent double, et pour deux éléments tangents stationnaires; 2° admettre une ou plusieurs séries quadratiques quadruplement tangentes, dont les éléments de contact sont confondus deux à deux; ou dont trois éléments de contact sont confondus; ou dont les quatre éléments de contact sont confondus.

Les réseaux F qui correspondent à une série quartique générale sont de l'une des espèces (*a*), (*b*), (*c*) ou (*d*) du n° 333, puisque sans cela f aurait un élément double.

D'une façon générale, si l'on considère l'un de ces réseaux, on notera les particularités suivantes : les séries q et k définies pré-

cédemment ont leurs six éléments communs distincts, la série q étant indécomposable; si un élément (y), commun aux séries q et k, est tel que l'élément tangent à q en (y) soit aussi tangent à k en un élément autre que (y), à (y) correspond un couple d'éléments bitangents, l'un de ces éléments ayant ses deux éléments de contact confondus; si l'élément tangent à q en (y) contient un élément double de k, à (y) correspond un couple d'éléments bitangents, tous deux à contacts confondus.

Si la série q touche en (y) un élément tangent stationnaire de k, à (y) correspond une série quadratique quadruplement tangente à f, avec trois éléments de contact confondus; si la série q touche en (y) un élément contenant un élément double de k, à (y) correspond une série quadratique quadruplement tangente à f, aux éléments de contact confondus deux à deux; si la série q touche en (y) un élément tangent à k en un élément double de k, à (y) correspond une série quadratique quadruplement tangente à f, aux quatre éléments de contact confondus.

On peut ajouter que si un élément (y) commun à q et k est inflexionnel pour k, à (y) correspond un couple d'éléments bitangents à f, l'un de ces éléments étant inflexionnel pour γ, l'autre tangent à f et appartenant à γ, de telle sorte que son élément de contact avec f soit tangent à γ.

344. Considérons maintenant une série quartique (B), douée d'un élément double ordinaire. Elle sera de la dixième classe et possédera dix-huit éléments inflexionnels, dont deux au plus pourront coïncider avec l'élément double. Par cet élément double on pourra mener six éléments tangents à f, avec éléments de contact différents de l'élément double; ces six éléments, comptés deux fois, peuvent être considérés comme éléments bitangents singuliers à f; il y a seize éléments bitangents à f d'une façon proprement dite. Les mêmes particularités que dans le cas général peuvent se présenter.

Si l'on veut appliquer à ce cas le Tableau général des systèmes de couples d'éléments bitangents, on voit tout de suite que, pour ne pas obtenir d'absurdités, il faut supposer par exemple que α et α' coïncident avec un élément bitangent singulier, et qu'il en est de même de β et β', γ et γ', δ et δ', ε et ε', ζ et ζ'. Le premier

groupe du Tableau ne fournit alors aucun système de séries quadratiques quadruplement tangentes à f; les trente groupes suivants fournissent trente systèmes de séries quadratiques quadruplement tangentes à f, chacun d'eux contenant un couple double formé avec des éléments bitangents singuliers différents, et quatre couples d'éléments bitangents proprement dits; enfin, les trente-deux derniers groupes se réduisent à seize, et chacun de leurs couples est composé d'un élément bitangent singulier et d'un élément bitangent proprement dit; ils correspondent à seize systèmes de séries quadratiques contenant l'élément double de f et triplement tangentes à f.

Aux trente systèmes de séries quadratiques quadruplement tangentes à f correspondent des réseaux qui sont, comme dans le cas précédent, des espèces (a), (b), (c) ou (d). Mais la série quadratique q qui correspond à f est ici tangente à la série k : deux des éléments communs à k et à q sont confondus, et pas davantage; si d'ailleurs k possède un élément singulier, la série q ne peut contenir cet élément. Si q touche k en un élément inflexionnel, l'un des éléments inflexionnels de f coïncide avec l'élément double; si q touche une série linéaire appartenant à k, dans les cas (c) ou (d), deux des éléments inflexionnels de f coïncident avec l'élément double. Les autres particularités du cas général continuent à s'appliquer.

Aux seize systèmes de séries triplement tangentes à f correspondent des réseaux qui ont un élément simplement singulier, c'est-à-dire des espèces (e) ou (h).

Les éléments communs aux séries k et q sont tous distincts; les observations déjà faites se transportent aisément à ce cas; de plus, on voit que si un élément tangent à q en (y) commun à k et q contient l'élément double de k, un élément inflexionnel de f coïncide avec l'élément double.

345. Si la série quartique f a un élément cuspidal, nous la désignerons par (C); elle est de la neuvième classe et possède seize éléments inflexionnels. Elle admet six éléments bitangents singuliers, c'est-à-dire contenant l'élément cuspidal, et chacun d'eux compte trois fois; il reste dix éléments bitangents proprement dits.

On peut appliquer le Tableau général en supposant que α, α' et η coïncident avec un élément bitangent singulier, et qu'il en est de même de β, β' et η'; γ, γ' et μ; δ, δ' et ν'; ε, ε' et ξ'; ζ, ζ' et π'. Par suite, on obtient d'abord quinze systèmes de séries quadruplement tangentes à f, comptant chacun deux fois; chacun de ces systèmes contient un couple triple d'éléments bitangents singuliers et trois couples d'éléments bitangents proprement dits; le réseau correspondant est des espèces (a), (b) ou (c), mais trois des éléments communs aux séries k et q sont confondus, et pas davantage; q ne peut d'ailleurs contenir aucun élément double de k.

On obtient ensuite quinze systèmes de séries triplement tangentes à f et contenant l'élément cuspidal, comptant chacun deux fois. Chacun de ces systèmes contient un couple double, formé de deux éléments bitangents singuliers, et quatre couples, formés par les quatre autres éléments bitangents singuliers associés à quatre éléments bitangents ordinaires. Le réseau correspondant à un de ces systèmes est de l'espèce (e); la série q contient l'élément double de k; ses quatre autres éléments communs avec k sont distincts.

Enfin, trois systèmes disparaissent.

346. Désignons par (D) une série quartique f à deux éléments doubles ordinaires; elle est de la huitième classe et possède douze éléments inflexionnels. Elle admet deux systèmes de quatre éléments bitangents singuliers, c'est-à-dire contenant un élément double, et chacun d'eux compte deux fois; elle admet aussi comme élément bitangent doublement singulier, comptant quatre fois, l'élément de seconde espèce commun aux deux éléments doubles; il reste huit éléments bitangents proprement dits.

Pour appliquer le Tableau général, on supposera que α, α', β, β' coïncident avec l'élément bitangent doublement singulier; que η et η', θ et θ', $\varkappa$ et $\varkappa'$, λ et λ' coïncident respectivement avec les éléments bitangents singuliers de l'un des systèmes, et qu'il en est de même de μ et μ', ν et ν', ξ et ξ', π et π' pour l'autre système.

On obtient alors, outre deux systèmes qui disparaissent :

1° Un système de séries quadratiques quadruplement tangentes à f, contenant un couple double formé de l'élément bitangent doublement singulier, et quatre couples d'éléments bitangents

proprement dits; le réseau correspondant est de l'espèce (b), (c) ou (d); la série q contient un élément double de k, les quatre autres éléments communs à k et à q étant distincts;

2° Douze systèmes de séries quadratiques quadruplement tangentes à f, contenant chacun deux couples doubles formés d'éléments bitangents singuliers, et deux couples formés d'éléments bitangents proprement dits; le réseau correspondant est de l'espèce (a), (b), (c) ou (d); la série q touche k en deux éléments distincts et les deux autres éléments communs à k et à q sont distincts; q ne contient aucun élément double de k;

3° Seize systèmes de séries quadratiques triplement tangentes à f; celles de huit d'entre eux contiennent un des éléments doubles de f et celles des huit autres contiennent l'autre élément double; chacun de ces systèmes compte deux fois; chacun d'eux contient un couple double formé par l'élément bitangent doublement singulier et un élément bitangent singulier, et quatre autres couples formés par quatre éléments bitangents singuliers associés avec quatre éléments bitangents proprement dits; le réseau correspondant est de l'espèce (e) ou (h); la série q est tangente à k et ne contient pas d'ailleurs l'élément double de k; les quatre autres éléments communs à k et à q sont distincts;

4° Quatre systèmes de séries quadratiques doublement tangentes à f et contenant les deux éléments doubles de f; chacun d'eux compte quatre fois, contient quatre couples d'éléments bitangents singuliers et deux couples formés chacun de l'élément bitangent doublement singulier et d'un élément bitangent ordinaire; le réseau correspondant est de l'espèce (f) ou (j); les six éléments communs aux séries q et k sont distincts; comme k se décompose, ces six éléments communs se partagent en deux groupes, l'un de deux, l'autre de quatre éléments; les couples d'éléments bitangents correspondants sont indiqués par ce qui précède.

347. Envisageons une série quartique (E) possédant un élément double ordinaire et un élément cuspidal; elle est de la septième classe et possède dix éléments inflexionnels. Elle admet un élément bitangent doublement singulier comptant six fois, quatre éléments bitangents singuliers comptant trois fois, trois éléments

bitangents singuliers comptant deux fois et quatre éléments bitangents proprement dits.

On appliquera le Tableau général avec les hypothèses précédentes et supposant, en outre, que η coïncide avec α, γ' avec μ, δ' avec ν, ε' avec ξ, ζ' avec π. Donc α désigne l'élément bitangent doublement singulier; θ, $\varkappa$, λ sont les éléments bitangents singuliers doubles; μ, ν, ξ, π les éléments bitangents singuliers triples; γ, δ, ε, ζ les éléments bitangents proprement dits.

Alors, outre quatre systèmes qui disparaissent, on obtient :

1° Six systèmes de séries quadratiques quadruplement tangentes à f; les couples d'éléments bitangents contenus dans un système sont, par exemple, $\mu\nu$ trois fois, $\varkappa\lambda$ deux fois et $\gamma\delta$; le réseau correspondant est de l'espèce (a), (b) ou (c); les éléments communs aux séries q et k forment trois groupes distincts de un, deux et trois éléments; q ne contient aucun élément double de k;

2° Un système, comptant trois fois, de séries quadratiques triplement tangentes à f et contenant l'élément cuspidal de f; les couples de ce système sont $\alpha\alpha$ deux fois, $\gamma\mu$, $\delta\nu$, $\varepsilon\xi$, $\zeta\pi$; le réseau correspondant est de l'espèce (h); la série q contient l'élément double de k; les quatre autres éléments communs à k et à q sont distincts;

3° Six systèmes, chacun comptant trois fois, de séries quadratiques analogues aux précédentes; mais les couples d'un de ces systèmes sont, par exemple, $\alpha\theta$ deux fois, $\xi\pi$ deux fois, $\gamma\nu$ et $\delta\mu$; le réseau correspondant est de l'espèce (e); la série q contient l'élément double de k et est tangente à k; les deux autres éléments communs à q et k sont distincts;

4° Quatre systèmes, chacun comptant deux fois, de séries quadratiques triplement tangentes à f et contenant l'élément double de f; les couples d'un de ces systèmes sont, par exemple, $\alpha\mu$ trois fois, $\delta\theta$, $\varepsilon\varkappa$, $\zeta\lambda$; le réseau correspondant est de l'espèce (e) ou (h); la série q ne contient pas l'élément double de k et a trois éléments communs confondus avec k; les autres éléments communs à q et k sont distincts;

5° Quatre systèmes, comptant chacun six fois, de séries quadratiques doublement tangentes à f et contenant les deux éléments doubles de f; les couples d'un de ces systèmes sont, par exemple, $\alpha\mu$ deux fois, $\alpha\gamma$, $\theta\nu$, $\varkappa\xi$, $\lambda\pi$; le réseau correspondant est de

l'espèce (f); la série q est assujettie simplement à contenir un élément double de k; les autres éléments communs à q et k forment deux groupes distincts, faciles à interpréter.

348. Si la série quartique (F) a deux éléments cuspidaux, elle est de sixième classe et n'a que huit éléments inflexionnels; elle admet un élément bitangent doublement singulier comptant neuf fois, deux groupes de trois éléments bitangents singuliers comptant trois fois et un seul élément bitangent proprement dit. On passera du cas précédent à celui-ci en supposant que α et μ, δ et θ, ε et $\varkappa$, ζ et λ coïncident respectivement. On trouve alors, outre six systèmes qui disparaissent :

1° Trois systèmes de séries quadratiques quadruplement tangentes à f; les couples d'éléments bitangents contenus dans un système sont, par exemple, $\theta\varkappa$ trois fois et $\nu\xi$ trois fois; le réseau correspondant est de l'espèce (a) ou (b); la série q a ses éléments communs avec k confondus trois par trois et ne contient pas d'élément double de k;

2° Six systèmes, comptant chacun trois fois, de séries quadratiques triplement tangentes à f et contenant : celles de trois d'entre eux, un élément cuspidal de f; celles des trois autres, l'autre élément cuspidal de f; les couples d'un système sont, par exemple, $\alpha\theta$ trois fois, $\xi\pi$ deux fois, $\gamma\nu$; le réseau correspondant est de l'espèce (e); la série q contient l'élément double de k, et trois des autres éléments communs à q et à k sont confondus;

3° Trois systèmes, comptant chacun neuf fois, de séries quadratiques doublement tangentes à f et contenant les deux éléments cuspidaux; les couples d'un système sont, par exemple, $\alpha\theta$ deux fois, $\alpha\nu$ deux fois, $\varkappa\pi$ et $\lambda\xi$; le réseau correspondant est de l'espèce (f) et la série q contient les deux éléments doubles de k;

4° Un système, comptant neuf fois, de séries quadratiques analogues aux précédentes; les couples de ce système sont $\alpha\alpha$ deux fois, $\alpha\gamma$, $\theta\nu$, $\varkappa\xi$, $\lambda\pi$; le réseau correspondant est de l'espèce (j) et la série q contient l'élément double de k.

349. Une série quartique (G), à trois éléments doubles ordinaires non alignés, est de la sixième classe et possède six éléments

inflexionnels; elle admet trois éléments bitangents doublement singuliers, comptant chacun quatre fois, trois groupes de deux éléments bitangents singuliers, comptant chacun deux fois, et quatre éléments bitangents proprement dits.

On passe du cas général à celui-ci en supposant, par exemple, que les systèmes qui disparaissent, et qui correspondent aux trois éléments doubles, sont formés des couples $\alpha\alpha$, $\alpha\alpha$, $\gamma\gamma$, $\gamma\gamma$, $\varepsilon\varepsilon$, $\zeta\zeta$; $\alpha\alpha$, $\alpha\alpha$, $\eta\eta_1$, $\eta\eta_1$, $\varkappa\varkappa$, $\lambda\lambda$; $\gamma\gamma$, $\gamma\gamma$, $\eta\eta_1$, $\eta\eta_1$, $\xi\xi$, $\pi\pi$. μ, ν, μ', ν' sont les éléments bitangents proprement dits. On obtient, outre les trois systèmes qui disparaissent :

1° Un système de séries quadratiques quadruplement tangentes à f, contenant comme couples d'éléments bitangents $\varepsilon\zeta$ deux fois, $\varkappa\lambda$ deux fois et $\xi\pi$ deux fois; le réseau correspondant est de l'espèce (a), (b), (c) ou (d); la série q est tangente trois fois à k et ne contient aucun élément double de k; en outre, dans le cas (a), la série q ne doit pas être, parmi les séries à triple contact pour k, une de celles qui correspondent à la série l dont k est la hessienne, sans quoi les éléments doubles de f seraient alignés; dans le cas (d), on voit que les éléments inflexionnels de f sont confondus deux par deux avec les éléments doubles;

2° Trois systèmes analogues au précédent; les couples de l'un d'eux sont $\alpha\alpha$ deux fois, $\xi\pi$ deux fois et $\mu\mu'$, $\nu\nu'$; le réseau correspondant est de l'espèce (b), (c) ou (d); la série q contient un élément double de k, et est encore simplement tangente à k;

3° Douze systèmes, comptant chacun deux fois, de séries triplement tangentes à f et contenant l'un des éléments doubles de f; les couples d'un de ces systèmes sont, par exemple, $\alpha\varkappa$ deux fois, $\gamma\xi$ deux fois, $\varepsilon\mu'$, $\zeta\nu'$; le réseau correspondant est de l'espèce (e) ou (h); la série q est doublement tangente à k et ne contient pas l'élément double de k;

4° Six systèmes, comptant chacun quatre fois, de séries quadratiques doublement tangentes à f et contenant deux des éléments doubles de f; les couples d'un de ces systèmes sont, par exemple, $\alpha\gamma$ deux fois, $\varkappa\xi$, $\lambda\pi$, $\eta\mu$, $\eta\nu$; le réseau correspondant est de l'espèce (f) ou (j); la série q touche simplement la série quadratique qui fait partie de k et ne contient pas d'élément double de k;

5° Un système, comptant huit fois, de séries quadratiques tan-

gentes à f et contenant les trois éléments doubles de f; les couples de ce système sont $\alpha\pi$, $\alpha\xi$, $\gamma\varkappa$, $\gamma\lambda$, $\eta\varepsilon$, $\eta\zeta$; le réseau correspondant est de l'espèce (g), et les éléments communs à q et k sont tous distincts; si q est conjuguée par rapport à la suite triple qui constitue k, les éléments inflexionnels de f sont confondus avec les éléments doubles.

350. Supposons que l'un des éléments doubles devienne cuspidal; on obtient ainsi une quartique (II), de cinquième classe, à quatre éléments inflexionnels; il y a trois éléments bitangents doublement singuliers comptant l'un quatre fois, et les deux autres six fois; quatre éléments bitangents singuliers dont deux comptent trois fois, et les deux autres deux fois; enfin deux éléments bitangents proprement dits. On passe du cas précédent à celui-ci en supposant que γ et ζ, η et λ, ν et π, ν' et ξ coïncident respectivement.

On obtient, outre cinq systèmes qui disparaissent :

1° Un système de séries quadratiques quadruplement tangentes à f, dont les couples d'éléments bitangents sont $\alpha\alpha$ deux fois, $\xi\pi$ trois fois, et $\mu\mu'$; le réseau correspondant est de l'espèce (b) ou (c); la série q contient un élément double de k, et trois des autres éléments communs à q et k sont confondus;

2° Quatre systèmes de séries quadratiques triplement tangentes à f et contenant un élément double; ces systèmes comptent deux fois; l'un d'eux, par exemple, contient les couples $\alpha\varepsilon$ deux fois, $\eta\xi$ trois fois, $\varkappa\mu$; le réseau correspondant est de l'espèce (e) ou (h); les éléments communs à q et k sont répartis en trois groupes de un, deux et trois éléments; q ne contient pas l'élément double de k;

3° Un système, comptant trois fois, de séries quadratiques triplement tangentes à f et contenant l'élément cuspidal; les couples de ce système sont $\gamma\varepsilon$, $\eta\varkappa$, $\xi\pi$ chacun trois fois; le réseau correspondant est de l'espèce (e); la série q contient l'élément double de k, et est simplement tangente à k en deux autres éléments distincts;

4° Deux systèmes comptant trois fois, et analogues au précédent; les couples d'un de ces systèmes sont $\gamma\gamma$ deux fois, $\eta\varkappa$ deux fois, $\xi\mu$, $\pi\mu'$; le réseau correspondant est de l'espèce (h); la série q

contient l'élément double de k, et est simplement tangente à k une fois;

5° Un système, comptant quatre fois, de séries quadratiques doublement tangentes à f, et contenant les deux éléments doubles; les couples de ce système sont $\gamma\eta$ trois fois, $\varepsilon\varkappa$, $\alpha\mu$, $\alpha\mu'$; le réseau correspondant est de l'espèce (f) ou (j); la série q est osculatrice à la série quadratique qui fait partie de k, sans contenir un élément double de k;

6° Quatre systèmes, comptant chacun six fois, de séries quadratiques doublement tangentes à f et contenant l'élément cuspidal et un élément double; les couples d'un tel système seront, par exemple, $\alpha\gamma$ deux fois, $\eta\pi$ deux fois, $\varkappa\xi$, $\eta\mu$; le réseau correspondant est de l'espèce (f); la série q touche la série quadratique qui fait partie de k, et contient un élément double de k;

7° Un système, comptant douze fois, de séries quadratiques tangentes à f, et contenant les trois éléments doubles; les couples de ce système sont $\gamma\eta$ deux fois, $\gamma\varkappa$, $\eta\varepsilon$, $\alpha\xi$, $\alpha\pi$; le réseau correspondant est de l'espèce (g); la série q contient un élément double de k.

351. Si un second élément double devient cuspidal, la série f, alors d'espèce (I), est de quatrième classe, avec deux éléments inflexionnels; il y a trois éléments bitangents doublement singuliers dont l'un compte neuf fois, et les deux autres six fois; deux éléments bitangents singuliers comptant trois fois; enfin, un seul élément bitangent proprement dit.

On passe du cas précédent à celui-ci en faisant coïncider α et ε, η et π, $\varkappa$ et μ'; et l'on obtient, outre sept systèmes qui disparaissent :

1° Un système, comptant deux fois, de séries quadratiques triplement tangentes à f et contenant l'élément double; les couples de ce système sont $\alpha\varkappa$ et $\gamma\xi$ trois fois; le réseau correspondant est de l'espèce (e) ou (h); la série q a ses éléments communs avec k confondus trois par trois;

2° Deux systèmes, comptant trois fois, de séries quadratiques triplement tangentes à f, et contenant un élément cuspidal; les couples d'un des systèmes sont $\alpha\alpha$ deux fois, $\eta\xi$ trois fois, et $\varkappa\mu$; le réseau correspondant est de l'espèce (h); la série q contient

l'élément double de k et a en commun avec k trois éléments confondus;

3° Deux systèmes, comptant six fois, de séries quadratiques doublement tangentes à f, et contenant l'élément double et un élément cuspidal; les couples de l'un de ces systèmes sont $\alpha\alpha$ deux fois, $\gamma\gamma_1$ trois fois et $\alpha\mu$; le réseau correspondant est de l'espèce (f); la série q contient un élément double de k et est osculatrice à la série quadratique qui figure dans k;

4° Un système, comptant neuf fois, de séries quadratiques doublement tangentes à f, et contenant les deux éléments cuspidaux; les couples de ce système sont $\alpha\gamma$, $\gamma_1\varkappa$, $\gamma_1\xi$, chacun deux fois; le réseau correspondant est de l'espèce (f); la série q contient les deux éléments doubles de k et touche k;

5° Un système comptant neuf fois et semblable au précédent; les couples de ce système sont $\gamma_1\gamma_1$ deux fois, $\alpha\gamma$ deux fois, $\varkappa\xi$, $\gamma_1\mu$; le réseau correspondant est de l'espèce (j); la série q contient l'élément double de k et touche la série quadratique qui figure dans k;

6° Un système, comptant dix-huit fois, de séries quadratiques tangentes à f, et contenant les trois éléments singuliers de f; les couples du système sont $\alpha\gamma_1$ deux fois, $\gamma\gamma_1$ deux fois, $\alpha\xi$, $\gamma\varkappa$; le réseau correspondant est de l'espèce (g); la série q contient deux éléments doubles de k.

352. L'espèce (J) correspond aux séries quartiques à trois éléments cuspidaux; elles sont de troisième classe, et n'ont pas d'élément inflexionnel; elles possèdent trois éléments bitangents doublement singuliers comptant chacun neuf fois et un élément bitangent proprement dit.

On passe du cas précédent à celui-ci en faisant coïncider α et $\varkappa$, γ et ξ. On trouve alors, outre neuf systèmes qui disparaissent :

1° Trois systèmes, comptant chacun neuf fois, de séries quadratiques doublement tangentes à f et contenant deux des éléments cuspidaux; les couples d'un de ces systèmes sont $\alpha\alpha$ deux fois, $\gamma\gamma_1$ trois fois, $\alpha\mu$; le réseau correspondant est de l'espèce (j); la série q contient l'élément double de k et est osculatrice à la série quadratique qui figure dans k;

2° Un système, comptant vingt-sept fois, de séries quadratiques

tangentes à f et contenant les trois éléments cuspidaux; les couples de ce système sont $\alpha\gamma$, $\gamma\eta$, $\alpha\eta$ chacun deux fois; le réseau correspondant est de l'espèce (g); la série q contient les trois éléments doubles de k.

353. Une série cubique et une série linéaire forment une série quartique (K) à trois éléments doubles alignés. La série linéaire est un élément bitangent triplement singulier, comptant quatre fois; les éléments tangents à la série cubique contenant les éléments doubles de f sont douze éléments bitangents singuliers, comptant chacun deux fois.

On passe du Tableau général à ce cas en faisant coïncider α, β, α', β' avec l'élément bitangent triplement singulier, et supposant que γ et γ', δ et δ', ..., π et π', sont respectivement identiques.

Outre trois systèmes qui disparaissent, on a :

1° Douze systèmes de séries quadratiques quadruplement tangentes à f; l'un d'eux contient les couples $\gamma\delta$, $\eta\theta$, $\xi\pi$ chacun deux fois; le réseau correspondant est de l'espèce (a): la série q est trois fois tangente à k et correspond à la série particulière l dont k est la hessienne, comme on le voit en cherchant la série quadratique de l'espace Y qui correspond à une série linéaire de l'espace X;

2° Douze systèmes, comptant chacun quatre fois, de séries quadratiques doublement tangentes à f et contenant deux des éléments doubles de f; les couples d'un de ces systèmes sont $\alpha\gamma$ deux fois, $\eta\mu$, $\theta\nu$, $\kappa\xi$, $\lambda\pi$; le réseau correspondant est de l'espèce (f) ou (j). et la série q est tangente à la série linéaire contenue dans k.

354. Une série quartique de l'espèce (L) sera composée de deux séries quadratiques quelconques; elle a donc quatre éléments doubles dont trois ne sont pas alignés. Elle possède six éléments bitangents doublement singuliers, comptant chacun quatre fois, et quatre éléments bitangents proprement dits. On passe du cas (G) à celui-ci en faisant coïncider ε et ζ, κ et λ, ξ et π.

Outre quatre systèmes qui disparaissent, et un autre comptant huit fois, et auquel ne correspond pas de réseau déterminé, on trouve :

1° Trois systèmes de séries quadratiques quadruplement tangentes à f; l'un d'eux contient les couples $\alpha\varkappa$ deux fois, $\xi\xi$ deux fois, $\mu\mu'$ et $\nu\nu'$; le réseau correspondant est de l'espèce (c) ou (d); la série q contient deux éléments doubles de k;

2° Douze systèmes, comptant chacun quatre fois, de séries doublement tangentes à f, et contenant deux éléments doubles de f; les couples de l'un des systèmes sont $\alpha\gamma$ deux fois, $\varkappa\xi$ deux fois, $\eta\mu$, $\eta\nu$; le réseau correspondant est de l'espèce (f) ou (j); la série q est doublement tangente à la série quadratique qui fait partie de k.

355. Une série quartique composée d'une série cubique à élément double et d'une série linéaire, a quatre éléments doubles dont trois sont alignés; elle est de l'espèce (M). Elle a un élément bitangent triplement singulier comptant quatre fois, trois éléments bitangents doublement singuliers comptant quatre fois, et six éléments bitangents singuliers comptant deux fois. On passe du cas (G) à celui-ci en faisant coïncider ξ et π, μ et μ', ν et ν'.

Outre quatre systèmes qui disparaissent, il existe :

1° Trois systèmes de séries quadratiques quadruplement tangentes à f; l'un d'eux contient les couples $\gamma\gamma$, $\varkappa\lambda$, $\mu\nu$, chacun deux fois; le réseau correspondant est de l'espèce (b), et la série q, doublement tangente à k, contient en outre l'élément double de k;

2° Quatre systèmes, comptant chacun deux fois, de séries quadratiques triplement tangentes à f et contenant l'élément double de la série cubique qui fait partie de f; les couples de l'un de ces systèmes sont $\gamma\varepsilon$, $\eta\varkappa$, $\eta\lambda$, chacun deux fois; le réseau correspondant est de l'espèce (e), et la série q est trois fois tangente à k;

3° Six systèmes, comptant chacun quatre fois, de séries quadratiques doublement tangentes à f, et contenant deux des éléments doubles alignés de f; les couples de l'un de ces systèmes sont $\alpha\varepsilon$ deux fois, $\eta\xi$ deux fois, $\varkappa\mu$, $\lambda\nu$; le réseau correspondant est de l'espèce (f) ou (j), la série q étant tangente à la fois à la série quadratique et à la série linéaire qui constituent k;

4° Trois systèmes, comptant chacun huit fois, de séries quadratiques tangentes à f, contenant l'élément double de la série cubique qui fait partie de f, et deux des éléments doubles alignés de f; les couples d'un de ces systèmes sont $\alpha\gamma$ deux fois, $\eta\mu$, $\eta\nu$,

$\varkappa\xi$, $\lambda\xi$; le réseau correspondant est de l'espèce (g), la série q étant tangente à k.

356. On obtiendra l'espèce (N) en supposant que la série cubique du numéro précédent a un élément cuspidal; alors f a un élément bitangent triplement singulier, comptant quatre fois; trois éléments bitangents doublement singuliers comptant six fois, et trois éléments bitangents singuliers comptant deux fois. On passe du cas (H) à celui-ci en faisant coïncider ξ et π, μ et μ'.

On a, outre six systèmes qui disparaissent :

1° Trois systèmes, comptant trois fois, de séries quadratiques triplement tangentes à f, et contenant l'élément cuspidal; les couples de l'un d'eux sont $\gamma\gamma$, $\eta\varkappa$, $\xi\mu$, chacun deux fois; le réseau correspondant est de l'espèce (h), la série q contenant l'élément double de k et étant doublement tangente à k;

2° Trois systèmes, comptant quatre fois, de séries quadratiques doublement tangentes à f, et contenant deux éléments doubles de f; les couples de l'un d'eux sont $\alpha\varepsilon$ deux fois, $\eta\xi$ trois fois, $\varkappa\mu$; le réseau correspondant est de l'espèce (f) ou (j), la série q étant osculatrice à la série quadratique qui fait partie de k, et tangente à la série linéaire qui complète k;

3° Trois systèmes, comptant douze fois, de séries quadratiques tangentes à f et contenant, outre l'élément cuspidal, deux éléments doubles; les couples de l'un de ces systèmes sont $\alpha\gamma$ deux fois, $\eta\xi$ deux fois, $\eta\mu$, $\varkappa\xi$; le réseau correspondant est de l'espèce (g); la série q contient un élément double de k et est tangente à k.

357. Une série quartique de l'espèce (O), à cinq éléments doubles, se compose d'une série quadratique et de deux séries linéaires; elle admet deux éléments bitangents triplement singuliers, quatre doublement singuliers et deux singuliers, chacun d'eux comptant quatre fois, sauf les deux derniers qui ne comptent que deux fois. On déduit ce cas du cas (L) en faisant coïncider μ et μ', ν et ν'.

On trouve, outre les cinq systèmes qui disparaissent, et celui, comptant huit fois, qui ne correspond pas à un réseau déterminé :

1° Deux systèmes de séries quadratiques quadruplement tan-

gentes à f; les couples d'un des systèmes sont $\gamma\gamma$, $\varkappa\varkappa$, $\mu\nu$ deux fois; le réseau correspondant est de l'espèce (c), la série q contenant les éléments doubles de k et étant tangente à k;

2° Quatre systèmes, comptant quatre fois, de séries quadratiques doublement tangentes à f et contenant deux éléments doubles de f, communs à la série quadratique et à l'une des séries linéaires qui forment f; les couples de l'un d'eux sont $\gamma\varepsilon$ deux fois, $\eta\varkappa$ deux fois, $\xi\mu$ deux fois; le réseau correspondant est de l'espèce (f), la série q étant trois fois tangente à k.

3° Quatre systèmes, comptant huit fois, de séries quadratiques tangentes à f et contenant trois éléments doubles non alignés, n'appartenant pas ensemble à la série quadratique qui figure dans f; les couples de l'un de ces systèmes sont $\alpha\gamma$ deux fois, $\varkappa\xi$ deux fois, $\eta\mu$, $\eta\nu$; le réseau correspondant est de l'espèce (g), la série q étant doublement tangente à k.

358. La dernière espèce générale (P) de séries quartiques comprend celles qui sont composées de quatre séries linéaires et, par suite, à six éléments doubles; elles admettent quatre éléments bitangents triplement singuliers et trois doublement singuliers; chacun d'eux compte quatre fois. On passe du cas précédent à celui-ci en supposant l'identité de μ et ν.

On trouve, outre six systèmes qui disparaissent et trois systèmes comptant huit fois, auxquels ne correspondent pas de réseaux déterminés :

1° Un système de séries quadratiques quadruplement tangentes à f, contenant les couples $\varepsilon\varepsilon$, $\eta\eta$, $\mu\mu$, chacun deux fois; le réseau correspondant est de l'espèce (d) et la série q contient les trois éléments doubles de k;

2° Quatre systèmes, comptant huit fois, de séries quadratiques tangentes à f et contenant trois éléments doubles non alignés; les couples d'un des systèmes sont $\alpha\gamma$, $\varkappa\xi$, $\eta\mu$ deux fois chacun; le réseau correspondant est de l'espèce (g), et la série q est trois fois tangente à k.

359. Nous avons examiné tous les cas dans lesquels la série quartique f a des éléments doubles ordinaires ou cuspidaux comme seules singularités. Mais elle peut encore posséder des singularités

d'un ordre plus élevé que nous allons passer en revue, en nous bornant toutefois aux cas où la série f est indécomposable : l'étude des autres cas sera en effet rendue très facile par ce que nous allons dire.

Si une série quartique indécomposable a un élément double à éléments tangents confondus, et si cet élément n'est pas simplement cuspidal, on peut, en choisissant convenablement les coordonnées, écrire son équation sous la forme

$$\begin{aligned} & x_1^2 x_3^2 + 2x_1 x_3(a x_2^2 + b x_2 x_3 + c x_3^2) \\ & \quad + x_2^4 + d x_2^3 x_3 + e x_2^2 x_3^2 + f x_2 x_3^3 + h x_3^4 = 0; \end{aligned}$$

les éléments (ξ) contenant l'élément singulier O_1, et tangents à f en un élément autre que O_1, ont pour équation

$$\begin{aligned} \Theta = {} & (1 - a^2) x_2^4 + (d - 2ab) x_2^3 x_3 \\ & + (e - b^2 - 2ac) x_2^2 x_3^2 + (f - 2bc) x_2 x_3^3 + (h - c^2) x_3^4 = 0. \end{aligned}$$

Ce sont les particularités de cette équation qui nous fourniront les divers cas particuliers possibles où la série f a un élément double qui n'est ni ordinaire ni cuspidal.

Remarquons tout d'abord que le premier membre de cette équation ne peut être un carré parfait sans que la série f se décompose, puisque son équation prendrait alors la forme

$$(x_1 x_3 + a x_2^2 + b x_2 x_3 + c x_3^2)^2 + g^2 = 0,$$

g étant une forme quadratique en x_2 et x_3.

Nous avons les espèces suivantes :

A′. L'équation $\Theta = 0$, où l'inconnue est $\frac{x_3}{x_2}$, n'a pas de racine nulle, et ses racines sont distinctes.

Alors, on vérifie sans peine les résultats suivants : la série f n'a pas d'autre élément singulier que O_1, est de la huitième classe, admet douze éléments inflexionnels dont aucun ne peut coïncider avec O_1 (et il en est de même dans les cas suivants), et enfin admet six éléments bitangents proprement dits ; les quatre éléments tangents à f contenant O_1 sont éléments bitangents singuliers comptant quatre fois ; l'élément tangent à f en O_1 est bitangent singulier spécial, comptant six fois.

B′. L'équation $\Theta = 0$ n'a pas de racine nulle et admet une racine double.

Alors la série f a un élément double ordinaire autre que O_1; elle est de la sixième classe, admet six inflexions et deux éléments bitangents proprement dits; il existe deux couples d'éléments bitangents singuliers comptant les uns quatre fois, les autres deux fois; un élément bitangent singulier spécial comptant six fois, et un élément bitangent doublement singulier comptant huit fois.

C'. L'équation $\Theta = 0$ *n*'a pas de racine nulle et admet une racine triple.

La série f admet un élément cuspidal autre que O_1; elle est de cinquième classe et n'a que quatre inflexions; il n'y a aucun élément bitangent proprement dit, mais seulement un tel élément, singulier, comptant quatre fois; deux singuliers, comptant trois fois; un singulier spécial comptant six fois; et un doublement singulier comptant douze fois.

D'. L'équation $\Theta = 0$ a une racine nulle, et les autres sont distinctes.

La série f n'a pas d'autre élément singulier que O_1, est de la septième classe et admet neuf inflexions, ainsi que trois éléments bitangents proprement dits; les trois éléments tangents à f contenant O_1 sont éléments bitangents singuliers comptant cinq fois; l'élément tangent à f en O_1 est bitangent singulier spécial, comptant dix fois.

E'. L'équation $\Theta = 0$ a une racine nulle et une racine double.

La série f a un élément double ordinaire autre que O_1; elle est de la cinquième classe, admet trois inflexions et un seul élément bitangent proprement dit; elle admet aussi deux éléments bitangents singuliers comptant l'un deux fois, l'autre cinq fois, un élément bitangent doublement singulier et un autre singulier spécial, comptant chacun dix fois.

F'. L'équation $\Theta = 0$ a une racine nulle et une racine triple.

La série f a un élément cuspidal autre que O_1; elle est de la quatrième classe, admet une seule inflexion et ne possède aucun élément tangent proprement dit, mais un tel élément singulier comptant trois fois, un autre doublement singulier comptant quinze fois, et un singulier spécial, comptant dix fois.

G'. L'équation $\Theta = 0$ a deux racines nulles.

La série f n'a d'autre élément singulier que O_1; elle est de la

sixième classe et admet six inflexions; elle possède un seul élément bitangent proprement dit, deux éléments bitangents singuliers comptant six fois, et un élément bitangent singulier spécial, comptant quinze fois.

H'. L'équation $\Theta = 0$ a trois racines nulles.

La série f n'a d'autre élément singulier que O_1; elle est de cinquième classe et admet trois inflexions; elle ne possède aucun élément bitangent proprement dit, mais un tel élément singulier comptant sept fois, et un autre singulier spécial, comptant vingt et une fois.

360. On peut maintenant supposer à f un élément triple et ceci donne lieu aux trois espèces suivantes :

I'. Les éléments tangents en l'élément triple O_1 sont distincts.

Alors la série f est de la sixième classe et admet six éléments inflexionnels et quatre éléments bitangents proprement dits, avec trois éléments bitangents singuliers comptant chacun huit fois.

J'. Deux des éléments tangents en O_1 sont confondus.

La série f est de cinquième classe, admet quatre inflexions et deux éléments bitangents proprement dits; des deux éléments bitangents singuliers, l'un compte seize fois, l'autre dix fois.

K'. Les éléments tangents en O_1 sont tous confondus.

La série f est de quatrième classe, admet deux inflexions et un élément bitangent proprement dit; l'élément tangent en O_1 est un élément bitangent singulier comptant vingt-sept fois.

361. Indiquons maintenant comment les séries quartiques précédentes peuvent être considérées comme des enveloppes de séries quadratiques.

A'. On peut passer du cas général (D) à celui-ci en faisant coïncider α avec γ et γ', η avec μ, θ avec ν, $\varkappa$ avec ξ, λ avec π. On obtient, outre six systèmes qui disparaissent :

1° Un système de séries quadratiques quadruplement tangentes à f, dont les couples sont $\alpha\alpha$ trois fois, $\delta\delta'$, $\varepsilon\varepsilon'$, $\zeta\zeta'$; le réseau correspondant est d'espèce (b), (c) ou (d); la série q contient un élément double de k et touche k en cet élément;

2° Six systèmes de séries quadratiques quadruplement tangentes à f; les couples de l'un d'eux sont $\eta\theta$ quatre fois, $\varepsilon\zeta'$, $\varepsilon'\zeta$; le réseau

correspondant est de l'espèce (a), (b), ou (c), la série q ayant quatre éléments communs confondus avec k;

3° Huit systèmes, comptant quatre fois, de séries quadratiques triplement tangentes à f et contenant l'élément singulier; les couples de l'un d'eux sont $\alpha\eta$ trois fois, $\delta\theta$, $\varepsilon\varkappa$, $\zeta\lambda$; le réseau correspondant est de l'espèce (e), la série q contenant l'élément double de k et touchant k en cet élément;

4° Trois systèmes, comptant six fois, de séries quadratiques doublement tangentes à f et contenant l'élément double de f, avec élément tangent commun; les couples de l'un d'eux sont $\eta\theta$ deux fois, $\varkappa\lambda$ deux fois, $\alpha\delta$, $\alpha\delta'$; le réseau correspondant est de l'espèce (i) ou (k), la série q étant quelconque.

B'. On peut passer du cas général (G) à celui-ci en faisant coïncider γ et η, ε et $\varkappa$, ζ et λ, α avec μ et μ'.

On trouve, avec sept systèmes qui disparaissent :

1° Un système de séries quadratiques quadruplement tangentes à f, dont les couples sont $\varepsilon\zeta$ quatre fois, $\xi\pi$ deux fois; le réseau correspondant est de l'espèce (a), (b) ou (c); la série q a ses éléments communs avec k répartis en deux groupes de deux et quatre éléments; dans le cas (a), on évitera les séries q qui donneraient lieu à l'ensemble d'une série cubique et d'une série linéaire;

2° Un système analogue au précédent, dont les couples sont $\alpha\alpha$ trois fois, $\xi\pi$ deux fois, $\nu\nu'$; le réseau correspondant est de l'espèce (b), (c) ou (d); la série q contient un élément double de k, y touche k et touche encore k en un autre élément;

3° Deux systèmes comptant deux fois de séries triplement tangentes à f, et contenant l'élément double ordinaire de f; les couples de l'un sont $\gamma\varepsilon$ quatre fois, $\xi\nu$, $\pi\nu'$; le réseau correspondant est de l'espèce (e) ou (h), la série q ayant quatre éléments communs confondus avec k;

4° Quatre systèmes comptant quatre fois de séries triplement tangentes à f, et contenant l'élément singulier spécial de f; les couples de l'un d'eux sont $\alpha\varepsilon$ trois fois, $\gamma\pi$ deux fois, $\zeta\nu$; le réseau correspondant est de l'espèce (e); la série q contient l'élément singulier de k, y touche k et touche encore une fois k;

5° Un système, comptant six fois, de séries doublement tangentes à f, dont les couples sont $\gamma\gamma$ deux fois, $\varepsilon\zeta$ deux fois, $\alpha\nu$, $\alpha\nu'$;

de sorte que ces séries contiennent, avec élément tangent commun, l'élément singulier spécial de f; le réseau correspondant est de l'espèce (i) ou (k); la série q contient l'un des éléments auxquels correspond une série linéaire double, et cet élément est commun deux fois seulement à q et k;

6° Deux systèmes, comptant huit fois, de séries doublement tangentes à f, et contenant les deux éléments singuliers; les couples de l'un deux sont $\alpha\gamma$ trois fois, $\varepsilon\xi$, $\zeta\pi$, $\gamma\nu$; le réseau correspondant est de l'espèce (f); la série q contient un élément double de k, et y touche la série quadratique qui fait partie de k;

7° Un système comptant douze fois, de séries tangentes à f, contenant les éléments singuliers de f, et ayant même élément tangent en l'élément singulier spécial; le réseau correspondant est de l'espèce (l), la série q étant quelconque: les couples du système sont $\gamma\varepsilon$ deux fois, $\gamma\zeta$ deux fois, $\alpha\xi$, $\alpha\pi$.

C'. On passe du cas général (H) à celui-ci en faisant coïncider α avec μ et μ', γ avec α_1, ε avec α.

Outre neuf systèmes qui disparaissent, on trouve :

1° Un système de séries quadratiques quadruplement tangentes à f, dont les couples sont $\alpha\alpha$ trois fois, $\xi\pi$ trois fois; le réseau correspondant est de l'espèce (b) ou (c); la série q touche k en un élément double de k: les trois autres éléments communs à k et q sont confondus;

2° Un système, comptant trois fois, de séries triplement tangentes à f, et contenant l'élément cuspidal; les couples sont $\gamma\varepsilon$ quatre fois, $\xi\pi$ deux fois; le réseau correspondant est de l'espèce (e); la série q contient l'élément double de k, et les quatre autres éléments communs à q et k sont confondus;

3° Deux systèmes comptant quatre fois de séries triplement tangentes à f, et contenant l'élément singulier spécial de f; les couples de l'un d'eux sont $\alpha\varepsilon$ et $\gamma\xi$, chacun trois fois; le réseau correspondant est de l'espèce (e): la série q contient l'élément double de k et y est tangente à k; les trois autres éléments communs à q et k sont confondus;

4° Deux systèmes, comptant douze fois, de séries doublement tangentes à f, et contenant les éléments singuliers de f; les couples de l'un deux sont $\alpha\gamma$ trois fois, $\gamma\xi$ deux fois, $\varepsilon\pi$; le réseau corres-

pondant est de l'espèce (f); la série q touche k en un élément double et contient l'autre élément double;

5° Un système, comptant dix-huit fois, de séries tangentes à f et contenant les éléments doubles de f, avec même élément tangent et l'élément singulier spécial; les couples sont $\gamma\gamma$ deux fois, $\gamma\varepsilon$ deux fois, $\alpha\xi$, $\alpha\pi$; le réseau correspondant est de l'espèce (l); la série q contient l'élément de k auquel correspond une série linéaire double.

D'. On passe du cas général (E) à celui-ci en faisant coïncider θ et ν, $\varkappa$ et ξ, λ et π, α avec γ et μ. Outre dix systèmes qui disparaissent, on obtient :

1° Trois systèmes de séries quadratiques quadruplement tangentes à f; les couples de l'un d'eux sont $\theta\varkappa$ cinq fois et $\delta\varepsilon$; le réseau correspondant est de l'espèce (a) ou (b), cinq des éléments communs aux séries q et k étant confondus;

2° Un système comptant cinq fois de séries triplement tangentes à f et contenant l'élément singulier; ses couples sont $\alpha\alpha$ trois fois, $\delta\theta$, $\varepsilon\varkappa$, $\zeta\lambda$; le réseau correspondant est de l'espèce (h); la série q contient l'élément double de k et y est tangente à k;

3° Trois systèmes, comptant cinq fois, et analogues aux précédents; les couples de l'un d'eux sont $\alpha\theta$ quatre fois, $\varepsilon\lambda$, $\zeta\varkappa$; le réseau correspondant est de l'espèce (e); la série q contient l'élément double de k, et quatre éléments communs à q et k y sont confondus;

4° Trois systèmes, comptant dix fois, de séries doublement tangentes à f et contenant l'élément singulier, avec même élément tangent; les couples de l'un d'eux sont $\alpha\theta$ trois fois, $\varkappa\lambda$ deux fois, $\alpha\delta$; le réseau correspondant est de l'espèce (i), la série q contenant l'élément triple de k.

E'. On passe du cas général (H) à celui-ci en faisant coïncider α avec γ, η avec ξ et μ', $\varkappa$ avec π.

Outre onze systèmes qui disparaissent, on a :

1° Un système, comptant deux fois, de séries triplement tangentes à f, et contenant l'élément double de f; ses couples sont $\alpha\varkappa$ cinq fois, $\varepsilon\mu$; le réseau correspondant est de l'espèce (e) ou (h), la série q ayant cinq éléments communs avec k confondus;

2° Un système, comptant cinq fois, de séries triplement tangentes à f, et contenant l'élément singulier spécial de f; ses

couples sont $\alpha\varepsilon$ deux fois et $\eta\kappa$ quatre fois; le réseau correspondant est de l'espèce (e); la série q est tangente à k, et ses quatre autres éléments communs avec k sont confondus avec l'élément double de k:

3° Un système, comptant cinq fois, analogue au précédent, et de couples $\eta\eta$ trois fois, $\alpha\varepsilon$ deux fois, $\kappa\mu$; le réseau correspondant est d'espèce (h); la série q touche k en son élément singulier et en un autre élément;

4° Un système, comptant dix fois, de séries doublement tangentes à f, et contenant les deux éléments doubles de f; ses couples sont $\alpha\eta$ quatre fois, $\varepsilon\kappa$, $\alpha\mu$; le réseau correspondant est de l'espèce (f), la série q étant osculatrice à la série quadratique qui figure dans k en un élément double de k;

5° Un système, comptant dix fois, de séries doublement tangentes à f, et contenant, avec même élément tangent, l'élément singulier spécial de f; les couples du système sont $\alpha\alpha$ deux fois, $\eta\kappa$ trois fois, $\eta\mu$; le réseau correspondant est de l'espèce (i); la série q contient l'élément triple de k, et l'un des éléments de k auxquels correspond une série linéaire double;

6° Un système, comptant vingt fois, de séries tangentes à f, et contenant les deux éléments doubles de f, avec même élément tangent en l'élément singulier spécial; les couples sont $\alpha\eta$ trois fois, $\alpha\kappa$ deux fois, $\varepsilon\eta$; le réseau correspondant est de l'espèce (l); la série q contient l'élément triple de k.

F'. Le cas général (I) conduit à ce cas, en faisant coïncider α avec κ et μ, γ avec η. Outre treize systèmes qui disparaissent on a :

1° Un système, comptant cinq fois, de séries quadratiques triplement tangentes à f, et contenant l'élément singulier spécial; les couples sont $\alpha\alpha$ trois fois, $\gamma\xi$ trois fois; le réseau correspondant est de l'espèce (h); la série q touche k en élément singulier, et les trois autres éléments communs à q et k sont confondus;

2° Un système, comptant quinze fois, de séries doublement tangentes à f et contenant les deux éléments doubles; les couples sont $\alpha\gamma$ quatre fois, $\gamma\xi$ deux fois; le réseau correspondant est de l'espèce (f); la série q contient les deux éléments doubles de k, et est osculatrice en l'un d'eux à la série quadratique qui figure dans k;

3° Un système, comptant trente fois, de séries tangentes à f, et

contenant les deux éléments doubles de f, avec même élément tangent en l'élément singulier spécial; les couples sont $\gamma\gamma$ deux fois, $\alpha\gamma$ trois fois, $\alpha\xi$; le réseau correspondant est de l'espèce (l); la série q contient l'élément triple de k et l'élément de k auquel correspond une série linéaire double.

G'. Ce cas résulte soit du cas général (F) en faisant coïncider α avec θ et ν, $\varkappa$ avec π, λ avec ξ; soit du cas général (G) en faisant coïncider α avec η, γ, μ, μ' et ν, ε avec $\varkappa$ et ξ, ζ avec λ et π; dans le premier cas, l'élément tangent double proprement dit est γ, dans le second ν'.

Outre quinze systèmes disparaissant, il existe :

1° Un système de séries quadratiques quadruplement tangentes à f, dont les couples sont $\varkappa\lambda$ six fois; le réseau correspondant est de l'espèce (a) ou (b), les six éléments tangents communs à q et k coïncidant; on exclura d'ailleurs dans le cas (a) les séries q auxquelles correspondraient une série cubique et une série linéaire;

2° Deux systèmes, comptant six fois, de séries triplement tangentes à f et contenant l'élément singulier; les couples sont, par exemple, $\alpha\varkappa$ cinq fois, $\gamma\lambda$; le réseau correspondant est de l'espèce (e); la série q a cinq éléments communs avec k confondus avec l'élément double de k;

3° Un système, comptant quinze fois, de séries doublement tangentes à f, et contenant l'élément singulier de f, avec même élément tangent; les couples sont $\alpha\alpha$ trois fois, $\varkappa\lambda$ deux fois, $\alpha\gamma$; le réseau correspondant est de l'espèce (k); la série q contient l'élément triple de k;

4° Un système, comptant vingt fois, de séries tangentes à f et osculatrices en l'élément singulier de f; les couples sont $\alpha\varkappa$ et $\alpha\lambda$, chacun trois fois; le réseau correspondant est de l'espèce (m), la série q étant quelconque.

H'. Ce cas résulte du cas (H) en faisant coïncider α avec γ, η, ξ, μ et μ', ε avec $\varkappa$ et π. Vingt et un systèmes disparaissent, et il reste :

1° Un système, comptant sept fois, de séries quadratiques triplement tangentes à f et contenant l'élément singulier, dont les couples sont $\alpha\varepsilon$ six fois; le réseau correspondant est de l'espèce (e), et la série q a ses six éléments communs avec k confondus avec l'élément double de k;

2° Un système, comptant trente-cinq fois, de séries quadratiques tangentes à f et osculatrices en l'élément singulier; les couples sont $\alpha\alpha$ et $\alpha\varepsilon$, chacun trois fois; le réseau correspondant est de l'espèce (m), la série q contenant l'élément de k auquel correspond une série linéaire double.

I'. Ce cas résulte du cas (G) en faisant coïncider α avec ξ et π, γ avec $\varkappa$ et λ, η avec ε et ζ. Outre douze systèmes qui disparaissent, on trouve :

1° Trois systèmes de séries quadruplement tangentes à f; les couples de l'un d'eux sont $\alpha\alpha$ quatre fois, $\mu\mu'$, $\nu\nu'$; le réseau correspondant est de l'espèce (b) ou (c); la série q a quatre éléments communs avec k confondus avec un élément double de k;

2° Six systèmes, comptant huit fois, de séries doublement tangentes à f, et contenant l'élément triple de f avec un même élément tangent; les couples de l'un d'eux sont $\alpha\gamma$ quatre fois, $\eta\mu$, $\eta\nu$; le réseau correspondant est de l'espèce (i) ou (k), la série q touchant la série linéaire qui appartient deux fois à k.

J'. On arrive à ce cas en partant du cas (H) et faisant coïncider α avec π et ξ, γ avec η, ε et $\varkappa$.

Outre vingt systèmes qui disparaissent, on trouve :

1° Un système de séries quadratiques quadruplement tangentes à f, dont les couples sont $\alpha\alpha$ cinq fois et $\mu\mu'$; le réseau correspondant est de l'espèce (b) ou (c), cinq des éléments communs à q et k étant confondus avec un élément double de k;

2° Un système, comptant dix fois, de séries doublement tangentes à f, et contenant l'élément triple avec même élément tangent; les couples sont $\gamma\gamma$ quatre fois, $\alpha\mu$, $\alpha\mu'$; le réseau correspondant est de l'espèce (i) ou (k), la série q étant tangente à la série linéaire qui figure deux fois dans k, en un élément auquel correspond une série linéaire double; les deux autres éléments communs à q et k sont distincts;

3° Deux systèmes, comptant seize fois, de séries analogues aux précédentes; les couples de l'un sont $\alpha\gamma$ cinq fois et $\gamma\mu$; le réseau correspondant est de l'espèce (i); la série q touche la série linéaire qui figure deux fois dans k en l'élément triple de k.

K'. Ce cas résulte du cas général (J) en faisant coïncider α, γ, et η. Trente-six systèmes disparaissent, et il reste un système, comptant vingt-sept fois, de séries quadratiques doublement tan-

gentes à f, et contenant l'élément triple de f avec même élément tangent; le réseau correspondant est de l'espèce (k), et la série q touche la série linéaire qui figure deux fois dans k en l'élément triple de k.

IV. — Théorèmes généraux sur les séries quartiques.

362. L'étude qui précède, et qui est nécessaire pour donner une idée nette des séries quartiques, conduit par elle-même à de nombreuses propositions. Nous allons en énoncer quelques-unes comme exemples.

Considérons une série de l'espèce (D); en général, il lui correspond quatre réseaux de l'espèce (f), dont la jacobienne est composée d'une série quadratique et d'une série linéaire; en considérant les couples d'éléments bitangents appartenant à ces réseaux, on voit que l'on peut dire : les seize éléments, déterminés par les deux systèmes de quatre éléments tangents à la série f et contenant un des éléments doubles de f, appartiennent quatre par quatre à quatre séries quadratiques contenant les deux éléments doubles de f; ces deux systèmes de quatre éléments déterminent donc le même rapport anharmonique.

Si à une série f correspond un réseau de l'espèce (c), la correspondance entre éléments associés, qui transforme f en elle-même, comprend en particulier une homologie involutive; si le réseau est de l'espèce (d), cette correspondance se décompose en trois homologies involutives.

Si le réseau est de l'espèce (f), la correspondance précédente est une inversion ordinaire; s'il est de l'espèce (i), la correspondance est une inversion telle que la série quadratique qui sert à la définir se décompose; si enfin le réseau est de l'espèce (j) ou (k), la correspondance se réduit à une homologie involutive, cas particulier de l'inversion, si l'on veut. Nous aurons l'occasion de revenir plus tard sur ces inversions qui conservent la série f dans certains cas.

363. Si la série quartique est de l'espèce (L), c'est-à-dire composée de deux séries quadratiques g et h, on voit qu'il existe trois

systèmes de séries quadratiques bitangentes à g et h; chacun de ces systèmes contient les éléments tangents communs à g et h, répartis en deux couples; si (η) et (ζ), (θ) et $(\varkappa)$ sont ces deux couples, les éléments $(\eta\zeta)$ et $(\theta\varkappa)$ déterminent un élément (ξ) ayant même pôle (x) par rapport à g et h; les éléments (α) et (β) de la série du faisceau (g, h) qui a (x) comme élément double, comptés deux fois, forment aussi deux couples du système considéré. L'application des théorèmes généraux nous fait retrouver cette proposition connue : les élément de contact de (η), (ζ), (θ), $(\varkappa)$ avec g et h appartiennent à une même série quadratique. On voit encore que si une série du système considéré plus haut touche g en (y) et (z), h en (t) et (u), les éléments (yz) et (tu) contiennent (x) et sont conjugués harmoniques par rapport à (α) et (β); les éléments déterminés par (yt) et (zu), (yu) et (zt) appartiennent à (ξ); les éléments (yt), (zu), (yu), (zt) touchent une série quadratique; si une série quadratique contenant (y), (z), (t), (u) a encore avec g et h en commun (y'), (z') et (t'), (u'), ces quatre éléments déterminent une seconde série quadratique doublement tangente à (g) et (h): etc.

Ces diverses propriétés se retrouvent sans peine de la façon suivante. Si $F = 0$ est l'équation d'une série quadratique doublement tangente aux séries $g = 0$ et $h = 0$, on a

$$F = \lambda_1 g + g'^2 = -\lambda_2 h + h'^2,$$

g' et h' étant des fonctions linéaires; donc

$$\lambda_1 g + \lambda_2 h = h'^2 - g'^2;$$

de là résulte que $\lambda_1 g + \lambda_2 h = 0$ est une série décomposable du faisceau (g, h), ce qui détermine λ_1 et λ_2. Si l'on a par ce calcul

$$\lambda_1 g + \lambda_2 h = pq,$$

p et q étant deux fonctions linéaires, on en déduit

$$\begin{aligned}\mu_1^2 F &= \mu_1^2 \lambda_1 g + (\mu_2 p + \mu_3 q)^2 \\ &= -\mu_1^2 \lambda_2 h + (\mu_2 p - \mu_3 q)^2,\end{aligned}$$

les (μ) étant des paramètres liés par la relation

$$\mu_1^2 + 4\mu_2\mu_3 = 0.$$

On pourra employer les formes canoniques de g et h, s'il est nécessaire de développer ces résultats.

364. Voici maintenant énumérés quelques moyens d'engendrer des séries quartiques, et se rapportant aux études déjà faites.

Si l'on fait correspondre homographiquement les séries de deux faisceaux de séries quadratiques, le lieu de leurs éléments communs est une série quartique générale. On rapprochera de ceci le théorème suivant facile à démontrer en employant les mêmes considérations qu'à propos des séries cubiques : Si une série quadratique, contenant quatre éléments fixes d'une série quartique f, a en commun avec f quatre autres éléments variables, toute série quadratique contenant ces quatre éléments variables et un élément fixe de f, aura encore avec f trois autres éléments fixes.

Si l'on fait correspondre homographiquement les séries d'un faisceau de séries cubiques et celles d'un faisceau de séries linéaires, le lieu de leurs éléments communs est une série quartique générale. On a le théorème correspondant : Si une série cubique variable contient neuf éléments fixes d'une série quartique f, et a en commun avec f trois autres éléments variables, ces trois éléments appartiennent à une même série linéaire qui a en commun avec f un quatrième élément fixe.

On engendrera de même une série quartique à élément triple en faisant correspondre homographiquement les séries d'un faisceau de séries linéaires, et les éléments d'une série cubique rationnelle de seconde espèce; la série équivalente à la série cubique est cinq fois tangente à la série quartique. En faisant correspondre homographiquement les éléments (ξ) d'un faisceau et les séries quadratiques d'un même système quadruplement tangentes à une série quartique, on engendrera encore une série quartique à un élément double; les deux séries quartiques sont huit fois tangentes. En faisant correspondre homographiquement les séries d'un faisceau de séries quadratiques, et les éléments tangents d'une série quadratique, on définit une série du cinquième degré en général, à quatre éléments doubles; elle se compose d'une série quartique à deux éléments doubles et d'une série linéaire, si l'une des séries déterminées par deux éléments communs aux séries quadratiques du faisceau se correspond à elle-même dans la cor-

respondance indiquée; la série quadratique fixe est, en général, cinq fois tangente à la série quintique; dans le cas particulier, elle sera quadruplement tangente à la série quartique.

On pourra maintenant supposer que des éléments de différente nature sont mis en correspondance non plus à l'aide d'une forme bilinéaire, égalée à zéro, mais, par exemple, à l'aide d'une forme linéo-quadratique ou doublement quadratique; dans ce dernier cas, en employant deux faisceaux de séries linéaires, on engendre une série quadratique à deux éléments doubles; les propriétés connues de la forme doublement quadratique nous font retrouver immédiatement la proposition relative à l'égalité du rapport anharmonique des deux systèmes d'éléments tangents à la série quartique contenant les éléments doubles. On voit aussi qu'il existera une infinité de suites de $2n$ éléments inscrite à la série quartique et telle que les éléments de seconde espèce de cette suite, pris de deux en deux, contiennent les uns un élément double, les autres l'autre, dès qu'il existe une telle suite proprement dite.

Si l'on se donne encore une relation doublement quadratique en (λ) et (μ) et que, considérant (λ) et (μ) comme définissant deux éléments d'une série quadratique, on cherche le lieu de l'élément commun aux éléments tangents correspondants de cette série quadratique, on trouvera une série quartique à deux éléments doubles, quadruplement tangente à la série quadratique. On voit par là qu'étant donnée une série quadratique quadruplement tangente à une série quartique à deux éléments doubles, les éléments communs à la série quartique et à un élément tangent quelconque de la série quadratique se séparent en deux groupes de deux, algébriquement.

Enfin, le problème résolu au n° 230 donne encore de nouvelles générations d'une série quartique. Si (x) est un des éléments d'une suite triple circonscrite à une série quadratique F et dont les deux autres éléments appartiennent à deux séries g et h, le lieu de (x), ou plutôt une partie du lieu de (x) sera :

1° Une série quartique à trois éléments doubles, quadruplement tangente à F, si g est une série linéaire ou une série quadratique doublement tangente à F, et h une série quartique à trois éléments doubles quadruplement tangente à F;

2° Une série quartique pareille à la précédente, si g et h

sont deux séries cubiques rationnelles triplement tangentes à F;

3° Une série quartique à deux éléments doubles, doublement tangente à F, si g est une série linéaire ou une série quadratique doublement tangente à F, et h une série quadratique ou une série quartique rationnelle triplement tangente à F;

4° Une série quartique à un élément double, si g et h sont identiques avec une série quintique à quatre éléments doubles, cinq fois tangente à F; et l'on obtient alors une infinité de suites triples inscrites à la série quartique et circonscrites à F, de sorte que cette série quadratique fait partie de la cayleyenne de l'un des réseaux des espèces (e) ou (h) correspondant à la série quartique.

V. — La série quartique rationnelle.

365. Les séries quartiques rationnelles sont des espèces (G), (H), (I), (J), (B′), (C′), (E′), (F′), (G′), (H′), (I′), (J′), (K′).

La plus générale est celle d'espèce (G) à trois éléments doubles; si ceux-ci sont pris pour éléments fondamentaux, on peut écrire l'équation de la série f:

$$\begin{aligned} f = a_1 x_2^2 x_3^2 + a_2 x_3^2 x_1^2 + a_3 x_1^2 x_2^2 \\ + 2b_1 x_1^2 x_2 x_3 + 2b_2 x_1 x_2^2 x_3 + 2b_3 x_1 x_2 x_3^2 = 0; \end{aligned}$$

les éléments tangents en O_1, O_2, O_3 ont pour équations

$$a_3 x_2^2 + 2b_1 x_2 x_3 + a_2 x_3^2 = 0, \ \ldots;$$

ils appartiennent à la série quadratique

$$a_1 \xi_1^2 + a_2 \xi_2^2 + a_3 \xi_3^2 - 2b_1 \xi_2 \xi_3 - 2b_2 \xi_3 \xi_1 - 2b_3 \xi_1 \xi_2 = 0;$$

de même les éléments tels que ceux qui sont déterminés par Ω_1 et les éléments tangents à f en O_1, appartiennent à une même série quadratique. On démontrera les mêmes théorèmes pour les six éléments tangents à f contenant O_1, ou O_2, ou O_3.

Nous laisserons le soin d'étudier les modifications que subissent ces propositions dans les divers cas particuliers, et de calculer explicitement les différents éléments particuliers de la série f, quand elle est rationnelle, en se servant de l'équation ci-dessus.

Les propositions générales fourniront de nouveaux énoncés particuliers; ainsi dans le cas (I), la série f se transforme en

elle-même par une homologie involutive : si donc O et Ω déterminent cette involution, les deux éléments cuspidaux de f sont alignés avec O, tandis que les éléments tangents en ces éléments cuspidaux sont alignés avec Ω; la même chose a lieu pour les deux éléments inflexionnels de f; l'élément double de f appartient à Ω, et son élément tangent double à O.

366. Quand la série quartique est rationnelle sans avoir un élément triple, on peut l'étudier comme résultant d'une série quadratique par une correspondance quadratique birationnelle, en particulier par une inversion.

Supposons la série quartique f de l'espèce la plus générale (G); une infinité d'inversions générales lui font correspondre une série quadratique quelconque; il suffit de définir l'inversion par O_1 par exemple, et une série quadratique tangente en O_2 et O_3 à Ω_3 et Ω_2; les éléments bitangents ou tangents stationnaires de la série quartique correspondent aux séries quadratiques contenant O_1, O_2 et O_3, qui sont bitangentes ou osculatrices à la série quadratique qui correspond à f.

Si l'un des éléments doubles de f devient cuspidal, la série quadratique correspondante devient tangente à l'un des éléments fondamentaux Ω_1, Ω_2 ou Ω_3.

Si la série f est de l'espèce (B′), de façon que O_1 soit l'élément double ordinaire, et O_3 l'élément singulier spécial, on fera correspondre à f une série quadratique en employant une inversion singulière définie par O_1 et une série quadratique décomposable d'élément double O_3, telle que la polaire de O_1 par rapport à cette série soit l'élément tangent à f en O_3, soit Ω_1.

Si cette série touche Ω_1, l'élément double O_1 de f devient cuspidal; si elle touche Ω_2, l'élément singulier spécial change de nature : on obtient l'espèce (E′) ou (F′).

Enfin, si la série f est de l'espèce (G′), de sorte que O_1 soit l'élément singulier avec Ω_2 comme élément tangent, on lui fera correspondre une série quadratique en employant une inversion singulière définie par O_1 et une série quadratique tangente à Ω_2 en O_1, et même osculatrice en O_1 à une série quadratique fixe facile à déterminer; si f est de l'espèce (H′), cette série touche Ω_2.

367. Étudions maintenant la série quartique rationnelle f définie par des formules de la forme

$$\rho x_i = f_i(\lambda_1, \lambda_2),$$

les f_i étant des formes quartiques binaires par rapport aux (λ), qui n'ont pas de racine commune.

Ceci revient aussi à l'étude de la forme

$$g = \xi_1 f_1(\lambda_1, \lambda_2) + \xi_2 f_2(\lambda_1, \lambda_2) + \xi_3 f_3(\lambda_1, \lambda_2).$$

Nous ferons

$$\begin{aligned} f_1 &= a_0\lambda_1^4 + 4a_1\lambda_1^3\lambda_2 + 6a_2\lambda_1^2\lambda_2^2 + 4a_3\lambda_1\lambda_2^3 + a_4\lambda_2^4, \\ f_2 &= b_0\lambda_1^4 + 4b_1\lambda_1^3\lambda_2 + 6b_2\lambda_1^2\lambda_2^2 + 4b_3\lambda_1\lambda_2^3 + b_4\lambda_2^4, \\ f_3 &= c_0\lambda_1^4 + 4c_1\lambda_1^3\lambda_2 + 6c_2\lambda_1^2\lambda_2^2 + 4c_3\lambda_1\lambda_2^3 + c_4\lambda_2^4. \end{aligned}$$

Les coordonnées d'un élément tangent à f s'expriment sans peine à l'aide des (λ).

L'invariant multiple fondamental est celui dont les racines correspondent aux éléments inflexionnels de f; soit

$$h = \begin{vmatrix} a_0\lambda_1^2 + 2a_1\lambda_1\lambda_2 + a_2\lambda_2^2 & a_1\lambda_1^2 + 2a_2\lambda_1\lambda_2 + a_3\lambda_2^2 & a_2\lambda_1^2 + 2a_3\lambda_1\lambda_2 + a_4\lambda_2^2 \\ b_0\lambda_1^2 + 2b_1\lambda_1\lambda_2 + b_2\lambda_2^2 & b_1\lambda_1^2 + 2b_2\lambda_1\lambda_2 + b_3\lambda_2^2 & b_2\lambda_1^2 + 2b_3\lambda_1\lambda_2 + b_4\lambda_2^2 \\ c_0\lambda_1^2 + 2c_1\lambda_1\lambda_2 + c_2\lambda_2^2 & c_1\lambda_1^2 + 2c_2\lambda_1\lambda_2 + c_3\lambda_2^2 & c_2\lambda_1^2 + 2c_3\lambda_1\lambda_2 + c_4\lambda_2^2 \end{vmatrix};$$

nous avons ainsi une forme sextique que nous ne supposerons pas identiquement nulle, de sorte que f n'est pas une série linéaire.

368. Cherchons la condition pour que trois éléments (λ), (μ), (ν) de f soient alignés; si l'on fait

$$\lambda_1\mu_1\nu_1 = p, \qquad \Sigma\lambda_2\mu_1\nu_1 = q, \qquad \Sigma\lambda_1\mu_2\nu_2 = r, \qquad \lambda_2\mu_2\nu_2 = s,$$

on trouve sans peine la condition

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & p & 0 \\ -4a_1 & -4b_1 & -4c_1 & q & p \\ 6a_2 & 6b_2 & 6c_2 & r & q \\ -4a_3 & -4b_3 & -4c_3 & s & r \\ a_4 & b_4 & c_4 & 0 & s \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on fait les (μ) et les (ν) égaux aux (λ), on retrouve l'équation $h = 0$; si l'on fait les (ν) égaux aux (λ), la relation précédente est une équation du second degré en (μ); en écrivant que ses

racines sont égales, on obtiendra une équation pour déterminer les éléments de contact des éléments bitangents à f.

Si (λ) et (μ) sont des paramètres qui correspondent à un élément double ou triple de f, considéré comme réunion de deux ou trois éléments ordinaires, les éléments (λ), (μ), (ν) sont alignés quel que soit (ν). Donc, pour déterminer les éléments doubles, on écrira que les coefficients de ν_1^2, $\nu_1\nu_2$ et ν_2^2 sont nuls dans la relation précédemment trouvée. On obtiendra ainsi trois relations quadratiques entre $t = \lambda_1\mu_1$, $u = \lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1$, $v = \lambda_2\mu_2$; alors on pourra déterminer ces quantités facilement; si l'on veut avoir une équation pour déterminer les (λ), on éliminera linéairement t^2, u^2, v^2, uv, vt, tu entre les trois équations précédentes et celles que l'on obtient en multipliant le premier membre de la relation

$$v\lambda_1^2 - u\lambda_1\lambda_2 + t\lambda_2^2 = 0$$

respectivement par t, u, v.

Si l'on élimine linéairement les mêmes quantités entre les trois mêmes premières équations et celles que l'on obtient en multipliant le premier membre de la relation

$$\alpha_1 t + \alpha_2 u + \alpha_3 v = 0$$

respectivement par t, u, v, on obtiendra une équation dont le premier membre sera une forme cubique par rapport aux (α) décomposable en trois facteurs linéaires; si dans chacun de ces facteurs on remplace α_1, α_2, α_3 respectivement par λ_2^2, $-\lambda_1\lambda_2$, λ_1^2, on obtiendra trois équations du second degré, et les racines de chacune d'elles correspondent à un élément multiple de f.

La discussion des différents cas qui peuvent se présenter est facile à faire; voici les résultats obtenus : pour les espèces (G), (H), (I), (J), les trois équations du second degré qui correspondent aux éléments doubles n'ont pas, deux à deux, de racines communes; si l'une d'elles a une racine double, il lui correspond un élément cuspidal; dans les cas (B′) et (C′), deux des équations dont nous venons de parler ont les mêmes racines distinctes; la troisième a deux racines distinctes ou confondues, différentes des précédentes; dans les cas (E′) et (F′), deux des équations précédentes ont les mêmes racines confondues; la troisième a deux racines distinctes ou confondues. Dans les cas (G′) et (H′), les

trois équations qui déterminent les éléments doubles ont les mêmes racines distinctes ou confondues; dans le cas (I'), ces trois équations ont deux à deux une racine commune, et d'ailleurs leurs racines sont distinctes; dans le cas (J'), l'une d'elles a une racine double, tandis que les deux autres sont identiques et admettent cette racine double avec une autre racine; enfin, dans le cas (K'), les trois équations admettent la même racine double.

CHAPITRE XV.

LA GÉOMÉTRIE MÉTRIQUE TERNAIRE GÉNÉRALE.

I. — Définitions et formules générales.

369. Soit un espace E rempli par les éléments (x) et (ξ) des deux espèces. Considérons une forme quadratique fixe

$$F = F_{x^2} = F_{11}x_1^2 + \ldots + 2F_{23}x_2x_3 + \ldots$$

que nous pouvons toujours supposer donnée de première espèce. Les éléments définis par cette forme constituent l'*absolu* de l'espace E; il y a des éléments absolus des deux espèces.

La forme équivalente à F sera

$$\Phi = \Phi_{\xi^2} = \Phi_{11}\xi_1^2 + \ldots + 2\Phi_{23}\xi_2\xi_3 + \ldots,$$

avec

$$\Phi_{11} = F_{22}F_{33} - F_{23}^2, \qquad \ldots$$
$$\Phi_{23} = F_{12}F_{13} - F_{11}F_{23}, \qquad \ldots$$

Le discriminant de F sera D et, par suite, D^2 sera celui de Φ.

La Géométrie métrique ternaire générale correspond à l'hypothèse où D est différent de zéro.

370. Si (y) et (z) sont deux éléments quelconques de première espèce, la *distance* du premier de ces éléments, considéré comme *origine*, au second, considéré comme *extrémité*, sera le produit par une constante m du logarithme népérien du rapport anharmonique k déterminé par (y), (z) et les deux éléments (t) et (t') communs à (yz) et à l'absolu F. Si donc $\overline{yz}$ représente cette distance, on aura

$$\overline{yz} = m\log(yztt'),$$

ou

$$\overline{yz} = m\log k,$$

avec

$$\frac{1-k}{1+k} = \frac{\sqrt{-\Phi_{(yz)^2}}}{F_{yz}},$$

d'après une formule connue.

De même, la distance de deux éléments de seconde espèce (η) et (ζ), dont le premier est l'origine et le second l'extrémité, est, en désignant par μ une constante et (τ), (τ') les éléments communs à $(\eta\zeta)$ et Φ,

$$\overline{\eta\zeta} = \mu \log(\eta\zeta\tau\tau'),$$

ou

$$\overline{\eta\zeta} = \mu \log\varkappa,$$

avec

$$\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa} = \frac{\sqrt{-DF_{(\eta\zeta)^2}}}{\Phi_{\eta\zeta}}.$$

La distance $\overline{yz}$ ou $\overline{\eta\zeta}$ est donc la même que celle définie en Géométrie binaire pour l'espace (yz) ou $(\eta\zeta)$, à condition de prendre pour éléments absolus de ces espaces (t) et (t'), ou bien (τ) et (τ'). Il y a exception si (t) et (t'), ou bien (τ) et (τ') sont confondus.

Dans le cas général, par suite, les remarques faites en Géométrie binaire subsistent entièrement : si (y) et (z) coïncident, on détermine $\overline{yz}$ en prenant (yz) quelconque contenant (y).

Si (t) et (t'), ou bien (τ) et (τ') sont confondus, la distance $\overline{yz}$ ou $\overline{\eta\zeta}$ devient nulle, à un multiple près de $2im\pi$ ou $2i\mu\pi$; si, de plus, (y) ou (η), par exemple, appartient à F ou Φ, cette distance est indéterminée.

371. On peut écrire, en vertu d'identités connues,

$$\cos\frac{\overline{yz}}{2im} = \frac{F_{yz}}{\sqrt{F_{y^2}F_{z^2}}}, \qquad \sin\frac{\overline{yz}}{2im} = \frac{\sqrt{\Phi_{(yz)^2}}}{\sqrt{F_{y^2}F_{z^2}}},$$

$$\cos\frac{\overline{\eta\zeta}}{2i\mu} = \frac{\Phi_{\eta\zeta}}{\sqrt{\Phi_{\eta^2}\Phi_{\zeta^2}}}, \qquad \sin\frac{\overline{\eta\zeta}}{2i\mu} = \frac{\sqrt{D}\sqrt{F_{(\eta\zeta)^2}}}{\sqrt{\Phi_{\eta^2}\Phi_{\zeta^2}}};$$

dans ces formules, les radicaux ont des déterminations arbitraires : i désigne $\sqrt{-1}$.

Pour avoir plus de précision, appelons (ξ) l'élément (yz), sup-

posé donné, et faisons

$$\frac{(yz)_1}{\xi_1} = \frac{(yz)_2}{\xi_2} = \frac{(yz)_3}{\xi_3} = (yz),$$

de sorte que (yz) est une quantité parfaitement déterminée et telle que si (u) est un nouvel élément de (ξ), on a

$$(yz) + (zu) + (uy) = 0;$$

de même, (x) étant l'élément $(\eta\zeta)$, faisons

$$\frac{(\eta\zeta)_1}{x_1} = \frac{(\eta\zeta)_2}{x_2} = \frac{(\eta\zeta)_3}{x_3} = (\eta\zeta).$$

Orientons l'espace en fixant la détermination de $\sqrt{D}$; de plus, orientons aussi un élément tel que (x), en fixant le signe du radical $\sqrt{F_{x^2}}$, et un élément tel que (ξ), en fixant le signe du radical $\sqrt{\Phi_{\xi^2}}$, et écrivons alors

$$\cos\frac{\overline{yz}}{2im} = \frac{F_{yz}}{\sqrt{F_{y^2}}\sqrt{F_{z^2}}}, \qquad \sin\frac{\overline{yz}}{2im} = \frac{(yz)\sqrt{\Phi_{\xi^2}}}{\sqrt{F_{y^2}}\sqrt{F_{z^2}}},$$

$$\cos\frac{\overline{\eta\zeta}}{2i\mu} = \frac{\Phi_{\eta\zeta}}{\sqrt{\Phi_{\eta^2}}\sqrt{\Phi_{\zeta^2}}}, \qquad \sin\frac{\overline{\eta\zeta}}{2i\mu} = \frac{(\eta\zeta)\sqrt{D}\sqrt{F_{x^2}}}{\sqrt{\Phi_{\eta^2}}\sqrt{\Phi_{\zeta^2}}};$$

nous voyons que la distance de deux éléments orientés, appartenant à un élément lui-même orienté, est définie complètement à $4im\pi$ ou $4i\mu\pi$ près. Si (x), (y), (z) sont orientés et appartiennent à un même élément orienté, on a

$$\overline{yz} + \overline{zx} + \overline{xy} \equiv 0 \qquad (\text{mod}\, 4im\pi).$$

La distance d'un élément (y) à lui-même orienté de façon opposée est $2im\pi$.

Deux éléments de même espèce sont dits *perpendiculaires* quand ils conjugués par rapport à l'absolu. Si (y) et (z) sont deux tels éléments, on a

$$\overline{yz} \equiv im\pi \qquad (\text{mod}\, 2im\pi),$$

quelles que soient les orientations.

Deux éléments d'espèce opposée qui sont pôle et polaire par rapport à l'absolu sont dits *normaux;* chacun d'eux est le lieu des éléments perpendiculaires à l'autre.

Si un élément (y) est orienté, on peut regarder l'élément normal (η) à (y) comme orienté lui-même; en effet, on peut prendre pour les (η_i) les quantités F_{y_i}, et alors on peut écrire

$$\sqrt{\Phi_{\eta^2}} = \sqrt{D}\sqrt{F_{y^2}}.$$

De même, si (η) est donné, on peut prendre pour les (y_i) les quantités Φ_{η_i}, et écrire

$$\sqrt{F_{y^2}} = \sqrt{D}\sqrt{\Phi_{\eta^2}}.$$

Si (y) et (z) sont respectivement normaux à (η) et (ζ) et sont orientés de façon correspondante, comme nous venons de le dire, on a

$$\frac{\overline{yz}}{2im} \equiv \frac{\overline{\eta\zeta}}{2i\mu} \pmod{2\pi}.$$

372. Considérons deux éléments d'espèce différente (y) et (ζ); si (z) est normal à (ζ), l'élément (yz) est perpendiculaire à (ζ); c'est le seul qui jouisse de cette propriété et qui contienne (y), si du moins (y) et (ζ) ne sont pas normaux. Les coordonnées de (yz) sont les quantités $y_2\Phi_{\zeta_3} - y_3\Phi_{\zeta_2}$, ..., et l'on a

$$\Phi_{(yz)^2} = D[F_{y^2}\Phi_{\zeta^2} - D(y\mid\zeta)^2];$$

nous orienterons (yz) en donnant une détermination fixe au radical $\sqrt{F_{y^2}\Phi_{\zeta^2} - D(y\mid\zeta)^2}$.

La distance (yz) est alors facile à calculer; on a

$$\cos\frac{\overline{yz}}{2im} = \frac{(y\mid\zeta)\sqrt{D}}{\sqrt{F_{y^2}}\sqrt{\Phi_{\zeta^2}}}, \qquad \sin\frac{\overline{yz}}{2im} = \frac{\sqrt{F_{y^2}\Phi_{\zeta^2} - D(y\mid\zeta)^2}}{\sqrt{F_{y^2}}\sqrt{\Phi_{\zeta^2}}}.$$

La distance $\overline{y\zeta}$ de (y) à (ζ) sera définie par l'égalité

$$\overline{y\zeta} \equiv \overline{yz} + im\pi \pmod{4im\pi},$$

de sorte que, en particulier,

$$\sin\frac{\overline{y\zeta}}{2im} = \frac{(y\mid\zeta)\sqrt{D}}{\sqrt{F_{y^2}}\sqrt{\Phi_{\zeta^2}}}.$$

Si (t) est l'élément commun à (ζ) et (yz), les coordonnées de (t) sont $(y\mid\zeta)\Phi_{\zeta_1} - y_1\Phi_{\zeta^2}$, ..., et par suite, on a

$$F_{t^2} = [F_{y^2}\Phi_{\zeta^2} - D(y\mid\zeta)^2]\Phi_{\zeta^2};$$

par suite, on peut considérer (t) comme orienté, si l'on se donne l'orientation de (ζ) et celle de (yz), en faisant

$$\sqrt{F_{t^2}} = \sqrt{\Phi_{\zeta^2}}\sqrt{F_{y^2}\Phi_{\zeta^2} - D(y\mid\zeta)^2};$$

alors, on a sans peine

$$\overline{y\zeta} \equiv \overline{yt} \qquad (\text{mod}\, 4\, im\pi),$$

car (t) est tel que

$$\overline{zt} \equiv im\pi \qquad (\text{mod}\, 4\, im\pi).$$

Des considérations analogues définiraient la distance $\overline{\zeta y}$ de (ζ) à (y); (η) étant normal à (y), l'orientation de $(\eta\zeta)$ serait déterminée par celle de (yz), et en effet ces deux éléments sont normaux; (θ) étant commun à (y) et $(\eta\zeta)$, l'orientation de (θ) est déterminée, et l'on a

$$\overline{\zeta y} \equiv \overline{\zeta\theta} \equiv \overline{\zeta\eta} + i\mu\pi \qquad (\text{mod}\, 4\, i\mu\pi);$$

par suite aussi

$$\frac{\overline{y\zeta}}{2\,im} + \frac{\overline{\zeta y}}{2\,i\mu} \equiv \pi \qquad (\text{mod}\, 2\pi).$$

Quand la quantité $F_{y^2}\Phi_{\zeta^2} - D(y\mid\zeta)^2$ est nulle, c'est que, comme on sait, (y) appartient à l'un des éléments tangents à F qui ont pour éléments de contact les éléments communs à (ζ) et F; dans ce cas, on a

$$\overline{y\zeta} \equiv im\pi \qquad (\text{mod}\, 2\, im\pi),$$

quelles que soient les orientations; (y) et (ζ) sont perpendiculaires. Quand (y) et (ζ) sont normaux, on a

$$\overline{y\zeta} \equiv im\pi \qquad (\text{mod}\, 4\, im\pi).$$

Si (y) et (z) sont respectivement normaux à (η) et (ζ), on a

$$\frac{\overline{y\zeta}}{2\,im} \equiv \frac{\overline{\eta z}}{2\,i\mu} \qquad (\text{mod}\, 2\pi).$$

373. Les formules développées dans ce qui précède permettent d'énoncer de nombreuses propositions sous une forme nouvelle en y introduisant les notions de distance.

En voici deux exemples. Si quatre éléments (y), (z), (t), (u)

appartiennent à un même élément (ξ), leur rapport anharmonique peut s'écrire

$$(yztu) = \frac{(yt)(zu)}{(yu)(zt)},$$

en adoptant des notations indiquées plus haut; et par suite,

$$(yztu) = \frac{\sin\frac{\overline{yt}}{2im}\sin\frac{\overline{zu}}{2im}}{\sin\frac{\overline{yu}}{2im}\sin\frac{\overline{zt}}{2im}}.$$

Si un élément (ξ) appartient avec (η) et (ζ) à un même faisceau, son équation peut s'écrire

$$\lambda_1(x \mid \eta) + \lambda_2(x \mid \zeta) = 0,$$

et réciproquement; mais cette équation s'écrit aussi

$$\lambda_1 \Phi_{\eta^2} \sin\frac{\overline{x\eta}}{2im} + \lambda_2 \Phi_{\zeta^2} \sin\frac{\overline{x\zeta}}{2im} = 0,$$

d'où une proposition facile à énoncer.

374. Considérons une suite de n éléments (x), (y), (z), (t), (u), ..., dont le dernier soit (w); son *étendue* sera

$$S = \overline{xy} + \overline{yz} + \overline{zt} + \overline{tu} + \ldots + \overline{wx}.$$

La suite équivalente de seconde espèce (xy), (yz), (zt), (tu), ... ou (ξ), (η), (ζ), (θ), ... aura de même une étendue

$$\Sigma = \overline{\xi\eta} + \overline{\eta\zeta} + \overline{\zeta\theta} + \ldots.$$

Comme on peut écrire

$$S = (\overline{xy} + \overline{yz} + \overline{zx}) + (\overline{xz} + \overline{zt} + \overline{tx}) + (\overline{xt} + \overline{tu} + \overline{ux}) + \ldots,$$

on voit qu'on peut ramener le calcul de S à celui de l'étendue d'une suite triple; il en est de même pour Σ. C'est ce calcul seulement que nous allons développer.

Soit donc une suite triple (x), (y), (z); désignons par (ξ), (η), (ζ) les éléments (yz), (zx), (xy) de la suite équivalente et supposons que l'on ait

$$(yz)_i = \xi_i, \qquad (zx)_i = \eta_i, \qquad (xy)_i = \zeta_i.$$

Un calcul direct donne d'abord

$$\sin\frac{S}{2im} = \frac{F_{xy}F_{xz}\sqrt{\Phi_{\xi^2}}+F_{yz}F_{yx}\sqrt{\Phi_{\eta^2}}+F_{zx}F_{zy}\sqrt{\Phi_{\zeta^2}}-\sqrt{\Phi_{\xi^2}}\sqrt{\Phi_{\eta^2}}\sqrt{\Phi_{\zeta^2}}}{F_{x^2}F_{y^2}F_{z^2}},$$

$$\cos\frac{S}{2im} = \frac{F_{yz}F_{zx}F_{xy}-F_{yz}\sqrt{\Phi_{\eta^2}}\sqrt{\Phi_{\zeta^2}}-F_{zx}\sqrt{\Phi_{\zeta^2}}\sqrt{\Phi_{\xi^2}}-F_{xy}\sqrt{\Phi_{\xi^2}}\sqrt{\Phi_{\eta^2}}}{F_{x^2}F_{y^2}F_{z^2}}.$$

On voit que l'étendue S est définie à un multiple près de $4im\pi$, quand l'orientation de (ξ), (η), (ζ) est connue.

Si l'on veut ne faire figurer dans les formules précédentes que les (x), (y), (z), on remplacera Φ_{ξ^2}, par exemple, par $F_{y^2}F_{z^2}-F_{yz}^2$.

Supposons maintenant qu'au contraire on ne veuille plus faire figurer dans les formules ci-dessus que les (ξ), (η), (ζ); on a successivement

$$x_i(xyz) = (\eta\zeta)_i,$$

$$(xyz)^2 = (\xi\eta\zeta),$$

$$D(\xi\eta\zeta)F_{x^2} = \Phi_{\eta^2}\Phi_{\zeta^2}-\Phi_{\eta\zeta}^2,$$

$$D(\xi\eta\zeta)F_{yz} = \Phi_{\xi\eta}\Phi_{\xi\zeta}-\Phi_{\xi^2}\Phi_{\eta\zeta},$$

$$D^2(\xi\eta\zeta)^2 = (\Phi_{\xi^2}\Phi_{\eta^2}\Phi_{\zeta^2}),$$

cette dernière notation représentant le déterminant

$$\begin{vmatrix} \Phi_{\xi^2} & \Phi_{\xi\eta} & \Phi_{\xi\zeta} \\ \Phi_{\xi\eta} & \Phi_{\eta^2} & \Phi_{\eta\zeta} \\ \Phi_{\xi\zeta} & \Phi_{\eta\zeta} & \Phi_{\zeta^2} \end{vmatrix},$$

et, par suite, après suppression d'un facteur commun haut et bas,

$$\sin\frac{S}{2im} = -D(\xi\eta\zeta)\frac{\Phi_{\eta\zeta}\sqrt{\Phi_{\xi^2}}+\Phi_{\zeta\xi}\sqrt{\Phi_{\eta^2}}+\Phi_{\xi\eta}\sqrt{\Phi_{\zeta^2}}+\sqrt{\Phi_{\xi^2}}\sqrt{\Phi_{\eta^2}}\sqrt{\Phi_{\zeta^2}}}{\left(\Phi_{\eta\zeta}+\sqrt{\Phi_{\eta^2}}\sqrt{\Phi_{\zeta^2}}\right)\left(\Phi_{\zeta\xi}+\sqrt{\Phi_{\zeta^2}}\sqrt{\Phi_{\xi^2}}\right)\left(\Phi_{\xi\eta}+\sqrt{\Phi_{\xi^2}}\sqrt{\Phi_{\eta^2}}\right)},$$

$$\cos\frac{S}{2im} = 1-\frac{D^2(\xi\eta\zeta)^2}{\left(\Phi_{\eta\zeta}+\sqrt{\Phi_{\eta^2}}\sqrt{\Phi_{\zeta^2}}\right)\left(\Phi_{\zeta\xi}+\sqrt{\Phi_{\zeta^2}}\sqrt{\Phi_{\xi^2}}\right)\left(\Phi_{\xi\eta}+\sqrt{\Phi_{\xi^2}}\sqrt{\Phi_{\eta^2}}\right)}.$$

On aurait des formules analogues pour déterminer l'étendue Σ de la suite (ξ), (η), (ζ).

375. Si les éléments fondamentaux n'appartiennent pas à l'absolu, on peut prendre

$$F = x_1^2+x_2^2+x_3^2+2\cos\theta_1 x_2x_3+2\cos\theta_2 x_3x_1+2\cos\theta_3 x_1x_2;$$

si nous supposons $m=\mu=\frac{1}{2i}$, pour simplifier, et si nous orientons les éléments fondamentaux en prenant pour O_i, $x_i=1$ et

$\sqrt{F_{x^2}} = 1$, on a d'abord

$$\cos \overline{O_2 O_3} = \cos\theta_1, \qquad \cos \overline{O_3 O_1} = \cos\theta_2, \qquad \cos \overline{O_1 O_2} = \cos\theta_3.$$

On a aussi

$$\begin{aligned}\Phi = \sin^2\theta_1\xi_1^2 + \sin^2\theta_2\xi_2^2 + \sin^2\theta_3\xi_3^2 + 2(\cos\theta_2\cos\theta_3 - \cos\theta_1)\xi_2\xi_3 \\ + 2(\cos\theta_3\cos\theta_1 - \cos\theta_2)\xi_3\xi_1 + 2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_3)\xi_1\xi_2;\end{aligned}$$

orientons les éléments fondamentaux de seconde espèce en faisant pour Ω_i, $\xi_i = 1$ et $\sqrt{\Phi_{\xi^2}} = \sin\theta_i$; alors on voit que l'on peut considérer θ_1, θ_2 et θ_3 comme les distances $\overline{O_2 O_3}$, $\overline{O_3 O_1}$ et $\overline{O_1 O_2}$.

D'ailleurs, ici

$$\begin{aligned}D &= 1 + 2\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3 - \cos^2\theta_1 \quad \cos^2\theta_2 - \cos^2\theta_3 \\ &= 4\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{2}\sin\frac{-\theta_1+\theta_2+\theta_3}{2}\sin\frac{\theta_1-\theta_2+\theta_3}{2}\sin\frac{\theta_1+\theta_2-\theta_3}{2}.\end{aligned}$$

On a aussi

$$\cos\overline{\Omega_2\Omega_3} = \frac{\cos\theta_2\cos\theta_3 - \cos\theta_1}{\sin\theta_2\sin\theta_3}, \qquad \sin\overline{\Omega_2\Omega_3} = \frac{\sqrt{D}}{\sin\theta_2\sin\theta_3};$$

$$\sin\Sigma = -\sqrt{D}\,\frac{1+\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3}{(1+\cos\theta_1)(1+\cos\theta_2)(1+\cos\theta_3)},$$

$$\cos\Sigma = 1 - \frac{D}{(1+\cos\theta_1)(1+\cos\theta_2)(1+\cos\theta_3)}.$$

Si la série triple formée par les éléments fondamentaux est conjuguée par rapport à l'absolu, les formules précédentes subsistent, avec $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \frac{\pi}{2}$, et les expressions générales relatives aux distances se simplifient : les coordonnées sont alors orthogonales.

Remarquons encore, dans le cas général, que l'on a

$$\sin\overline{x\Omega_i} = \frac{x_i\sqrt{D}}{\sin\theta_i\sqrt{F_{x^2}}}, \qquad \sin\overline{\xi O_i} = \frac{\xi_i\sqrt{D}}{\sqrt{\Phi_{\xi^2}}},$$

d'où une interprétation métrique immédiate du rapport de deux coordonnées d'un élément.

De même, si (x) appartient à Ω_1 de sorte que $x_1 = 0$, on a

$$\sin\overline{xO_2} = -\frac{x_3\sin\theta_1}{\sqrt{F_{x^2}}}, \qquad \sin\overline{xO_3} = \frac{x_2\sin\theta_1}{\sqrt{F_{x^2}}},$$

et, par suite, une interprétation nouvelle du rapport $\frac{x_2}{x_3}$.

On aurait des formules analogues pour un élément de seconde espèce (ξ).

Nous n'insisterons pas sur les conséquences de ces remarques. Nous observerons seulement que, si l'on considère l'espace E comme un point tel que les éléments de première et de seconde espèce soient les droites et les plans qui passent par ce point, la théorie que nous venons de développer coïncide manifestement avec celle des angles dans cet espace, à condition de remplacer le mot *distance* par *angle*, et de prendre comme absolu le cône isotrope qui a son sommet au point considéré. Par suite encore, cette théorie correspond à la Géométrie métrique sphérique, et les formules de ce numéro sont celles de la Trigonométrie sphérique.

376. Il serait facile, avec les formules que nous avons indiquées plus haut, de retrouver les propositions connues de la Géométrie sphérique relatives aux triangles, aux transversales, etc. Nous nous contenterons d'indiquer quelques résultats.

Si l'on considère la suite triple fondamentale $O_1 O_2 O_3$, avec les mêmes notations qu'au numéro précédent, l'élément Π_1 perpendiculaire à Ω_1 et contenant O_1 aura pour équation

$$x_2(\cos\theta_3 \cos\theta_1 - \cos\theta_2) - x_3(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \cos\theta_3) = 0;$$

les trois éléments Π_1, Π_2 et Π_3 sont par suite alignés.

L'élément P_1, perpendiculaire à O_1 et contenant Ω_1, aura de même pour équation

$$\xi_2 \cos\theta_2 - \xi_3 \cos\theta_3 = 0;$$

les trois éléments P_i sont alignés.

La distance $\overline{O_2 O_3}$ a deux milieux; l'un M_1, *intérieur*, tel que

$$\overline{M_1 O_2} + \overline{M_1 O_3} \equiv 0 \qquad (\text{mod}\, 2\pi);$$

l'autre M'_1, *extérieur*, tel que

$$\overline{M'_1 O_2} + \overline{M'_1 O_3} \equiv \pi \qquad (\text{mod}\, 2\pi):$$

ces deux milieux M_1 et M'_1 sont évidemment les éléments doubles de l'involution déterminée par O_2 et O_3 d'une part et les éléments communs à Ω_1 et à l'absolu d'autre part.

Les équations de O_1M_1 et $O_1M'_1$ sont respectivement

$$x_2 - x_3 = 0 \qquad \text{et} \qquad x_2 + x_3 = 0.$$

On voit que les O_iM_i sont des éléments alignés; il en est de même de O_1M_1, $O_2M'_2$, $O_3M'_3$ par exemple; les M'_i sont des éléments alignés; il en est de même de M'_1, M_2, M_3 par exemple; et ainsi de suite.

Considérons le lieu des éléments (x) tels que l'on ait

$$\cos \overline{x O_2} = \pm \cos \overline{x O_3};$$

ce sont les séries linéaires

$$\cos\theta_3 x_1 + x_2 + \cos\theta_1 x_3 = \pm(\cos\theta_2 x_1 + \cos\theta_1 x_2 + x_3);$$

elles contiennent respectivement M_1 et M'_1 et sont perpendiculaires à Ω_1; on peut énoncer, pour les six séries linéaires analogues, des propositions semblables à celles qui précèdent relativement aux O_iM_i et $O_iM'_i$.

On envisagera de la même façon les milieux des distances telles que $\overline{\Omega_2\Omega_3}$.

On n'oubliera pas, d'ailleurs, que la plupart des propositions précédentes, qui prennent un intérêt spécial en Géométrie métrique, correspondent à des propriétés plus générales de la Géométrie projective, qu'il serait facile d'énoncer. Mais il est inutile de donner plus d'indications sur ces théorèmes spéciaux que l'on peut multiplier à volonté; il est suffisant d'avoir montré leur origine générale.

II. — Les mouvements et les invariants métriques.

377. La distance de deux éléments quelconques ne change pas quand on fait un changement de coordonnées, ou une transformation homographique quelconque, à la condition que les constantes m et μ gardent leurs valeurs, et que, dans le dernier cas, le nouvel absolu soit l'ancien transformé.

Transformons maintenant les éléments de l'espace E par une

homographie quelconque σ

$$x_1 = \lambda_1 x'_1 + \mu_1 x'_2 + \nu_1 x'_3,$$
$$x_2 = \lambda_2 x'_1 + \mu_2 x'_2 + \nu_3 x'_3,$$
$$x_3 = \lambda_3 x'_1 + \mu_3 x'_2 + \nu_3 x'_3,$$

les (x') étant rapportés aux mêmes coordonnées que les (x), et laissons l'absolu invariable, ainsi que les constantes m et μ.

On peut rechercher les homographies σ qui sont telles que la distance de deux éléments quelconques soit égale à la distance des deux éléments correspondants, au degré près d'indétermination qui se présente toujours quand il s'agit de distances.

La considération des éléments à distance infinie montre tout de suite qu'une condition nécessaire est que, si l'on applique la substitution σ à l'absolu, on retrouve l'absolu lui-même, et cette condition est aussi manifestement suffisante. Les substitutions σ cherchées sont donc telles que l'on ait

$$\frac{F_{\lambda^2}}{F_{11}} = \frac{F_{\mu^2}}{F_{22}} = \frac{F_{\nu^2}}{F_{33}} = \frac{F_{\mu\nu}}{F_{23}} = \frac{F_{\nu\lambda}}{F_{31}} = \frac{F_{\lambda\mu}}{F_{12}};$$

et d'après l'identité

$$\begin{vmatrix} F_{\lambda^2} & F_{\lambda\mu} & F_{\lambda\nu} \\ F_{\lambda\mu} & F_{\mu^2} & F_{\mu\nu} \\ F_{\lambda\nu} & F_{\mu\nu} & F_{\nu^2} \end{vmatrix} = D(\lambda\mu\nu)^2,$$

la valeur commune des rapports précédents est $(\lambda\mu\nu)^{\frac{2}{3}}$.

378. Pour étudier plus facilement les homographies que nous venons de définir, nous prendrons F sous la forme canonique déjà employée souvent,

$$F = x_1^2 - 4x_2x_3;$$

alors, on a $F_{\mu^2} = 0$, $F_{\nu^2} = 0$, $F_{\lambda\mu} = 0$, $F_{\lambda\nu} = 0$, et l'on doit par suite écrire, en appelant ω_1, ω_2, ω'_1, ω'_2, α des paramètres arbitraires,

$$\mu_1 = 2\omega_1\omega_2, \qquad \nu_1 = 2\omega'_1\omega'_2, \qquad \lambda_1 = \alpha(\omega_1\omega'_2 + \omega_2\omega'_1),$$
$$\mu_2 = \omega_1^2, \qquad \nu_2 = \omega_1'^2, \qquad \lambda_2 = \alpha\omega_1\omega'_1,$$
$$\mu_3 = \omega_2^2, \qquad \nu_3 = \omega_2'^2, \qquad \lambda_3 = \alpha\omega_2\omega'_2.$$

La condition $\frac{F_{\lambda^2}}{1} = \frac{F_{\mu\nu}}{-2}$ donne alors $\alpha^2 = 1$, et il est clair que l'on ne diminue pas la généralité en faisant $\alpha = 1$.

Les substitutions σ cherchées sont donc de la forme

$$\begin{aligned} x_1 &= (\omega_1\omega'_2 + \omega_2\omega'_1)x'_1 + 2\omega_1\omega_2 x'_2 + 2\omega'_1\omega'_2 x'_3, \\ x_2 &= \omega_1\omega'_1 x'_1 + \omega_1^2 x'_2 + \omega'^2_1 x'_3, \\ x_3 &= \omega_2\omega'_2 x'_1 + \omega_2^2 x'_2 + \omega'^2_2 x'_3, \end{aligned}$$

et, en faisant $\omega_1\omega'_2 - \omega_2\omega'_1 = \omega$, on a $(\lambda\mu\nu) = \omega^3$, tandis que les rapports tels que $\frac{F_{\lambda^2}}{F_{11}}$. sont égaux à ω^2.

Inversement, on a

$$\begin{aligned} \omega^2 x'_1 &= (\omega_1\omega'_2 + \omega_2\omega'_1)x_1 - 2\omega_2\omega'_2 x_2 - 2\omega_1\omega'_1 x_3, \\ \omega^2 x'_2 &= -\omega'_1\omega'_2 x_1 + \omega'^2_2 x_2 + \omega'^2_1 x_3, \\ \omega^2 x'_3 &= -\omega_1\omega_2 x_1 + \omega_2^2 x_2 + \omega_1^2 x_3. \end{aligned}$$

Si F était donnée sous la forme la plus générale, on chercherait d'abord une substitution

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_{11}X_1 + \lambda_{12}X_2 + \lambda_{13}X_3, \\ x_2 &= \lambda_{21}X_1 + \lambda_{22}X_2 + \lambda_{23}X_3, \\ x_3 &= \lambda_{31}X_1 + \lambda_{32}X_2 + \lambda_{33}X_3, \end{aligned}$$

qui mette F sous la forme $X_1^2 - 4X_2X_3$, à un facteur près; appliquant alors aux (X) l'une des substitutions σ précédemment définies et supposant que les formules précédentes donnent

$$\begin{aligned} \delta X_1 &= \mu_{11}x_1 + \mu_{21}x_2 + \mu_{31}x_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

δ étant le déterminant des coefficients (λ), on trouvera

$$\begin{aligned} \delta x_i = \Sigma x'_j \Big\{ &\mu_{j1}[\lambda_{i1}(\omega_1\omega'_2 + \omega_2\omega'_1) + \lambda_{i2}\omega_1\omega'_1 + \lambda_{i3}\omega_2\omega'_2] \\ &+ \mu_{j2}[2\lambda_{i1}\omega_1\omega_2 + \lambda_{i2}\omega_1^2 + \lambda_{i3}\omega_2^2] \\ &+ \mu_{j3}[2\lambda_{i1}\omega'_1\omega'_2 + \lambda_{i2}\omega'^2_1 + \lambda_{i3}\omega'^2_2] \Big\}. \end{aligned}$$

Si, par exemple, on a

$$F = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

on fera

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1, \\ x_2 &= -iX_2 - iX_3, \\ x_3 &= X_2 - X_3, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} 2iX_1 &= 2ix_1, \\ 2iX_2 &= -x_2 + ix_3, \\ 2iX_3 &= -x_2 - ix_3, \end{aligned}$$

et l'on obtiendra des formules semblables à celles connues sous le nom d'*Olinde Rodrigues*.

379. Les substitutions σ que nous venons de déterminer sont des *mouvements*. Si (x) et (x') sont correspondants, on a

$$F_{x^2} = \omega^2 F_{x'^2};$$

on peut donc considérer (x') comme orienté en se donnant la détermination $\sqrt{F_{x'^2}}$, et, par suite, (x) comme orienté, en faisant $\sqrt{F_{x^2}} = \pm\,\omega\sqrt{F_{x'^2}}$, le signe étant toujours le même; de même, on a, si (ξ) et (ξ') sont correspondants, $\Phi_{\xi'^2} = \omega^2\Phi_{\xi^2}$ et l'on peut considérer (ξ) et (ξ') comme orientés simultanément, en faisant $\sqrt{\Phi_{\xi'^2}} = \pm\,\omega\sqrt{\Phi_{\xi^2}}$, le signe étant le même que plus haut. De même enfin, la quantité $\sqrt{F_{x^2}\Phi_{\xi^2} - D(x\,|\,\xi)^2}$ peut être considérée comme ne changeant pas de valeur après la substitution σ. Ces conventions faites, et nous les conserverons par la suite, on voit que la distance de deux éléments quelconques est toujours égale à celle des deux éléments qui leur correspondent, et cette propriété justifie le nom de *mouvement* donné plus haut aux transformations σ qui nous occupent.

Un mouvement est une homographie dont les invariants sont, avec les notations du n° 206,

$$i = \omega_1\omega'_2 + \omega_2\omega'_1 + \omega_1^2 + \omega'^2_2, \qquad j = \omega\, i, \qquad d = \omega^3,$$

et, par suite, vérifient la relation

$$j^3 - di^3 = 0.$$

Ces formules sont d'ailleurs valables quelle que soit la forme F. La condition $j^3 - di^3 = 0$ exprime, comme l'on sait, que si la transformation σ fait correspondre $(x^{(1)})$ à (x), $(x^{(2)})$ à $(x^{(1)})$, ..., les six éléments (x), $(x^{(1)})$, $(x^{(2)})$, $(x^{(3)})$, $(x^{(4)})$, $(x^{(5)})$ appartiennent à une même série quadratique, qui contient aussi par suite tous les éléments $(x^{(n)})$.

L'équation en ρ se décompose en

$$\rho - \omega = 0$$

et

$$\rho^2 + (\omega - i)\rho + \omega^2 = 0;$$

ω n'étant pas nul, on n'a comme cas particuliers possibles que

ceux qui correspondent aux hypothèses $i + \omega = 0$, $i - 3\omega = 0$.

Dans le cas général, à la racine ω de l'équation en ρ correspond un élément double (x) défini par les relations

$$\frac{x_1}{\omega_1 - \omega'_2} = \frac{x_2}{-\omega'_1} = \frac{x_3}{\omega_2},$$

et un élément double (ξ), normal à (x),

$$\frac{\xi_1}{\omega_1 - \omega'_2} = \frac{\xi_2}{-2\omega_2} = \frac{\xi_3}{2\omega'_1};$$

nous appellerons ces deux éléments O et Ω.

Il est clair alors que les autres éléments doubles sont les éléments communs à F et Ω, ou bien à Φ et O. On remarquera d'ailleurs que les éléments de F ou Φ sont soumis par la transformation σ à une transformation homographique, et les éléments doubles de ces deux homographies sont ceux que nous venons de trouver.

D'après une proposition connue, si (x) et (x') sont deux éléments correspondants, la distance $\overline{(Ox)(Ox')}$ aura une valeur constante, qui sera la grandeur du mouvement; si (ξ) et (ξ') sont de même deux éléments correspondants, la distance $\overline{(\Omega\xi)(\Omega\xi')}$ aura la même valeur constante, μ étant remplacé par m. En orientant de façon correspondante les éléments (Ox) et (Ox'), qui sont correspondants, on trouve

$$\cos\frac{\overline{(Ox)(Ox')}}{2i\mu} = \frac{i - \omega}{2\omega}, \qquad \sin\frac{\overline{(Ox)(Ox')}}{2i\mu} = \frac{\sqrt{(\omega + i)(3\omega - i)}}{2\omega};$$

la dernière formule contient un radical dont la détermination correspond à l'orientation de O; la première donne la signification de $i - \omega = 0$.

De plus, les distances $\overline{Ox}$ et $\overline{Ox'}$ sont évidemment égales, et de même les distances $\overline{\Omega\xi}$ et $\overline{\Omega\xi'}$; comme le lieu de (x), quand $\overline{Ox}$ est donnée, est manifestement une série quadratique, bitangente d'ailleurs à F aux deux éléments doubles du mouvement autres que O, la remarque faite plus haut sur la condition $j^3 - di^3 = 0$ devient évidente. Ajoutons qu'une telle série quadratique ne change pas par la substitution σ, comme l'absolu.

On peut, s'il est nécessaire, simplifier l'étude d'un mouve-

ment en supposant que O soit l'élément fondamental O_1; alors $\omega_2 = \omega'_1 = 0$. On a

$$x_1 = \omega_1 \omega'_2 x'_1, \qquad x_2 = \omega_1^2 x'_2, \qquad x_3 = \omega'^2_2 x'_3,$$

$$\omega = \omega_1 \omega'_2, \qquad i = \omega_1 \omega'_2 + \omega_1^2 + \omega'^2_2,$$

$$\cos\frac{\overline{(Ox)(Ox')}}{2i\mu} = \frac{\omega_1^2 + \omega'^2_2}{2\omega_1\omega'_2}, \qquad \sin\frac{\overline{(Ox)(Ox')}}{2i\mu} = \frac{(\omega_1^2 - \omega'^2_2)\sqrt{-1}}{2\omega_1\omega'_2}.$$

Examinons maintenant les cas particuliers.

Si $i - 3\omega = 0$, la racine ω de l'équation en ρ est triple, et il ne lui correspond qu'un élément double de chaque espèce. Ce cas est limite du précédent; O appartient à F et Ω est tangent à F en O. Deux éléments correspondants (x) et (x') appartiennent à une même série quadratique surosculatrice à F en O, qui ne change pas par la substitution σ.

Enfin, si $i + \omega = 0$, la racine ω est simple pour l'équation en ρ et fournit, comme précédemment, deux éléments doubles normaux O et Ω, qui ne se contiennent pas; l'équation en ρ a en outre une racine double $-\omega$, à laquelle correspondent tous les éléments de Ω et de O comme éléments doubles; l'homographie σ est donc ici une homologie involutive. On a

$$\overline{(Ox)(Ox')} \equiv 2i\mu\pi \qquad (\text{mod}\ 4i\mu\pi);$$

les formules simples données dans le cas général subsistent avec l'hypothèse $\omega_1 + \omega'_2 = 0$.

Toutes les propriétés générales des homographies s'appliqueront aux mouvements, sans qu'il soit nécessaire d'insister.

380. Les mouvements forment évidemment un groupe. Si deux mouvements successifs ont pour paramètres $\omega_1, \omega_2, \omega'_1, \omega'_2$ comme précédemment, et, avec le même sens, $\theta_1, \theta_2, \theta'_1, \theta'_2$, le mouvement résultant aura pour paramètres correspondants

$$\Omega_1 = \omega_1\theta_1 + \omega'_1\theta_2, \qquad \Omega'_1 = \omega_1\theta'_1 + \omega'_1\theta'_2,$$

$$\Omega_2 = \omega_2\theta_1 + \omega'_2\theta_2, \qquad \Omega'_2 = \omega_2\theta'_1 + \omega'_2\theta'_2;$$

d'ailleurs

$$\Omega_1\Omega'_2 - \Omega_2\Omega'_1 = (\omega_1\omega'_2 - \omega_2\omega'_1)(\theta_1\theta'_2 - \theta_2\theta'_1).$$

Ces formules, qui donnent la loi de *composition* des mouve-

ments, s'obtiennent aisément en composant les deux substitutions linéaires suivantes, qui s'appliquent à des variables binaires (λ), (λ'), (λ''),

$$\lambda_1 = \omega_1 \lambda'_1 + \omega'_1 \lambda'_2, \qquad \lambda'_1 = \theta_1 \lambda''_1 + \theta'_1 \lambda''_2,$$
$$\lambda_2 = \omega_2 \lambda'_1 + \omega'_2 \lambda'_2, \qquad \lambda'_2 = \theta_2 \lambda''_1 + \theta'_2 \lambda''_2,$$

et qui donnent, en effet,

$$\lambda_1 = \Omega_1 \lambda''_1 + \Omega'_1 \lambda''_2,$$
$$\lambda_2 = \Omega_2 \lambda''_1 + \Omega'_2 \lambda''_2.$$

Ce fait est rendu évident par la remarque suivante : si l'on considère un élément (x) de l'absolu et que l'on suppose $x_1 = 2\lambda_1\lambda_2$, $x_2 = \lambda_1^2$, $x_3 = \lambda_2^2$, cet élément devient, après la transformation σ, (x'), et si les (λ') sont les paramètres correspondants, on a précisément

$$\lambda_1 = \omega_1 \lambda'_1 + \omega'_1 \lambda'_2,$$
$$\lambda_2 = \omega_2 \lambda'_1 + \omega'_2 \lambda'_2.$$

L'étude du mouvement σ est donc liée d'une façon fort simple à celle de l'homographie déterminée par cette dernière substitution sur l'absolu; les invariants de cette homographie sont d'ailleurs $\omega_1 + \omega'_2 = \sqrt{i + \omega}$ et ω.

Cette remarque permet d'écrire facilement la substitution σ quand F est donnée sous une forme quelconque : il suffira d'exprimer rationnellement les coordonnées d'un élément de F en fonction de λ_1 et λ_2, d'effectuer la substitution linéaire précédente sur les (λ), et finalement de remplacer $\lambda_1'^2$, $2\lambda'_1\lambda'_2$, $\lambda_2'^2$ par leurs expressions linéaires en fonction des (x').

381. Les mouvements formant un groupe à quatre paramètres, on peut, pour ce groupe, construire des invariants absolus d'un système ternaire S quelconque. En gardant les notations du Chapitre I, ces invariants seront distincts en nombre P — 4, en général, et seront les solutions de quatre équations aux dérivées partielles qu'il sera toujours facile de former en remarquant que le groupe contient quatre substitutions infinitésimales qui correspondent aux substitutions infinitésimales de la substitution binaire générale relative aux (λ) définie au numéro précédent.

Dans le cas étudié précédemment, où $F = x_1^2 - 4x_2x_3$, ces

quatre équations, formant un système complet, seront

$$\Delta_{11}F + 2\Delta_{22}F = 0, \qquad 2\Delta_{12}F + \Delta_{31}F = 0,$$
$$\Delta_{11}F + 2\Delta_{33}F = 0, \qquad 2\Delta_{13}F + \Delta_{21}F = 0.$$

On fera sur ces invariants métriques absolus les mêmes remarques qu'en Géométrie binaire.

On pourra les former en adjoignant au système S les coefficients de l'absolu, et prenant ceux des invariants absolus ordinaires du système S_1 ainsi formé qui sont homogènes et de degré zéro par rapport aux coefficients de l'absolu. Il en résulte que les équations aux dérivées partielles qui les déterminent pourront être formées de la façon suivante en général. On considérera les neuf équations

$$\Delta_{11}F + 2F_{11}\frac{\partial F}{\partial F_{11}} + F_{12}\frac{\partial F}{\partial F_{12}} + F_{13}\frac{\partial F}{\partial F_{13}} = 0,$$
$$\Delta_{22}F + F_{12}\frac{\partial F}{\partial F_{12}} + 2F_{22}\frac{\partial F}{\partial F_{22}} + F_{23}\frac{\partial F}{\partial F_{23}} = 0,$$
$$\Delta_{33}F + F_{13}\frac{\partial F}{\partial F_{13}} + F_{23}\frac{\partial F}{\partial F_{23}} + 2F_{33}\frac{\partial F}{\partial F_{33}} = 0,$$
$$\Delta_{23}F + F_{12}\frac{\partial F}{\partial F_{13}} + F_{22}\frac{\partial F}{\partial F_{23}} + 2F_{23}\frac{\partial F}{\partial F_{33}} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

on leur adjoindra l'équation

$$F_{11}\frac{\partial F}{\partial F_{11}} + \ldots + F_{23}\frac{\partial F}{\partial F_{23}} + \ldots = 0,$$

qui exprime que l'invariant F est homogène et de degré zéro par rapport aux coefficients de l'absolu, et entre ces dix équations on éliminera les quantités $\frac{\partial F}{\partial F_{11}}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial F_{23}}, \ldots$. On trouvera ainsi les quatre équations cherchées. On remarquera que les symboles $\Delta_{ij}F$ employés plus haut se rapportent uniquement aux éléments du système S, et qu'au surplus il n'y a pas de confusion possible sur la signification de la lettre F, déjà employée pour désigner l'absolu.

Si, par exemple, on a

$$F = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

les quatre équations cherchées seront

$$\Delta_{11}F + \Delta_{22}F + \Delta_{33}F = 0,$$

$$\Delta_{23}F - \Delta_{32}F = 0, \qquad \Delta_{31}F - \Delta_{13}F = 0. \qquad \Delta_{12}F - \Delta_{21}F = 0$$

382. On envisagera de même des invariants non absolus, qui se reproduiront à une fonction près des paramètres des substitutions qui caractérisent les mouvements. Dans le cas où l'absolu est

$$F = x_1^2 - 4x_2x_3,$$

ils vérifient les équations

$$\Delta_{11}F + 2\Delta_{22}F = \mu F, \qquad 2\Delta_{12}F + \Delta_{31}F = 0,$$
$$\Delta_{11}F + 2\Delta_{33}F = \mu F, \qquad 2\Delta_{13}F + \Delta_{21}F = 0,$$

μ étant une constante quelconque. Ils se reproduisent multipliés par ω^μ. On pourra les former en cherchant les invariants ordinaires du système S_1 précédemment indiqué, et excluant le discriminant de l'absolu.

Ces invariants sont indépendants en nombre P — 3 en général; ce sont les invariants absolus du groupe particulier de mouvements pour lesquels $\omega = 1$.

Les invariants métriques absolus ou ordinaires correspondent aux propriétés métriques absolues ou accidentelles du système S.

383. De même que nous avons étudié les mouvements, on pourrait chercher des réciprocités dans l'espace E, telles que l'absolu restant le même, et les constantes m et μ étant échangées, la distance de deux éléments correspondants reste la même; par suite l'absolu serait changé en sa série tangentielle. On voit tout de suite qu'on obtiendra toutes ces réciprocités en faisant d'abord un mouvement, puis en remplaçant chaque nouvel élément par celui qui lui est normal, c'est-à-dire en employant une réciprocité involutive, dans laquelle les éléments correspondants sont pôle et polaire par rapport à l'absolu. Nous n'insisterons pas sur l'étude de ces transformations.

III. — Les cercles.

384. Les formules de la Géométrie métrique ternaire générale permettent de retrouver facilement tous les théorèmes de Géo-

métrie sphérique élémentaire. Nous ne ferons pas cette étude, et nous développerons simplement quelques points particuliers d'une importance capitale.

Considérons une série quadratique de première espèce bitangente à l'absolu, de sorte que son équation pourra s'écrire

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)^2 + \alpha_4^2 F_{x^2} = 0.$$

Nous pouvons dédoubler tout d'abord, en quelque sorte, cette série en deux autres *orientées,* puisque son équation nous permet d'exprimer $\sqrt{-F_{x^2}}$ en fonction rationnelle des coordonnées (x) et que l'on a $\sqrt{-F_{x^2}} = i\sqrt{F_{x^2}}$: ces deux séries seront donc composées d'éléments orientés, et leurs éléments sont les mêmes, mais orientés en sens différent. Une telle série orientée sera donc

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 \sqrt{-F_{x^2}} = 0;$$

nous dirons que c'est une *série circulaire* de première espèce, ou simplement un *cercle;* l'équation générale des cercles contient d'une façon linéaire et homogène quatre paramètres α_1, α_2, α_3, α_4; le cercle correspondant à un système de valeurs de ces paramètres sera désigné par C_α ainsi que le premier membre de son équation, et ses coordonnées seront les (α).

Les séries linéaires sont des cercles particuliers pour lesquels $\alpha_4 = 0$; l'absolu est aussi un cercle particulier.

Le discriminant du cercle C_α est celui de la forme quadratique

$$(\alpha \mid x)^2 + \alpha_4^2 F_{x^2},$$

que nous écrivons en considérant α_1, α_2, α_3 comme des coordonnées ordinaires de seconde espèce; sa valeur est $\alpha_4^4(\Phi_{\alpha^2} + D\alpha_4^2)$.

Le facteur $\Phi_{\alpha^2} + D\alpha_4^2$ est une forme quadratique contenant les quatre variables (α), et que nous désignerons par Γ_{α^2}; quand cette forme s'annule sans que α_4 soit nul, le cercle se compose de deux éléments tangents à l'absolu, à éléments orientés.

Si de plus α_4 est nul, ces deux éléments coïncident.

385. La série tangentielle de $(\alpha \mid x)^2 + \alpha_4^2 F_{x^2} = 0$ est, après suppression du facteur $\frac{-\alpha_4^2}{D}$,

$$\Phi_{\alpha\xi}^2 - \Gamma_{\alpha^2}\Phi_{\xi^2} = 0;$$

on peut comme précédemment dédoubler, ou orienter, cette

série, en fixant la détermination du radical $\sqrt{-\Gamma_{\alpha^2}}$; on obtient ainsi une série circulaire de seconde espèce, ou *cycle*, d'équation

$$\Phi_{\alpha\xi}+\sqrt{-\Gamma_{\alpha^2}}\sqrt{-\Phi_{\xi^2}}=0;$$

ce cycle est dit équivalent au cercle C_α; ses coordonnées sont $\Phi_{\alpha_1}, \Phi_{\alpha_2}, \Phi_{\alpha_3}, \sqrt{-\Gamma_{\alpha^2}}$.

Le cycle équivalent à un cercle est complètement défini par la détermination de $\sqrt{-\Gamma_{\alpha^2}}$; on dit alors que le cercle C_α est lui-même *orienté*.

Si $\Gamma_{\alpha^2}=0$, le cycle *équivalent* au cercle C_α est une série linéaire, l'élément double de C_α.

Quand $\alpha_4=0$, le cercle C_α se réduit à une série linéaire (α), et n'a pas à proprement parler de cycle équivalent; cependant l'équation ci-dessus, obtenue après suppression du facteur α_4^2, nul dans le cas qui nous occupe, garde un sens, et définit un cycle décomposable composé des éléments communs à l'absolu et à (α), qui est dit encore *équivalent* à (α). Ici $\sqrt{-\Gamma_{\alpha^2}}$ se réduit à $\pm\sqrt{-\Phi_{\alpha^2}}$, et, en effet, la connaissance de ce radical oriente l'élément (α).

386. Si l'on considère directement un cycle Γ_a, d'équation

$$a_1\xi_1+a_2\xi_2+a_3\xi_3+a_4\sqrt{-\Phi_{\xi^2}}=0,$$

on sera amené de la même façon à définir son discriminant $a_4^4 D(F_{a^2}+Da_4^2)$ ou $a_4^4 DC_{a^2}$; la détermination du radical $\sqrt{-C_{a^2}}$ oriente le cycle. La forme équivalente à $(a\,|\,\xi)^2+a_4^2\Phi_{\xi^2}$ est, après suppression du facteur $-a_4^2$,

$$F_{ax}^2-C_{a^2}F_{x^2},$$

et le cercle équivalent au cycle donné orienté est

$$F_{ax}+\sqrt{-C_{a^2}}\sqrt{-F_{x^2}}=0;$$

l'orientation de ce cercle, que nous désignons pour un instant par $C_{\alpha'}$, est obtenue en faisant $\sqrt{-\Gamma_{\alpha'^2}}=Da_4$.

De même l'orientation du cycle $\Gamma_{a'}$

$$\Phi_{\alpha\xi}+\sqrt{-\Gamma_{\alpha^2}}\sqrt{-\Phi_{\xi^2}}=0,$$

équivalent au cercle C_α, est déterminée en faisant $\sqrt{-C_{a'^2}}=D\alpha_4$.

Ce seront toujours les cercles que nous supposerons donnés directement.

387. Étant donné un cercle C_α, fixons encore la détermination du radical $\sqrt{-\Phi_{\alpha^2}}$, de façon à orienter la série linéaire (α), dont la signification géométrique est évidente. L'équation du cycle équivalent s'écrit

$$\frac{-\Phi_{\alpha\xi}}{\sqrt{-\Phi_{\xi^2}}\sqrt{-\Phi_{\alpha^2}}} = \frac{\sqrt{-\Gamma_{\alpha^2}}}{\sqrt{-\Phi_{\alpha^2}}},$$

ou encore

$$\cos\frac{\overline{\alpha\xi}}{2i\mu} = \frac{\sqrt{-\Gamma_{\alpha^2}}}{\sqrt{-\Phi_{\alpha^2}}};$$

de même, si (a) est normal à (α), de sorte que

$$a_i = \Phi_{\alpha_i}, \qquad \sqrt{-F_{a^2}} = \sqrt{D}\sqrt{-\Phi_{\alpha^2}},$$

l'équation du cercle C_α s'écrit

$$\cos\frac{\overline{ax}}{2im} = \frac{-F_{ax}}{\sqrt{-F_{x^2}}\sqrt{-F_{a^2}}} = \frac{\alpha_4\sqrt{D}}{\sqrt{-\Phi_{\alpha^2}}}.$$

Il y a plus : on peut orienter (ax), en faisant

$$\sqrt{\Phi_{(ax)^2}} = -\frac{\sqrt{-F_{x^2}}\sqrt{-F_{a^2}}\sqrt{-\Gamma_{\alpha^2}}}{\sqrt{-\Phi_{\alpha^2}}},$$

et de même $(\alpha\xi)$, en faisant

$$\sqrt{F_{(\alpha\xi)^2}} = -\frac{\alpha_4\sqrt{-\Phi_{\xi^2}}\sqrt{-\Phi_{\alpha^2}}}{\sqrt{-\Phi_{\alpha^2}}},$$

et, par suite, il vient

$$\sin\frac{\overline{ax}}{2im} = \frac{\sqrt{-\Gamma_{\alpha^2}}}{\sqrt{-\Phi_{\alpha^2}}}, \qquad \sin\frac{\overline{\alpha\xi}}{2i\mu} = \frac{\alpha_4\sqrt{D}}{\sqrt{-\Phi_{\alpha^2}}}.$$

Si nous posons

$$\cos\rho = \frac{\alpha_4\sqrt{D}}{\sqrt{-\Phi_{\alpha^2}}}, \qquad \sin\rho = \frac{\sqrt{-\Gamma_{\alpha^2}}}{\sqrt{-\Phi_{\alpha^2}}},$$

nous avons donc, à des multiples près de $4im\pi$ et $4i\mu\pi$,

$$\overline{ax} = 2im\rho, \qquad \overline{\alpha\xi} = 2i\mu\rho;$$

$2im\rho$ est appelé le *rayon* du cercle C_α; (a) est le *centre* du

cercle C_α. De même, le cycle Γ_a, équivalent au cercle C_α, a pour centre (α), et pour rayon $2i\mu\left(\frac{\pi}{2}-\rho\right)$.

Quand on change le signe de $\sqrt{-\Phi_{\alpha^2}}$, le rayon augmente d'un multiple impair de $2im\pi$ ou $2i\mu\pi$.

Quand $\alpha_4=0$, de sorte que le cercle C_α devient une série linéaire (α), son centre est l'élément normal à (α), et son rayon est $\pm im\pi$, suivant que $\sqrt{-\Gamma_{\alpha^2}}=\pm\sqrt{-\Phi_{\alpha^2}}$.

Si le cercle C_α est décomposable, son centre est son élément double, et son rayon est o, en choisissant convenablement l'orientation du centre : on dit que c'est un cercle de rayon nul.

Quand $\Phi_{\alpha^2}=0$, la série $(\alpha\,|\,x)^2+\alpha_4^2 F_{x^2}=0$ est surosculatrice à l'absolu; son centre est l'élément de contact de $(\alpha\,|\,x)=0$ avec l'absolu; son rayon est essentiellement indéterminé.

388. Considérons deux cercles C_α et C_β, ainsi que les cycles équivalents Γ_a et Γ_b.

Les deux cercles C_α et C_β ont deux éléments communs, appartenant à la série linéaire $C_{\alpha\beta}$

$$\frac{C_\alpha}{\alpha_4}-\frac{C_\beta}{\beta_4}=\frac{(\alpha\,|\,x)}{\alpha_4}-\frac{(\beta\,|\,x)}{\beta_4}=0,$$

qui contient $(\alpha\beta)$, et par suite est perpendiculaire à (ab).

L'élément commun à $C_{\alpha\beta}$ et (ab) est le milieu évidemment intérieur de la distance des deux éléments communs aux deux cercles, le milieu extérieur de cette même distance étant $(\alpha\beta)$.

Si (ξ) et (η) sont les éléments tangents orientés aux deux cercles en un de leurs éléments communs, et si l'on désigne leur distance par *distance* $\overline{C_\alpha C_\beta}$ des deux cercles, on a sans peine

$$\cos\frac{\overline{C_\alpha C_\beta}}{2i\mu}=\frac{-\Gamma_{\alpha\beta}}{\sqrt{-\Gamma_{\alpha^2}}\sqrt{-\Gamma_{\beta^2}}},$$

où $\Gamma_{\alpha\beta}$ est la forme polaire de Γ_{α^2}.

On a aussi

$$\sin\frac{\overline{C_\alpha C_\beta}}{2i\mu}=\frac{\sqrt{D}\sqrt{F_{(\alpha\beta)^2}+(\alpha_4^2\Phi_{\beta^2}-2\alpha_4\beta_4\Phi_{\alpha\beta}+\beta_4^2\Phi_{\alpha^2})}}{\sqrt{-\Gamma_{\alpha^2}}\sqrt{-\Gamma_{\beta^2}}},$$

et la détermination précise du second membre dépend de l'élément commun choisi.

De même les deux cycles Γ_a et Γ_b ont deux éléments communs appartenant à la série linéaire Γ_{ab}

$$\frac{\Gamma_a}{\sqrt{-\Gamma_{\alpha^2}}} - \frac{\Gamma_b}{\sqrt{-\Gamma_{\beta^2}}} = \frac{\Phi_{\alpha\xi}}{\sqrt{-\Gamma_{\alpha^2}}} - \frac{\Phi_{\beta\xi}}{\sqrt{-\Gamma_{\beta^2}}} = 0,$$

et l'on fera les mêmes remarques que précédemment.

La distance $\overline{\Gamma_a\Gamma_b}$ des deux cycles, définie comme distance des éléments tangents en un même élément commun, est donnée par

$$\cos\frac{\overline{\Gamma_a\Gamma_b}}{2im} = \frac{-\Phi_{\alpha\beta} - \sqrt{-\Gamma_{\alpha^2}}\sqrt{-\Gamma_{\beta^2}}}{D\alpha_4\beta_4}.$$

389. Quand on a $\Gamma_{\alpha\beta} = 0$, on dit que les deux cercles C_α et C_β sont *orthogonaux;* de même les deux cycles Γ_a et Γ_b sont orthogonaux quand on a

$$\Phi_{\alpha\beta} + \sqrt{-\Gamma_{\alpha^2}}\sqrt{-\Gamma_{\beta^2}} = 0.$$

On a en même temps

$$\cos\frac{\overline{C_\alpha C_\beta}}{2i\mu} = \cos\frac{\overline{\Gamma_a\Gamma_b}}{2im} = 1,$$

et l'on dit alors que les deux cercles, comme les deux cycles, sont *tangents;* la condition de contact est donc

$$\Gamma_{\alpha\beta} + \sqrt{-\Gamma_{\alpha^2}}\sqrt{-\Gamma_{\beta^2}} = 0,$$

ou encore, en introduisant les rayons r et s de C_α et C_β,

$$\overline{ab} \equiv \pm(r - s) \qquad (\text{mod}\ 4\,im\pi).$$

Quand on a de même

$$\overline{ab} \equiv \pm(r + s),$$

ou

$$\overline{ab} \equiv 2im\pi \pm (r + s),$$

on a

$$\cos\frac{\overline{C_\alpha C_\beta}}{2i\mu} = -1,$$

ou

$$\cos\frac{\overline{\Gamma_a\Gamma_b}}{2im} = -1,$$

et les cercles C_α et C_β dans le premier cas, les cycles Γ_a et Γ_b dans le second, sont dits *quasi-tangents*.

De même, la condition d'orthogonalité s'écrit

$$\cos\frac{\overline{ab}}{2im} = \cos\frac{r}{2im}\cos\frac{s}{2im},$$

et plus généralement, on a

$$\cos\frac{\overline{C_\alpha C_\beta}}{2i\mu} = \frac{\cos\frac{\overline{ab}}{2im} - \cos\frac{r}{2im}\cos\frac{s}{2im}}{\sin\frac{r}{2im}\sin\frac{s}{2im}},$$

$$\cos\frac{\overline{\Gamma_a\Gamma_b}}{2im} = \frac{\cos\frac{ab}{2im} - \sin\frac{r}{2im}\sin\frac{s}{2im}}{\cos\frac{r}{2im}\cos\frac{s}{2im}}.$$

Quand on a $\Gamma_\beta^2 = 0$, c'est-à-dire quand C_β est de rayon nul, la formule qui donne $\overline{C_\alpha C_\beta}$ n'a plus de sens; mais on remarquera que, $\sin\frac{s}{2im}$ tendant vers zéro, on peut écrire

$$\lim\left(\sin\frac{s}{2im}\cos\frac{\overline{C_\alpha C_\beta}}{2i\mu}\right) = -\lim\left(2\sin\frac{s}{2im}\sin^2\frac{\overline{C_\alpha C_\beta}}{4i\mu}\right)$$
$$= \frac{\cos\frac{\overline{ab}}{2im} - \cos\frac{r}{2im}}{\sin\frac{r}{2im}}.$$

La condition d'orthogonalité exprime ici que le cercle C_α contient le centre (b) du cercle de rayon nul C_β.

Si C_α est aussi un cercle de rayon nul, on a

$$-\lim\left(2\sin\frac{r}{2im}\sin\frac{s}{2im}\sin^2\frac{\overline{C_\alpha C_\beta}}{4i\mu}\right) = -1 + \cos\frac{\overline{ab}}{2im} = -2\sin^2\frac{\overline{ab}}{4im}.$$

Dans les mêmes cas, on a

$$\cos\frac{\overline{\Gamma_a\Gamma_b}}{2im} = \frac{\cos\frac{\overline{ab}}{2im}}{\cos\frac{r}{2im}} \quad \text{ou} \quad \cos\frac{\overline{\Gamma_a\Gamma_b}}{2im} = \cos\frac{\overline{ab}}{2im},$$

et la condition d'orthogonalité exprime que (b) appartient à (α).

On fera des observations analogues dans les autres cas particuliers possibles.

On voit que si (x) est un élément d'un cercle C_α, l'élément tangent à ce cercle en (x) est perpendiculaire à (ax).

Si (x) est orienté et est le centre d'un cercle de rayon nul, C_β, on a

$$\cos\frac{\overline{\Gamma_a\Gamma_b}}{2im} = \frac{-(\alpha\,|\,x)}{\alpha_4\sqrt{-F_{x^2}}};$$

ou bien, en menant par (x) un élément tangent à C_α, dont l'élément de contact soit (t),

$$\cos\frac{\overline{xt}}{2im} = \frac{-(\alpha\,|\,x)}{\alpha_4\sqrt{-F_{x^2}}},$$

ou

$$2\sin^2\frac{\overline{xt}}{4im} = \frac{\alpha_4\sqrt{-F_{x^2}}+(\alpha\,|\,x)}{\alpha_4\sqrt{-F_{x^2}}},$$

ce qui donne une interprétation simple du premier membre de l'équation du cercle C_α.

On en déduit, par exemple, que l'élément $C_{\alpha\beta}$ défini plus haut est le lieu des éléments (x) tels que, si (xt) et (xt') sont tangents à C_α et C_β, (t) et (t') étant les éléments de contact, on ait

$$\overline{xt} \pm \overline{xt'} \equiv 0 \pmod{2\pi}.$$

L'équation de cet élément montre aussi que c'est le lieu des éléments (x) tels que

$$\frac{\cos\dfrac{\overline{ax}}{2im}}{\cos\dfrac{r}{2im}} = \frac{\cos\dfrac{\overline{bx}}{2im}}{\cos\dfrac{s}{2im}}.$$

On peut multiplier les remarques analogues.

390. Trois cercles C_α, C_β, C_γ déterminent trois éléments $C_{\beta\gamma}$, $C_{\gamma\alpha}$, $C_{\alpha\beta}$, qui, d'après leurs équations, sont évidemment alignés en un élément dont les propriétés sont évidentes.

On en dira autant des cycles équivalents.

Ces trois cercles déterminent aussi un réseau de cercles

$$\lambda_1 C_\alpha + \lambda_2 C_\beta + \lambda_3 C_\gamma = 0.$$

Les coefficients des équations de ces cercles vérifiant une même relation linéaire et homogène, il est évident que tous ces cercles

seront orthogonaux à un même cercle C_δ facile à déterminer. Ce réseau contiendra en particulier un faisceau de séries linéaires, auxquelles appartiendra le centre de C_δ, qui est par suite l'élément commun à tous les éléments tels que $C_{\beta\gamma}$, obtenus en combinant deux à deux les cercles du réseau. Le réseau contiendra aussi une infinité simple de cercles de rayon nul, et le lieu de leurs centres sera évidemment C_δ.

391. Deux cercles C_α et C_β déterminent un faisceau de cercles

$$\lambda_1 C_\alpha + \lambda_2 C_\beta = 0,$$

qui ont tous en commun les deux mêmes éléments. Tous ces cercles sont évidemment orthogonaux à tous les cercles d'un second faisceau conjugué du premier; le premier faisceau contient une série linéaire $C_{\alpha\beta}$, lieu des centres de tous les cercles du second faisceau. Il contient aussi deux cercles de rayon nul dont les centres appartiennent à (ab), et sont communs à tous les cercles du second faisceau; ces deux centres sont conjugués harmoniques par rapport aux centres de C_α et C_β, si ces deux cercles sont orthogonaux.

On peut multiplier, pour ainsi dire, indéfiniment ces propriétés des cercles.

392. Considérons trois cercles C_β, C_γ, C_δ, et cherchons le lieu des éléments (α) relatifs aux cercles C_α pour lesquels on a, en supposant dans tout ce qui suivra, pour simplifier l'écriture, $2im = 2i\mu = 1$,

$$\frac{\cos \overline{C_\alpha C_\beta}}{\lambda} = \frac{\cos \overline{C_\alpha C_\gamma}}{\mu} = \frac{\cos \overline{C_\alpha C_\delta}}{\nu},$$

λ, μ, ν étant des constantes données.

Si ρ est la valeur commune des rapports précédents, on a

$$\Phi_{\alpha\beta} + D\alpha_4\beta_4 + \rho\lambda\sqrt{-\Gamma_{\alpha^2}}\sqrt{-\Gamma_{\beta^2}} = 0,$$

et deux équations analogues.

Le lieu cherché est donc l'élément linéaire

$$\begin{vmatrix} \Phi_{\alpha\beta} & \beta_4 & \lambda\sqrt{-\Gamma_{\beta^2}} \\ \Phi_{\alpha\gamma} & \gamma_4 & \mu\sqrt{-\Gamma_{\gamma^2}} \\ \Phi_{\alpha\delta} & \delta_4 & \nu\sqrt{-\Gamma_{\delta^2}} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette série linéaire contient un élément linéaire fixe, quels que soient λ, μ, ν, déterminé par

$$\frac{\Phi_{\alpha\beta}}{\beta_4} = \frac{\Phi_{\alpha\gamma}}{\gamma_4} = \frac{\Phi_{\alpha\delta}}{\delta_4},$$

déjà considéré précédemment.

Tous les cercles répondant à la question forment un faisceau, puisqu'ils vérifient les relations

$$\frac{\Phi_{\alpha\beta} + D\alpha_4\beta_4}{\lambda\sqrt{-\Gamma_{\beta^2}}} = \frac{\Phi_{\alpha\gamma} + D\alpha_4\gamma_4}{\mu\sqrt{-\Gamma_{\gamma^2}}} = \frac{\Phi_{\alpha\delta} + D\alpha_4\delta_4}{\nu\sqrt{-\Gamma_{\delta^2}}}.$$

Si C_ε est un cercle du réseau $(C_\beta, C_\gamma, C_\delta)$, on a évidemment en faisant

$$C_\varepsilon = \omega_1 C_\beta + \omega_2 C_\delta + \omega_3 C_\delta,$$

$$\rho = \frac{\cos\overline{C_\alpha C_\varepsilon}}{\omega_1\lambda\dfrac{\sqrt{-\Gamma_{\beta^2}}}{\sqrt{-\Gamma_{\varepsilon^2}}} + \omega_2\mu\dfrac{\sqrt{-\Gamma_{\gamma^2}}}{\sqrt{-\Gamma_{\varepsilon^2}}} + \omega_3\nu\dfrac{\sqrt{-\Gamma_{\delta^2}}}{\sqrt{-\Gamma_{\varepsilon^2}}}},$$

de sorte que tous les cercles C_ε jouent le même rôle.

Si l'on se donnait un quatrième cercle quelconque C_ε, et que l'on voulût déterminer C_α de façon que

$$\frac{\cos\overline{C_\alpha C_\beta}}{\lambda} = \frac{\cos\overline{C_\alpha C_\gamma}}{\mu} = \frac{\cos\overline{C_\alpha C_\delta}}{\nu} = \frac{\cos\overline{C_\alpha C_\varepsilon}}{\pi},$$

π étant une nouvelle constante, un seul cercle répondrait à la question.

Si l'on considère les cercles (α) tel que l'on ait simplement

$$\frac{\cos\overline{C_\alpha C_\beta}}{\lambda} = \frac{\cos\overline{C_\alpha C_\gamma}}{\mu} = \rho,$$

ρ étant arbitraire, on voit qu'ils forment un réseau; d'ailleurs comme plus haut

$$\rho = \frac{\cos\overline{C_\alpha C_\delta}}{\omega_1\lambda\dfrac{\sqrt{-\Gamma_{\beta^2}}}{\sqrt{-\Gamma_{\delta^2}}} + \omega_2\mu\dfrac{\sqrt{-\Gamma_{\gamma^2}}}{\sqrt{-\Gamma_{\delta^2}}}},$$

si C_δ est un cercle du faisceau (C_β, C_γ) tel que $C_\delta = \omega_1 C_\beta + \omega_2 C_\beta$. Si ρ est donné, $\cos\overline{C_\alpha C_\delta}$ est donc constant; en particulier, il sera

égal à 1 pour deux valeurs de (ω_1, ω_2), et l'on peut dire que si un cercle variable C_α est à une distance constante de deux cercles C_β, C_γ, il est aussi à une distance constante de tout cercle du faisceau (C_β, C_γ) et, en particulier, il est tangent à deux cercles fixes de ce faisceau.

On pourra répéter les mêmes propositions relativement à des cycles.

393. Si l'on envisage deux systèmes de quatre éléments (α), (β), (γ), (δ) et (α'), (β'), (γ'), (δ'), la multiplication des deux matrices

$$\left\|\begin{matrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3\end{matrix}\right\| \quad \text{et} \quad \left\|\begin{matrix}\Phi_{\alpha'_1} & \Phi_{\alpha'_2} & \Phi_{\alpha'_3}\\ \Phi_{\beta'_1} & \Phi_{\beta'_2} & \Phi_{\beta'_3}\\ \Phi_{\gamma'_1} & \Phi_{\gamma'_2} & \Phi_{\gamma'_3}\\ \Phi_{\delta'_1} & \Phi_{\delta'_2} & \Phi_{\delta'_3}\end{matrix}\right\|$$

donne, en faisant, comme plus haut, $2im = 2i\mu = 1$,

$$\begin{vmatrix}\cos\overline{\alpha\alpha'} & \cos\overline{\alpha\beta'} & \cos\overline{\alpha\gamma'} & \cos\overline{\alpha\delta'}\\ \cos\overline{\beta\alpha'} & \cos\overline{\beta\beta'} & \cos\overline{\beta\gamma'} & \cos\overline{\beta\delta'}\\ \cos\overline{\gamma\alpha'} & \cos\overline{\gamma\beta'} & \cos\overline{\gamma\gamma'} & \cos\overline{\gamma\delta'}\\ \cos\overline{\delta\alpha'} & \cos\overline{\delta\beta'} & \cos\overline{\delta\gamma'} & \cos\overline{\delta\delta'}\end{vmatrix} = 0.$$

Nous désignerons, pour abréger, le premier membre de cette formule par $\left|\cos\overline{\alpha\alpha'}\right|_4$.

Si, de même, on considère deux systèmes de n éléments (α), (β), ..., d'une part et (α'), (β'), ..., d'autre part, on aura, en adoptant une notation analogue,

$$\left|\cos\overline{\alpha\alpha'}\right|_n = 0,$$

pour $n \geqq 4$.

Envisageons maintenant deux systèmes de n cercles C_α, C_β, C_γ, ..., $C_{\alpha'}$, $C_{\beta'}$, $C_{\gamma'}$, ..., dont les rayons seront r_α, r_β, r_γ, ..., $r_{\alpha'}$, $r_{\beta'}$, $r_{\gamma'}$, ...

En employant des notations analogues aux précédentes, et multipliant des matrices dont les premières lignes seront respectivement α_1, α_2, α_3, α_4, et $\Phi_{\alpha'_1}$, $\Phi_{\alpha'_2}$, $\Phi_{\alpha'_3}$, $D\alpha'_4$, on trouvera d'abord pour $n \geqq 5$, la relation simple

$$\left|\cos\overline{C_\alpha C_{\alpha'}}\right|_n = 0.$$

Si $n < 5$, une opération analogue donnera, en multipliant ensemble des déterminants ou des matrices analogues aux matrices précédentes, mais dont le produit ne sera plus nul, la relation suivante, où l'on a tenu compte de $|\cos\overline{\alpha\alpha'}|_4 = 0$, et de l'identité de $|\Phi_{\alpha\alpha'}|_3$ avec le produit $D^2(\alpha\beta\gamma)(\alpha'\beta'\gamma')$:

$$|\cos\overline{C_\alpha C'_\alpha}|_n = \frac{\begin{vmatrix} |\cos\overline{\alpha\alpha'}|_n & \cos r_\alpha \\ \cos r_{\alpha'} & 1 \end{vmatrix}}{\sin r_\alpha \sin r_\beta \ldots \sin r_{\alpha'} \sin_{\beta'} \ldots},$$

où la notation employée au numérateur du second membre désigne le déterminant $|\cos\overline{\alpha\alpha'}|_n$ bordé par une dernière colonne formée de $\cos r_\alpha$, $\cos r_\beta$, $\ldots$, 1 et une dernière ligne formée de $\cos r_{\alpha'}$, $\cos r_{\beta'}$, $\ldots$, 1.

Si d'ailleurs $n > 4$, on a évidemment

$$\begin{vmatrix} |\cos\overline{\alpha\alpha'}|_n & \cos r_\alpha \\ \cos r_{\alpha'} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

de sorte que la formule précédente est générale, la valeur de ses deux membres étant zéro pour $n > 4$.

Cette formule générale a de nombreuses applications évidentes. Signalons seulement qu'on peut faire coïncider partiellement ou totalement les deux systèmes de cercles. On peut aussi supposer que C_α, par exemple, devienne l'absolu; alors on peut prendre

$$\operatorname{cotang} r_\alpha = -\sqrt{-1}, \qquad \cos\overline{C_\alpha C_{\alpha'}} = \operatorname{cotang} r_{\alpha'}\sqrt{-1}, \qquad \frac{\cos\overline{\alpha\alpha'}}{\sin r_\alpha} = 0.$$

$C_{\alpha'}$ peut aussi devenir l'absolu.

Si C_α est une série linéaire, $\cos r_\alpha = 0$.

Si C_α est un cercle de rayon nul, on remplacera

$$\sin r_\alpha \cos\overline{C_\alpha C_{\alpha'}} \quad \text{par} \quad \frac{\cos\overline{\alpha\alpha'} - \cos r_{\alpha'}}{\sin r_{\alpha'}}.$$

Une formule tout analogue aura lieu pour les cycles équivalents aux cercles donnés.

394. Procédons comme précédemment, mais en employant des déterminants ou matrices dont les premières lignes soient respectivement α_1, α_2, α_3, α_4, $\sqrt{-\Gamma_{\alpha^2}}$ et $\Phi_{\alpha'_1}$, $\Phi_{\alpha'_2}$, $\Phi_{\alpha'_3}$, $D_{\alpha'_4}$, $\sqrt{-\Gamma_{\alpha'^2}}$; on

obtiendra de la même façon, en tenant compte des résultats déjà acquis et employant des notations analogues, la relation générale

$$\left|2\sin^2\frac{\overline{C_\alpha C'_\alpha}}{2}\right|_n = \frac{(-1)^n \begin{vmatrix} |\cos\overline{\alpha\alpha'}|_n & \cos r_\alpha & \sin r_\alpha \\ \cos r_{\alpha'} & 1 & 0 \\ \sin r_{\alpha'} & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\sin r_\alpha \sin r_\beta \ldots \sin r_{\alpha'} \sin r_{\beta'} \ldots},$$

la valeur commune des deux membres étant zéro pour $n > 5$. La notation du second membre correspond comme plus haut à un déterminant d'ordre $n + 2$ obtenu en bordant $|\cos\overline{\alpha\alpha'}|_n$ de deux lignes et deux colonnes suffisamment indiquées.

On aura, comme ci-dessus, de nombreux cas particuliers, mais on peut en signaler d'autres. Si l'on suppose, C_α n'étant plus un cercle, que l'on ait

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0,$$

la quantité $\sqrt{-\Gamma_{\alpha^2}}$ n'étant pas nulle, la formule subsistera si l'on fait

$$2\sin^2\frac{\overline{C_\alpha C_{\alpha'}}}{2} = 1, \qquad \frac{\cos r_\alpha}{\sin r_\alpha} = \frac{\cos\overline{\alpha\alpha'}}{\sin r_\alpha} = 0.$$

On pourra en faire autant pour $C_{\alpha'}$.

Si l'on suppose de même, C_β n'étant plus un cercle, que l'on ait $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \sqrt{-\Gamma_{\beta^2}} = 0$, la quantité β_4 n'étant pas nulle, la formule subsiste, à condition de remplacer $2\sin^2\frac{\overline{C_\beta C_{\beta'}}}{2}\sin r_\beta$ par $\cot r_{\beta'}$, $\cos r_\beta$ par 1, $\sin r_\beta$ et $\cos\overline{\beta\beta'}$ par 0. Si l'on en fait autant relativement à $C_{\beta'}$, on remplacera en outre $2\sin^2\frac{\overline{C_\beta C_{\beta'}}}{2}\sin r_\beta \sin r_{\beta'}$ par 1.

Si l'on remplace à la fois C_α et C_β comme nous venons de l'indiquer, on aura à remplacer $2\sin^2\frac{\overline{C_\alpha C_\beta}}{2}\sin r_\beta$ par 0.

395. Les formules qui précèdent permettent de résoudre simplement la plupart des problèmes que l'on peut se proposer sur les cercles. Nous allons en donner quelques exemples.

Supposons d'abord que l'on cherche un cercle C_α dont les distances à trois cercles donnés C_β, C_γ, C_δ soient données; on

pourra déterminer son rayon par la formule

$$\begin{vmatrix} -1 & \cot r_\alpha & \cot r_\beta & \cot r_\gamma & \cot r_\delta \\ \cot r_\alpha & 1 & \cos\overline{C_\alpha C_\beta} & \cos\overline{C_\alpha C_\gamma} & \cos\overline{C_\alpha C_\delta} \\ \cot r_\beta & \cos\overline{C_\alpha C_\beta} & 1 & \cos\overline{C_\beta C_\gamma} & \cos\overline{C_\beta C_\delta} \\ \cot r_\gamma & \cos\overline{C_\alpha C_\gamma} & \cos\overline{C_\beta C_\gamma} & 1 & \cos\overline{C_\gamma C_\delta} \\ \cot r_\delta & \cos\overline{C_\alpha C_\delta} & \cos\overline{C_\beta C_\delta} & \cos\overline{C_\gamma C_\delta} & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

c'est une équation du second degré en $\cot r_\alpha$; le problème a donc deux solutions.

Si (x) est un élément du cercle C_α, on peut le considérer comme un cercle de rayon nul, et l'on a la relation

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{\cos\overline{bx} - \cos r_\beta}{\sin r_\beta} & \frac{\cos\overline{cx} - \cos r_\gamma}{\sin r_\gamma} & \frac{\cos\overline{dx} - \cos r_\delta}{\sin r_\delta} \\ 0 & 1 & \cos\overline{C_\alpha C_\beta} & \cos\overline{C_\alpha C_\gamma} & \cos\overline{C_\alpha C_\delta} \\ \frac{\cos\overline{bx} - \cos r_\beta}{\sin r_\beta} & \cos\overline{C_\alpha C_\beta} & 1 & \cos\overline{C_\beta C_\gamma} & \cos\overline{C_\beta C_\delta} \\ \frac{\cos\overline{cx} - \cos r_\gamma}{\sin r_\gamma} & \cos\overline{C_\alpha C_\gamma} & \cos\overline{C_\beta C_\gamma} & 1 & \cos\overline{C_\gamma C_\delta} \\ \frac{\cos\overline{dx} - \cos r_\delta}{\sin r_\delta} & \cos\overline{C_\alpha C_\delta} & \cos\overline{C_\beta C_\delta} & \cos\overline{C_\gamma C_\delta} & 1 \end{vmatrix},$$

où (b), (c), (d) sont les centres de C_β, C_γ, C_δ. Ce sera l'équation du système de deux cercles répondant à la question.

Quand on a

$$\cos\overline{C_\alpha C_\beta} = \cos\overline{C_\alpha C_\gamma} = \cos\overline{C_\alpha C_\delta} = 0,$$

l'équation en $\cot r_\alpha$ ne contient pas de terme en $\cot r_\alpha$, et l'on a un seul cercle répondant à la question; le second membre de l'équation précédente est un carré parfait, comme on le vérifie sans peine.

L'équation du cercle orthogonal à C_β, C_γ, C_δ s'obtient directement sous la forme

$$\begin{vmatrix} \Phi_{\beta_1} & \Phi_{\beta_2} & \Phi_{\beta_3} & D\beta_4 \\ \Phi_{\gamma_1} & \Phi_{\gamma_2} & \Phi_{\gamma_3} & D\gamma_4 \\ \Phi_{\delta_1} & \Phi_{\delta_2} & \Phi_{\delta_3} & D\delta_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \sqrt{-F_{x^2}} \end{vmatrix} = 0.$$

Dans le cas général, on peut aussi écrire l'équation du cercle qui correspond à une racine de l'équation en $\cot r_\alpha$ sous la forme

$$\begin{vmatrix} 1 & \cot r_\alpha & \cot r_\beta & \cot r_\gamma & \cot r_\delta \\ 0 & 1 & \cos\overline{C_\alpha C_\beta} & \cos\overline{C_\alpha C_\gamma} & \cos\overline{C_\alpha C_\delta} \\ \dfrac{\cos\overline{bx} - \cos r_\beta}{\sin r_\beta} & \cos\overline{C_\alpha C_\beta} & 1 & \cos\overline{C_\beta C_\gamma} & \cos\overline{C_\beta C_\delta} \\ \dfrac{\cos\overline{cx} - \cos r_\gamma}{\sin r_\gamma} & \cos\overline{C_\alpha C_\gamma} & \cos\overline{C_\beta C_\gamma} & 1 & \cos\overline{C_\gamma C_\delta} \\ \dfrac{\cos\overline{dx} - \cos r_\delta}{\sin r_\delta} & \cos\overline{C_\alpha C_\delta} & \cos\overline{C_\beta C_\delta} & \cos\overline{C_\gamma C_\delta} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Si deux cercles C_α et $C_{\alpha'}$ sont tels que l'on ait

$$\cos\overline{C_\alpha C_\beta} = \lambda, \qquad \cos\overline{C_\alpha C_\gamma} = \mu, \qquad \cos\overline{C_\alpha C_\delta} = \nu,$$
$$\cos\overline{C_{\alpha'} C_\beta} = \lambda', \qquad \cos\overline{C_{\alpha'} C_\gamma} = \mu', \qquad \cos\overline{C_{\alpha'} C_\delta} = \nu',$$

on aura la relation

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\overline{C_\alpha C_{\alpha'}} & \lambda & \mu & \nu \\ \cos\overline{C_\alpha C_{\alpha'}} & 1 & \lambda' & \mu' & \nu' \\ \lambda & \lambda' & 1 & \cos\overline{C_\beta C_\gamma} & \cos\overline{C_\beta C_\delta} \\ \mu & \mu' & \cos\overline{C_\beta C_\gamma} & 1 & \cos\overline{C_\gamma C_\delta} \\ \nu & \nu' & \cos\overline{C_\beta C_\delta} & \cos\overline{C_\gamma C_\delta} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

de sorte que $\cos\overline{C_\alpha C_{\alpha'}}$ n'a que deux valeurs.

Comme il existe deux autres cercles $C_{\alpha^{(1)}}$ et $C_{\alpha'^{(1)}}$ jouissant des mêmes propriétés que C_α et $C_{\alpha'}$, on voit que l'on a

$$\cos\overline{C_\alpha C_{\alpha'}} = \cos\overline{C_{\alpha^{(1)}} C_{\alpha'^{(1)}}},$$
$$\cos\overline{C_\alpha C_{\alpha'^{(1)}}} = \cos\overline{C_{\alpha^{(1)}} C_{\alpha'}},$$

propriétés qui seront rendues évidentes par la suite.

Le problème que nous venons de résoudre contient de nombreux cas particuliers dont il suffira d'avoir signalé l'existence.

396. Envisageons quatre cercles C_β, C_γ, C_δ, C_ε et cherchons un cinquième cercle C_α, tel que l'on ait

$$\frac{\cos\overline{C_\alpha C_\beta}}{\lambda} = \frac{\cos\overline{C_\alpha C_\gamma}}{\mu} = \frac{\cos\overline{C_\alpha C_\delta}}{\nu} = \frac{\cos\overline{C_\alpha C_\varepsilon}}{\pi},$$

λ, μ, ν, π étant des constantes données. Si ρ est la valeur commune des rapports précédents, on aura, pour déterminer ρ, l'équation

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\rho^2} & \lambda & \mu & \nu & \pi \\ \lambda & 1 & \cos\overline{C_\beta C_\gamma} & \cos\overline{C_\beta C_\delta} & \cos\overline{C_\beta C_\varepsilon} \\ \mu & \cos\overline{C_\beta C_\gamma} & 1 & \cos\overline{C_\gamma C_\delta} & \cos\overline{C_\gamma C_\varepsilon} \\ \nu & \cos\overline{C_\beta C_\delta} & \cos\overline{C_\gamma C_\delta} & 1 & \cos\overline{C_\delta C_\varepsilon} \\ \pi & \cos\overline{C_\beta C_\varepsilon} & \cos\overline{C_\gamma C_\varepsilon} & \cos\overline{C_\delta C_\varepsilon} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Le rayon de C_α sera déterminé par l'équation

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\rho}\cot r_\alpha & \cot r_\beta & \cot r_\gamma & \cot r_\delta & \cot r_\varepsilon \\ \lambda & 1 & \cos\overline{C_\beta C_\gamma} & \cos\overline{C_\beta C_\delta} & \cos\overline{C_\beta C_\varepsilon} \\ \mu & \cos\overline{C_\beta C_\gamma} & 1 & \cos\overline{C_\gamma C_\delta} & \cos\overline{C_\gamma C_\varepsilon} \\ \nu & \cos\overline{C_\beta C_\delta} & \cos\overline{C_\gamma C_\delta} & 1 & \cos\overline{C_\delta C_\varepsilon} \\ \pi & \cos\overline{C_\beta C_\varepsilon} & \cos\overline{C_\gamma C_\varepsilon} & \cos\overline{C_\delta C_\varepsilon} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation même de C_α, déterminée directement, sera

$$\begin{vmatrix} \Phi_{\beta_1} & \Phi_{\beta_2} & \Phi_{\beta_3} & D_{\beta_4} & \lambda\sqrt{-\Gamma_{\beta^2}} \\ \Phi_{\gamma_1} & \Phi_{\gamma_2} & \Phi_{\gamma_3} & D_{\gamma_4} & \mu\sqrt{-\Gamma_{\gamma^2}} \\ \Phi_{\delta_1} & \Phi_{\delta_2} & \Phi_{\delta_3} & D_{\delta_4} & \nu\sqrt{-\Gamma_{\delta^2}} \\ \Phi_{\varepsilon_1} & \Phi_{\varepsilon_2} & \Phi_{\varepsilon_3} & D_{\varepsilon_4} & \pi\sqrt{-\Gamma_{\varepsilon^2}} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \sqrt{-F_{x^2}} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

397. Supposons que les quatre cercles C_β, C_γ, C_δ, C_ε soient tangents à un même cercle; on aura alors, en faisant

$$\lambda = \mu = \nu = \pi \qquad \text{et} \qquad \rho\lambda = 1,$$

après quelques transformations évidentes

$$\begin{vmatrix} 0 & \sin^2\frac{\overline{C_\beta C_\gamma}}{2} & \sin^2\frac{\overline{C_\beta C_\delta}}{2} & \sin^2\frac{\overline{C_\beta C_\varepsilon}}{2} \\ \sin^2\frac{\overline{C_\beta C_\gamma}}{2} & 0 & \sin^2\frac{\overline{C_\gamma C_\delta}}{2} & \sin^2\frac{\overline{C_\gamma C_\varepsilon}}{2} \\ \sin^2\frac{\overline{C_\beta C_\delta}}{2} & \sin^2\frac{\overline{C_\gamma C_\delta}}{2} & 0 & \sin^2\frac{\overline{C_\delta C_\varepsilon}}{2} \\ \sin^2\frac{\overline{C_\beta C_\varepsilon}}{2} & \sin^2\frac{\overline{C_\gamma C_\varepsilon}}{2} & \sin^2\frac{\overline{C_\delta C_\varepsilon}}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien

$$\Pi\left(\sin\frac{\overline{C_\beta C_\gamma}}{2}\sin\frac{\overline{C_\delta C_\varepsilon}}{2}\pm\sin\frac{\overline{C_\beta C_\delta}}{2}\sin\frac{\overline{C_\varepsilon C_\gamma}}{2}\pm\sin\frac{\overline{C_\beta C_\varepsilon}}{2}\sin\frac{\overline{C_\gamma C_\delta}}{2}\right)=0,$$

le symbole Π indiquant un produit.

Cette formule s'appliquera en particulier à des séries linéaires tangentes à un même cercle, et correspondra alors au théorème de Ptolémée.

Elle permettra aussi d'écrire simplement l'équation des deux cercles tangents à trois cercles donnés.

Si un nouveau cercle est tel que C_β, C_γ lui soient tangents, C_δ, C_ε quasi-tangents, on aura de même

$$\Pi\left(\sin\frac{\overline{C_\beta C_\gamma}}{2}\sin\frac{\overline{C_\delta C_\varepsilon}}{2}\pm\cos\frac{\overline{C_\beta C_\delta}}{2}\cos\frac{\overline{C_\varepsilon C_\gamma}}{2}\pm\cos\frac{\overline{C_\beta C_\varepsilon}}{2}\cos\frac{\overline{C_\gamma C_\delta}}{2}\right)=0.$$

De même si C_β, C_δ sont tangents, C_γ, C_ε quasi-tangents à un nouveau cercle, on aura

$$\Pi\left(\cos\frac{\overline{C_\beta C_\gamma}}{2}\cos\frac{\overline{C_\delta C_\varepsilon}}{2}\pm\sin\frac{\overline{C_\beta C_\delta}}{2}\sin\frac{\overline{C_\varepsilon C_\gamma}}{2}\pm\cos\frac{\overline{C_\beta C_\varepsilon}}{2}\cos\frac{\overline{C_\gamma C_\delta}}{2}\right)=0.$$

Les hypothèses précédentes ayant lieu simultanément, on peut choisir les signes des quantités telles que $\cos\frac{\overline{C_\beta C_\gamma}}{2}$ et $\sin\frac{\overline{C_\beta C_\gamma}}{2}$ de façon à avoir

$$\sin\frac{\overline{C_\beta C_\gamma}}{2}\sin\frac{\overline{C_\delta C_\varepsilon}}{2}+\sin\frac{\overline{C_\beta C_\delta}}{2}\sin\frac{\overline{C_\varepsilon C_\gamma}}{2}+\sin\frac{\overline{C_\beta C_\varepsilon}}{2}\sin\frac{\overline{C_\gamma C_\delta}}{2}=0,$$

$$\sin\frac{\overline{C_\beta C_\gamma}}{2}\sin\frac{\overline{C_\delta C_\varepsilon}}{2}+\cos\frac{\overline{C_\beta C_\delta}}{2}\cos\frac{\overline{C_\varepsilon C_\gamma}}{2}+\cos\frac{\overline{C_\beta C_\varepsilon}}{2}\cos\frac{\overline{C_\gamma C_\delta}}{2}=0,$$

$$\cos\frac{\overline{C_\beta C_\gamma}}{2}\cos\frac{\overline{C_\delta C_\varepsilon}}{2}+\sin\frac{\overline{C_\beta C_\delta}}{2}\sin\frac{\overline{C_\varepsilon C_\gamma}}{2}\pm\cos\frac{\overline{C_\beta C_\varepsilon}}{2}\cos\frac{\overline{C_\gamma C_\delta}}{2}=0;$$

si alors, dans la troisième formule, c'est le signe inférieur qui existe, on en déduit

$$\cos\frac{\overline{C_\beta C_\gamma}}{2}\cos\frac{\overline{C_\delta C_\varepsilon}}{2}+\cos\frac{\overline{C_\beta C_\delta}}{2}\cos\frac{\overline{C_\varepsilon C_\gamma}}{2}-\sin\frac{\overline{C_\beta C_\varepsilon}}{2}\sin\frac{\overline{C_\gamma C_\delta}}{2}=0,$$

et l'on en conclut qu'il existe encore un cercle tangent à C_β, C_ε, quasi-tangent à C_γ, C_δ.

De cette remarque résulte la proposition suivante :

Si l'on considère les quatre systèmes de deux cercles tangents à trois cercles donnés, ou bien tangents à l'un et quasi-tangents aux deux autres, on pourra former, en associant convenablement quatre de ces cercles, un de chaque système, huit groupes de quatre cercles, qui seront ou bien tangents à un nouveau cercle, ou bien deux d'entre eux tangents, les deux autres quasi-tangents à un nouveau cercle.

C'est le théorème de Feuerbach dans toute sa généralité.

398. Soient donnés trois cercles C_α, C_β, C_γ, et cherchons trois autres cercles $C_{\alpha'}$, $C_{\beta'}$, $C_{\gamma'}$, tels que les cosinus des distances $\overline{C_{\beta'}C_{\gamma'}}$, $\overline{C_{\gamma'}C_{\alpha'}}$, $\overline{C_{\alpha'}C_{\beta'}}$, $\overline{C_{\alpha'}C_\beta}$, $\overline{C_{\alpha'}C_\gamma}$, $\overline{C_{\beta'}C_\gamma}$, $\overline{C_{\beta'}C_\alpha}$, $\overline{C_{\gamma'}C_\alpha}$, $\overline{C_{\gamma'}C_\beta}$ soient connus : c'est le problème de Malfatti dans toute sa généralité.

Les relations entre les distances mutuelles des cercles des deux groupes C_α, C_β, C_γ, $C_{\beta'}$, $C_{\gamma'}$ et C_β, C_γ, $C_{\alpha'}$, $C_{\beta'}$, $C_{\gamma'}$ déterminent $\cos\overline{C_\beta C_{\beta'}}$ et $\cos\overline{C_\gamma C_{\gamma'}}$: il y a d'ailleurs huit solutions. On achève alors facilement, et l'on trouve seize solutions.

Dans le cas du problème de Malfatti ordinaire, on a, par exemple,

$$\cos\overline{C_{\beta'}C_{\gamma'}} = \cos\overline{C_{\gamma'}C_{\alpha'}} = \cos\overline{C_{\alpha'}C_{\beta'}} = -1,$$
$$\cos\overline{C_{\alpha'}C_\beta} = \cos\overline{C_{\alpha'}C_\gamma} = \ldots\ldots\ldots = 1.$$

Dans ce cas, $C_{\alpha'}$ étant tangent à C_β, C_γ et quasi-tangent à $C_{\beta'}$, $C_{\gamma'}$, en posant

$$\cos\overline{C_\beta C_\gamma} = a, \qquad \cos\overline{C_\gamma C_\alpha} = b, \qquad \cos\overline{C_\alpha C_\beta} = c,$$
$$\cos\overline{C_\alpha C_{\alpha'}} = x, \qquad \cos\overline{C_\beta C_{\beta'}} = y, \qquad \cos\overline{C_\gamma C_{\gamma'}} = z,$$

il vient

$$\sqrt{1+y}\sqrt{1+z} = \pm 2 \pm \sqrt{2(1-a)};$$

en utilisant les relations analogues, on peut écrire

$$1+x = \frac{\varepsilon}{2(1+a)}\left[2-\sqrt{2(1-a)}\right]\left[2+\sqrt{2(1-b)}\right]\left[2+\sqrt{2(1-c)}\right],$$

et les formules analogues; les radicaux ont des déterminations arbitraires, et $\varepsilon = \pm 1$.

On a ainsi seize déterminations pour x, y, z; mais, en se servant des relations laissées de côté, on voit qu'il faut prendre $\varepsilon = 1$, et il ne reste que huit déterminations.

Le problème s'achève sans peine, sans qu'il soit utile d'insister.

399. Soient deux cercles C_0 et C_1 tels que le cosinus de leur distance soit a, et considérons les divers cercles C' dont les cosinus des distances à C_0 et C_1 sont b_0 et b_1; à l'un de ces cercles, C'_n, on peut faire correspondre deux autres cercles C'_{n-1} et C'_{n+1} dont le cosinus de la distance à C'_n soit une constante donnée i_1.

Entre les cercles C' existe par suite une correspondance doublement quadratique symétrique. Si donc on part d'un cercle C'_n pour obtenir successivement C'_{n+1}, C'_{n+2}, ..., C'_{n+k}, ..., les cosinus des distances $\overline{C'_n C'_{n+2}}$, $\overline{C'_n C'_{n+3}}$, ..., $\overline{C'_n C'_{n+k}}$, ... seront, quel que soit C'_n, des constantes i_2, i_3, ..., i_k, dépendant des invariants de la correspondance doublement quadratique que nous venons de signaler.

Il est facile de calculer ces constantes successives immédiatement. En effet les cercles C_0, C_1, C'_n, C'_{n+h}, C'_{n+k} donnent

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b_0 & b_0 & b_0 \\ a & 1 & b_1 & b_1 & b_1 \\ b_0 & b_1 & 1 & i_h & i_k \\ b_0 & b_1 & i_h & 1 & i_{k-h} \\ b_0 & b_1 & i_k & i_{k-h} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Nous savons que, en général, les cercles C' seront tangents à deux cercles du faisceau (C_0, C_1); si nous supposons que ces cercles soient précisément C_0 et C_1, on aura simplement, en remarquant que $1 - a$ ne peut être nul,

$$(1-i_h)^2+(1-i_k)^2+(1-i_{k-h})^2-2(1-i_h)(1-i_k)-2(1-i_h)(1-i_{k-h})$$
$$-2(1-i_k)(1-i_{k-h})-2\frac{1+a}{1-a}(1-i_h)(1-i_k)(1-i_{k-h})=0,$$

d'où l'on tirera d'abord,

$$1-i_2=4(1-i_1)+2\frac{1+a}{1-a}(1-i_1)^2,$$

puis

$$(1-i_{n+1})(1-i_{n-1})=(i_n-i_1)^2;$$

si $i_h = 1$, c'est que C'_{n+h} coïncide avec C'_n; la série des cercles C' se ferme d'elle-même.

Remarquons que tout ceci peut être facilement rattaché aux propositions analogues que nous avons rencontrées en étudiant l'ensemble de deux séries quadratiques. En effet, le lieu des centres des cercles C' est une série quadratique facile à définir, et si l'on considère deux cercles consécutifs C'_n et C'_{n+1}, l'élément de seconde espèce défini par leurs centres a lui-même pour lieu une série quadratique.

Nous ne développerons pas davantage les applications qui précèdent : elles suffisent pour montrer l'emploi des formules générales, et notre but n'est pas de retrouver toute la Géométrie métrique.

Observons d'ailleurs que la théorie des cercles n'est autre que celle des séries quadratiques bitangentes à une série quadratique donnée, présentée d'une façon particulière. Tout ce que nous avons dit pourrait donc être sans peine énoncé d'une façon différente et fournir de nouvelles propositions plus générales, au moins en apparence.

IV. — Les substitutions conformes. — Les hypercercles.

400. L'équation d'un cercle contient d'une façon linéaire et homogène quatre paramètres α_1, α_2, α_3, α_4 qui sont les coordonnées du cercle. On peut donc envisager les cercles comme les éléments constitutifs d'un espace à trois dimensions, et leur appliquer toutes les propositions de la Géométrie quaternaire, qui seront exposées plus tard. Il est cependant nécessaire de fixer, dès maintenant, notre attention sur quelques points spéciaux de la théorie nouvelle qui résulte du rapprochement que nous venons d'établir.

Si l'on soumet les coordonnées (α) d'un cercle à une substitution linéaire quelconque, on transformera un cercle quelconque en un autre cercle, et toutes les théories de la Géométrie quaternaire générale, c'est-à-dire projective, trouveront ici leur application. Mais, parmi toutes les substitutions linéaires possibles sur les (α), celles qui ont un intérêt en Géométrie ternaire seront celles qui pourront être considérées en même temps comme des transformations, non plus linéaires d'ailleurs, faites sur les élé-

ments (x). Ce sont celles-là seulement que nous allons envisager, et ce que nous allons dire pourra être répété en partant des cycles, et considérant les éléments (ξ) au lieu des (x).

La condition qui caractérise les substitutions que nous avons en vue est évidemment qu'un réseau de cercles assujettis à contenir un élément donné (y), se transforme en un réseau de cercles assujettis de même à contenir un élément (y'). Les cercles C_α qui contiennent (y) vérifient la relation

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 + \alpha_4 \sqrt{-F_{y^2}} = 0,$$

et, par suite, se transforment en cercles vérifiant une nouvelle relation linéaire

$$\alpha'_1 y'_1 + \alpha'_2 y'_2 + \alpha'_3 y'_3 + \alpha'_4 y'_4 = 0,$$

où l'on obtient y'_1, y'_2, y'_3, y'_4 en appliquant à y_1, y_2, y_3 et $\sqrt{-F_{y^2}}$ la substitution transposée de la substitution considérée.

Il faut ici avoir

$$F(y'_1, y'_2, y'_3) + y'^2_4 = 0,$$

et, par suite, on voit que les substitutions transposées des substitutions considérées doivent conserver la série quaternaire définie par $F(y_1, y_2, y_3) + y_4^2 = 0$, les (y) étant les variables auxquelles sont appliquées ces substitutions transposées.

Ceci revient à dire que les substitutions données doivent conserver la série quaternaire définie par $\Gamma_{\alpha^2} = 0$, puisque les (y) et les (α) étant considérées comme variables de première et de seconde espèce, Γ_{α^2} est la forme équivalente à $F(y_1, y_2, y_3) + y_4^2$.

Les substitutions considérées sont donc celles qui, dans l'espace à trois dimensions rempli par les cercles, conservent un absolu dont l'équation serait $\Gamma_{\alpha^2} = 0$; et nous voyons par suite, immédiatement, que ces substitutions changent un cercle de rayon nul en un autre cercle de rayon nul, et jouissent de la propriété fondamentale de conserver la distance de deux cercles.

Les centres de deux cercles de rayon nul correspondants sont d'ailleurs liés l'un à l'autre comme deux éléments (x) et (x') correspondants.

401. Prenons l'équation de l'absolu sous la forme

$$F = -x_1^2 + 4x_2x_3 = 0,$$

et définissons un élément (x) quelconque par les paramètres (λ) et (μ) des deux éléments de contact avec F des éléments tangents à F qui contiennent (x), de sorte que

$$x_1 = \lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1, \qquad x_2 = \lambda_1\mu_1, \qquad x_3 = \lambda_2\mu_2.$$

Les paramètres (λ) et (μ) jouent dans ces formules le même rôle; mais, si l'on oriente l'élément (x), il n'en sera plus de même, car on a $F_{x^2} = -(\lambda\mu)^2$, et donner un signe à $\sqrt{-F_{x^2}}$ revient à détruire la symétrie qui existe entre les (λ) et les (μ). Nous supposerons donc distinctes les deux séries d'éléments (λ) et (μ) qui constituent l'absolu, et nous prendrons $\sqrt{-F_{x^2}} = (\lambda\mu)$. On peut dire encore qu'en orientant les éléments (x), on dédouble ces éléments, chaque élément (x) non orienté donnant lieu à deux éléments orientés, suivant que l'on prend une détermination ou l'autre pour $\sqrt{-F_{x^2}}$; suivant aussi que l'on assigne le premier rang aux paramètres (λ) ou aux paramètres (μ) qui déterminent (x). C'est dans ce sens que nous avons déjà considéré un cercle comme une certaine série quadratique dédoublée.

L'équation d'un cercle C_α peut s'écrire

$$\alpha_1(\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1) + \alpha_2\lambda_1\mu_1 + \alpha_3\lambda_2\mu_2 + \alpha_4(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1) = 0;$$

ce cercle est de rayon nul si l'on a ici

$$\Gamma_{\alpha^2} = -4\alpha_1^2 + 4\alpha_2\alpha_3 - 4\alpha_4^2 = 0,$$

et, dans ce cas, le premier membre de l'équation précédente se décompose en un produit de deux facteurs linéaires, l'un par rapport aux (λ), l'autre par rapport aux (μ) : ces deux facteurs, égalés à zéro, représentent deux éléments tangents à l'absolu.

Les substitutions que nous étudions sont assujetties à changer un cercle de rayon nul en un cercle de rayon nul; si donc, à l'élément (x) ou (λ) et (μ), elles font correspondre l'élément (x') ou (λ') et (μ'), elles seront telles qu'elles établissent des relations linéaires entre les (λ) et les (λ') d'une part, les (μ) et les (μ') d'autre part, ou bien entre les (λ) et les (μ'), les (μ) et les (λ'). On les obtiendra donc en posant soit

$$\lambda_1 = \sigma_1\lambda'_1 + \sigma'_1\lambda'_2, \qquad \mu_1 = \tau_1\mu'_1 + \tau'_1\mu'_2,$$
$$\lambda_2 = \sigma_2\lambda'_1 + \sigma'_2\lambda'_2, \qquad \mu_2 = \tau_2\mu'_1 + \tau'_2\mu'_2,$$

soit

$$\lambda_1 = \sigma_1 \mu'_1 + \sigma'_1 \mu'_2, \qquad \mu_1 = \tau_1 \lambda'_1 + \tau'_1 \lambda'_2,$$
$$\lambda_2 = \sigma_2 \mu'_1 + \sigma'_2 \mu'_2, \qquad \mu_2 = \tau_2 \lambda'_1 + \tau'_2 \lambda'_2.$$

Les substitutions du premier type, que nous appellerons *substitutions conformes*, forment dans leur ensemble un groupe; deux substitutions successives du second type équivalent, au contraire, à une substitution du premier type.

Une substitution du premier type, par exemple, transforme le cercle C_α dans le cercle $C_{\alpha'}$, et l'on a

$$\alpha'_1 = \frac{\alpha_1}{2}(\sigma_1\tau'_2 + \sigma'_1\tau_2 + \sigma_2\tau'_1 + \sigma'_2\tau_1) + \frac{\alpha_2}{2}(\sigma_1\tau'_1 + \sigma'_1\tau_1)$$
$$+ \frac{\alpha_3}{2}(\sigma_2\tau'_2 + \sigma'_2\tau_2) + \frac{\alpha_4}{2}(\sigma_1\tau'_2 + \sigma'_1\tau_2 - \sigma_2\tau'_1 - \sigma'_2\tau_1),$$
$$\alpha'_2 = \alpha_1(\sigma_1\tau_2 + \sigma_2\tau_1) + \alpha_2\sigma_1\tau_1 + \alpha_3\sigma_2\tau_2 + \alpha_4(\sigma_1\tau_2 - \sigma_2\tau_1),$$
$$\alpha'_3 = \alpha_1(\sigma'_1\tau'_2 + \sigma'_2\tau'_1) + \alpha_2\sigma'_1\tau'_1 + \alpha_3\sigma'_2\tau'_2 + \alpha_4(\sigma'_1\tau'_2 - \sigma'_2\tau'_1),$$
$$\alpha'_4 = \frac{\alpha_1}{2}(\sigma_1\tau'_2 - \sigma'_1\tau_2 + \sigma_2\tau'_1 - \sigma'_2\tau_1) + \frac{\alpha_2}{2}(\sigma_1\tau'_1 - \sigma'_1\tau_1)$$
$$+ \frac{\alpha_3}{2}(\sigma_2\tau'_2 - \sigma'_2\tau_2) + \frac{\alpha_4}{2}(\sigma_1\tau'_2 - \sigma'_1\tau_2 - \sigma_2\tau'_1 + \sigma'_2\tau_1);$$

le déterminant de cette substitution est $\sigma_0^2\tau_0^2$, si $\sigma_0 = (\sigma\sigma')$, $\tau_0 = (\tau\tau')$.

Quant aux (x), on a

$$x_2 = \sigma_1\tau_1 x'_2 + \sigma'_1\tau'_1 x'_3$$
$$+ \frac{1}{2}\sigma_1\tau'_1\left(x'_1 + \sqrt{-F_{x'^2}}\right) + \frac{1}{2}\sigma'_1\tau_1\left(x'_1 - \sqrt{-F_{x'^2}}\right),$$
$$x_3 = \sigma_2\tau_2 x'_2 + \sigma'_2\tau'_2 x'_3$$
$$+ \frac{1}{2}\sigma_2\tau'_2\left(x'_1 + \sqrt{-F_{x'^2}}\right) + \frac{1}{2}\sigma'_2\tau_2\left(x'_1 - \sqrt{-F_{x'^2}}\right),$$
$$\frac{1}{2}\left(x_1 + \sqrt{-F_{x^2}}\right) = \sigma_1\tau_2 x'_2 + \sigma'_1\tau'_2 x'_3$$
$$+ \frac{1}{2}\sigma_1\tau'_2\left(x'_1 + \sqrt{-F_{x'^2}}\right) + \frac{1}{2}\sigma'_1\tau_2\left(x'_1 - \sqrt{-F_{x'^2}}\right),$$
$$\frac{1}{2}\left(x_1 - \sqrt{-F_{x^2}}\right) = \sigma_2\tau_1 x'_2 + \sigma'_2\tau'_1 x'_3$$
$$+ \frac{1}{2}\sigma_2\tau'_1\left(x'_1 + \sqrt{-F_{x'^2}}\right) + \frac{1}{2}\sigma'_2\tau_1\left(x'_1 - \sqrt{-F_{x'^2}}\right).$$

On a des formules analogues pour les substitutions du second type.

Nous remarquerons qu'un mouvement peut être considéré comme une substitution soit du premier type, soit du second, dans

laquelle les coefficients σ_1, σ'_1, σ_2, σ'_2 sont respectivement égaux aux coefficients τ_1, τ'_1, τ_2, τ'_2. Si la substitution est du premier type, on a $\sqrt{-F_{x^2}} = \sigma_0\sqrt{-F_{x'^2}}$; si elle est du second type, on a, au contraire, $\sqrt{-F_{x^2}} = -\sigma_0\sqrt{-F_{x'^2}}$.

Ainsi, en particulier, on peut passer des substitutions de l'un des types à celles de l'autre, en les composant avec la substitution simple

$$\lambda_1 = \mu'_1, \qquad \mu_1 = \lambda'_1,$$
$$\lambda_2 = \mu'_2, \qquad \mu_2 = \lambda'_2,$$

qui n'a d'autre effet que de changer l'orientation des éléments.

Les substitutions conformes déterminent un groupe à sept paramètres seulement, qui comprend en particulier le groupe des mouvements. A ces substitutions correspondent des invariants *conformes*, absolus ou ordinaires, en nombre $P-7$ ou $P-6$ en général, pour un système dépendant de P éléments. Il est clair que l'on formera simplement ces invariants comme invariants multiples par rapport aux (λ) et aux (μ), quand on aura substitué ces coordonnées aux (x). C'est ainsi que la forme

$$\alpha_1(\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1) + \alpha_2\lambda_1\mu_1 + \alpha_3\lambda_2\mu_2 + \alpha_4(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)$$

admet l'invariant multiple connu $\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1^2 + \alpha_4^2$, égal à $\frac{1}{4}F_{\alpha^2}$.

Quand on considère les (x), une substitution conforme est une substitution linéaire sur x_1, x_2, x_3 et $\sqrt{-F_{x^2}}$; il en est de même pour une substitution du second type.

402. Dans une substitution conforme, les quatre éléments tangents à l'absolu qui correspondent aux éléments doubles des deux substitutions faites sur les (λ) et les (μ) se correspondent évidemment à eux-mêmes et sont les seuls dans ce cas, tant que l'une de ces substitutions n'a pas une infinité d'éléments doubles. Par suite, dans le cas général, la substitution conforme détermine quatre cercles doubles, de rayon nul, composés des éléments tangents à l'absolu que nous venons de déterminer, pris deux à deux; les centres de ces cercles sont quatre éléments (x) se correspondant à eux-mêmes. Nous n'insisterons pas sur les cas particuliers, dont l'interprétation deviendra immédiate après l'étude de la Géométrie quaternaire.

En général, les séries linéaires qui se transforment en séries linéaires contiennent un élément fixe de coordonnées

$$x_1 = \sigma_1\tau'_2 - \sigma'_1\tau_2 + \sigma_2\tau'_1 - \sigma'_2\tau_1,$$
$$x_2 = \sigma_1\tau'_1 - \sigma'_1\tau_1,$$
$$x_3 = \sigma_2\tau'_2 - \sigma'_2\tau_2,$$

facile à déterminer en remarquant que α_1 et α'_1 sont nuls en même temps.

Étudions le cas spécial où la substitution est involutive; il faut et il suffit pour cela que les deux substitutions faites sur les (λ) et les (μ) soient elles-mêmes involutives, c'est-à-dire que l'on ait

$$\sigma_1 + \sigma'_2 = 0, \qquad \tau_1 + \tau'_2 = 0.$$

Si l'élément fixe commun à toutes les séries linéaires qui se transforment en séries linéaires n'appartient pas à l'absolu, nous pouvons le prendre pour l'élément fondamental O_1, et alors

$$\sigma_1 = \tau_1 = 0,$$

de sorte que l'on a simplement

$$\lambda_1 = \sigma'_1\lambda'_2, \qquad \mu_1 = \tau'_1\mu'_2,$$
$$\lambda_2 = \sigma_2\lambda'_1, \qquad \mu_2 = \tau_2\mu'_1.$$

Les éléments tangents à l'absolu, déterminés comme éléments doubles de ces involutions, forment deux couples, et les éléments de contact des éléments de chaque couple sont conjugués harmoniques sur l'absolu par rapport à O_2 et O_3. En combinant les éléments de ces deux couples ensemble, on détermine deux couples d'éléments de première espèce A et B, A′ et B′, les éléments AB et A′B′ contenant O_1. On voit aisément dans ce cas que tous les cercles doubles pour la substitution envisagée sont ceux des deux faisceaux déterminés par A et B, A′ et B′; ces deux faisceaux sont conjugués, et les cercles de l'un sont orthogonaux aux cercles de l'autre.

Si l'élément fixe commun à toutes les séries linéaires qui se transforment en séries linéaires appartient à l'absolu, on peut le prendre pour O_3, et alors $\sigma'_1 = \tau'_1 = 0$. On se trouve dans un cas limite du précédent.

Dans tous les cas, en composant une substitution conforme quelconque avec un mouvement convenablement choisi, on verra

sans peine qu'on peut la ramener à une substitution conforme involutive.

403. Supposons maintenant que l'on considère une substitution du second type; les séries linéaires qui se transforment en séries linéaires contiennent encore un élément fixe déterminé comme précédemment. Si cet élément n'appartient pas à l'absolu, prenons-le pour O_1, de sorte que

$$\frac{\sigma_1}{\tau_1} = \frac{\sigma'_1}{\tau'_1}, \qquad \frac{\sigma_2}{\tau_2} = \frac{\sigma'_2}{\tau'_2}.$$

S'il y a involution, on a $\sigma'_1 = \tau'_1 = \sigma_2 = \tau_2 = 0$, et de plus $\sigma_1\tau_1 = \sigma'_2\tau'_2$, de sorte que, avec cette condition, on a simplement

$$\lambda_1 = \sigma_1\mu'_1, \qquad \mu_1 = \tau_1\lambda'_1,$$
$$\lambda_2 = \sigma'_2\mu'_2, \qquad \mu_2 = \tau'_2\lambda'_2.$$

Cette substitution spéciale, que nous appellerons *inversion générale,* jouit de propriétés importantes. D'abord deux éléments correspondants sont alignés avec O_1; de plus, pour deux tels éléments (x) et (x'), en déterminant O_1 par $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1$, on a

$$\cos\frac{\overline{O_1 x'}}{2im} = \frac{\lambda'_1\mu'_2 + \lambda'_2\mu'_1}{\lambda'_1\mu'_2 - \lambda'_2\mu'_1}, \qquad \cos\frac{\overline{O_1 x}}{2im} = \frac{\sigma_1\tau'_2\lambda'_2\mu'_1 + \sigma'_2\tau_1\lambda'_1\mu'_2}{\lambda'_2\mu'_1 - \lambda'_1\mu'_2},$$

et, par suite,

$$\operatorname{tang}^2\frac{\overline{O_1 x}}{4im}\operatorname{tang}^2\frac{\overline{O_1 x'}}{4im} = \frac{\sigma'_2\tau_1}{\sigma_1\tau'_2},$$

ce qui achève de définir la correspondance entre les (x) et les (x'). Les cercles doubles pour cette transformation sont d'abord le cercle d'équation

$$\tau_1\lambda_1\mu_2 - \tau'_2\lambda_2\mu_1 = 0.$$

ou

$$(\tau_1 - \tau'_2)x_1 + (\tau_1 + \tau'_2)\sqrt{-F_x} = 0,$$

de centre O_1, et dont le rayon R est donné par la formule

$$\operatorname{tang}^2\frac{R}{4im} = -\frac{\tau_1}{\tau'_2},$$

quand on oriente O_1 comme précédemment; puis tous les cercles orthogonaux à celui-là, formant un réseau.

Relativement aux (x), on peut écrire

$$\frac{x_2}{x'_2} = \frac{x_3}{x'_3} = \frac{x_1}{\frac{1}{2}\left(\frac{\tau_1}{\tau'_2} + \frac{\tau'_2}{\tau_1}\right)x'_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\tau_1}{\tau'_2} - \frac{\tau'_2}{\tau_1}\right)\sqrt{-\mathrm{F}_{x'^2}}}$$
$$= \frac{\sqrt{-\mathrm{F}_{x^2}}}{\frac{1}{2}\left(-\frac{\tau_1}{\tau'_2} + \frac{\tau'_2}{\tau_1}\right)x'_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\tau_1}{\tau'_2} + \frac{\tau'_2}{\tau_1}\right)\sqrt{-\mathrm{F}_{x'^2}}}.$$

Si $\tau_1 + \tau'_2 = 0$, on retombe sur le mouvement qui correspond à l'homologie involutive, à l'orientation près des éléments.

En composant un tel mouvement convenablement choisi avec une substitution conforme involutive, on sera ramené à une inversion générale. En gardant les notations du numéro précédent, le mouvement involutif à employer est déterminé par AB ou A'B' comme élément double. On en conclura de nouvelles propriétés des substitutions conformes, faciles à énoncer.

Si l'élément fixe commun à toutes les séries linéaires qui se transforment en séries linéaires appartient à l'absolu, on se trouvera, en supposant toujours qu'il y ait involution, dans un cas limite du précédent. Dans tous les cas, une substitution du premier ou du second type, composée avec un mouvement convenable, peut toujours se ramener à une inversion générale.

404. Les substitutions conformes, comme celles du second type, transforment un réseau ou un faisceau de cercles en un réseau ou un faisceau d'autres cercles. Ceci s'applique en particulier aux séries linéaires qui peuvent être regardées comme des cercles orthogonaux à l'absolu. On pourra par suite, en employant une telle substitution, toujours transformer trois cercles donnés en trois séries linéaires, ou inversement; on pourra aussi, en employant une inversion générale, conserver un cercle avec tous les cercles qui lui sont orthogonaux, etc. Ces propriétés rendent évidentes bien des propositions qu'il est inutile de développer. Nous nous bornerons à ces indications sur les substitutions que nous avons définies au commencement de ce paragraphe; l'étude de la Géométrie quaternaire permettra de compléter leur théorie et d'en étendre les conséquences.

405. De même que, en partant d'un élément (x), nous avons

défini un cercle C_α par l'équation

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 \sqrt{-F_{x^2}} = 0,$$

nous pouvons, en partant des cercles, définir un ensemble de cercles par la relation

$$A_1 \alpha_1 + A_2 \alpha_2 + A_3 \alpha_3 + A_4 \alpha_4 + A_5 \sqrt{-\Gamma_{\alpha^2}} = 0,$$

puisque la forme Γ_{α^2} joue par rapport aux (α) le même rôle que la forme F_{x^2} par rapport aux (x).

Cet ensemble de cercles, que nous pouvons appeler *hypercercle*, a pour coordonnées les (A) : il est clair qu'il se compose de tous les cercles C_α qui sont à une distance constante d'un cercle donné; car cette condition est précisément exprimée par une relation linéaire et homogène entre les (α) et $\sqrt{-\Gamma_{\alpha^2}}$; si, en particulier, $A_5 = 0$, l'hypercercle (A) se compose, comme nous le savons déjà, de tous les cercles orthogonaux à un cercle fixe.

Parmi les hypercercles, on peut distinguer ceux qui sont de rayon nul, c'est-à-dire qui sont tangents à un cercle fixe ; ce sont ceux pour lesquels il existe entre les coordonnées (A) une relation quadratique facile à former.

On peut alors raisonner sur les hypercercles comme sur les cercles. On pourra soumettre leurs coordonnées à une substitution linéaire, et les théories de la Géométrie projective quinaire trouveraient là leur application. Parmi toutes les substitutions linéaires auxquelles on peut soumettre les (A), on peut envisager seulement celles qui font correspondre à un hypercercle de rayon nul, un hypercercle de même nature, et ces substitutions seront celles qui conservent un certain absolu dans l'espace à quatre dimensions rempli par les hypercercles. Ces substitutions font correspondre à un cercle un autre cercle, savoir : au cercle qui touche tous les cercles d'un hypercercle de rayon nul, le cercle qui touche tous les cercles de l'hypercercle correspondant. Ces substitutions comprendront en particulier les substitutions conformes.

Parmi elles, on peut placer évidemment celles qui consistent à augmenter le rayon de chaque cercle d'une quantité constante, le centre restant fixe; ce sont les *dilatations*.

Nous n'étudierons pas davantage la théorie que nous venons d'esquisser; elle trouverait son développement naturel dans la Géométrie quaternaire.

On voit aussi que l'on pourrait partir des hypercercles comme on est parti des cercles pour considérer des éléments nouveaux remplissant un espace à cinq dimensions; et ainsi de suite.

406. Pour terminer ce paragraphe, envisageons le cas spécial où l'on a $F_{x^2} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Les mouvements sont alors définis par une substitution ternaire *orthogonale*, c'est-à-dire que si

$$x_i = \lambda_{i1} x'_1 + \lambda_{i2} x'_2 + \lambda_{i3} x'_3$$

est cette substitution, on a

$$\sum_i \lambda_{i1}^2 = \sum_i \lambda_{i2}^2 = \sum_i \lambda_{i3}^2, \qquad \sum_i \lambda_{ij} \lambda_{ik} = 0.$$

On connaît les propriétés de telles substitutions.

On aura ici

$$\Gamma_{\alpha^2} = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2,$$

et l'on voit par suite que les substitutions conformes correspondront aux substitutions orthogonales faites sur les (α).

De même, si (A) est un hypercercle de rayon nul, on a

$$A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 + A_5^2 = 0,$$

et les substitutions considérées au numéro précédent sont encore les substitutions orthogonales faites sur les (A); et ainsi de suite.

V. — Les coordonnées circulaires et les séries orientées en général.

407. Les cercles C_β dont les coordonnées vérifient une relation linéaire

$$a_1 \beta_1 + a_2 \beta_2 + a_3 \beta_3 + a_4 \beta_4 = 0$$

sont tous orthogonaux à un cercle fixe C_α dont les coordonnées (α) sont déterminées par les relations

$$\frac{a_1}{\Gamma_{\beta_1}} = \frac{a_2}{\Gamma_{\beta_2}} = \frac{a_3}{\Gamma_{\beta_3}} = \frac{a_4}{\Gamma_{\beta_4}}.$$

On peut donc aussi considérer les (a) comme des coordonnées de ce cercle C_α, qui pourra être désigné aussi par C_a. Les lettres latines seront employées toujours pour désigner ces nouvelles coordonnées, tandis que les lettres grecques resteront affectées à la désignation des premières.

On a d'ailleurs, inversement,

$$\frac{\alpha_1}{F_{a_1}} = \frac{\alpha_2}{F_{a_2}} = \frac{\alpha_3}{F_{a_3}} = \frac{\alpha_4}{a_4}.$$

Les quantités a_1, a_2, a_3 sont les coordonnées du centre de C_α, et si r_α ou r_a est son rayon, on a $\cos\frac{r_\alpha}{2im} = \frac{a_4}{\sqrt{-F_{a^2}}}$.

Quand C_α est de rayon nul, on a $\Gamma_{\alpha^2} = 0$ ou bien $(a\,|\,\alpha) = 0$, ou encore $F_{a^2} + a_4^2 = 0$.

On peut effectuer une substitution linéaire générale sur les coordonnées (a), et les coordonnées (α) seront alors transformées par la substitution transposée.

Regardant cette substitution comme définissant non pas une correspondance, mais un changement de coordonnées, on est amené à envisager des coordonnées plus générales. Toutefois, aucune propriété essentielle nouvelle ne résulterait de cette considération, dont les conséquences deviendront intuitives après l'étude de la Géométrie quaternaire. Aussi nous bornerons-nous aux coordonnées précédemment définies.

408. Une équation de la forme $f(a_1, a_2, a_3, a_4) = 0$ définit une série doublement infinie de cercles; si, parmi ces cercles, nous ne voulons considérer que ceux qui sont de rayon nul, nous adjoindrons à l'équation précédente la relation $F_{a^2} + a_4^2 = 0$, et les centres (a) de ces cercles formeront une série ternaire, dont nous pourrons dire encore que $f(a_1, a_2, a_3, a_4) = 0$ est l'équation en *coordonnées circulaires*.

L'équation ordinaire de cette série est obtenue en éliminant a_4 entre les deux équations précédentes.

Supposons que f soit une forme quaternaire indécomposable de degré p; si elle ne contient que les puissances paires de a_4, la série ternaire d'équation $f = 0$ sera seulement de degré p et pourra d'ailleurs se décomposer. Si, au contraire, la forme f ne contient pas que les puissances paires de a_4, on pourra l'écrire sous la forme $g + ha_4$, g et h étant des formes ternaires en a_1, a_2, a_3 des degrés p et $p-1$, en se servant de la seconde équation. L'équation ordinaire de la série f sera donc $g^2 + h^2 F_{a^2} = 0$, et cette série sera de degré $2p$, peut-être décomposable d'ailleurs.

Mais on voit que cette série est susceptible d'être dédoublée en deux séries orientées, ou composées d'éléments orientés, correspondant aux deux équations $g \pm h\alpha_4 = 0$, ce qui n'avait pas lieu dans le premier cas. On est ainsi conduit à la notion de séries orientées de degré p, obtenues par dédoublement de certaines séries ordinaires de degré $2p$. On voit d'ailleurs que la série ordinaire équivalente à une série orientée de degré p a ses éléments communs avec l'absolu confondus deux par deux, et qu'elle possède, d'une façon générale, $p(p-1)$ éléments doubles, communs aux séries g et h.

Les cercles sont les séries orientées du premier degré.

Les séries non orientées de degré p sont des cas particuliers des séries orientées de degré p, de même que les séries linéaires sont des cas particuliers des cercles : on peut donc les considérer comme des séries orientées, mais telles que si elles contiennent un élément orienté, elles contiennent le même élément orienté de façon opposée.

409. Considérons inversement une série ternaire ordinaire, indécomposable, de degré p, d'équation $f(x_1, x_2, x_3) = 0$. Si, en supposant que $F_{x^2} = -x_1^2 + 4x_2x_3$, comme précédemment, nous définissons un élément (x) par les paramètres (λ) et (μ) des éléments de contact avec l'absolu des éléments tangents à l'absolu qui contiennent (x), l'équation de cette série f sera

$$f(\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1, \lambda_1\mu_1, \lambda_2\mu_2) = 0.$$

Le premier membre ne sera pas décomposable en deux facteurs qui ne diffèrent que par la permutation des (λ) ou des (μ), ou le sera. Dans le premier cas, la série f ne sera pas susceptible d'être dédoublée en deux séries orientées. Dans le second cas, deux hypothèses se présentent : ou bien les deux facteurs sont de même degré $\frac{p}{2}$ (p étant nécessairement pair) par rapport aux (λ) et aux (μ), et alors ils peuvent s'écrire sous la forme

$$g(x_1, x_2, x_3, \pm\sqrt{-F_{x^2}}),$$

g étant une forme de degré $\frac{p}{2}$, de sorte que la série f est la réunion de deux séries orientées de degré $\frac{p}{2}$; ou bien les deux facteurs sont de degrés différents q et $p-q$ par rapport aux (λ) et

aux (μ) : on est alors ramené au cas précédent en adjoignant à chacun d'eux, en supposant $p-q>q$, un facteur de degré $p-2q$, ne contenant que les (λ) ou les (μ), de sorte que la série f, à laquelle on adjoint $p-2q$ éléments tangents à l'absolu, devient la réunion de deux séries orientées de degré $p-q$. La série f a, dans ce cas, ses éléments communs avec l'absolu confondus deux à deux et possède d'une façon générale

$$\frac{(p-q)(p-q-1)}{2}+\frac{q(q-1)}{2}$$

éléments doubles, ainsi que nous l'avons vu antérieurement.

A beaucoup de points de vue, il est convenable de faire l'étude métrique des séries orientées définies par des équations entre coordonnées circulaires. C'est ce que nous ferons, mais brièvement, puisque cette théorie se trouvera évidemment empruntée au domaine de la Géométrie quaternaire générale, et deviendra parfaitement claire comme conséquence des théories développées dans l'étude de cette Géométrie, après les quelques modifications de langage nécessaires.

410. Soit une série orientée de degré p, définie par les équations

$$f(a_1, a_2, a_3, a_4)=0, \qquad \mathrm{F}_{a^2}+a_4^2=0,$$

et considérons un cercle C_β, de coordonnées (β), et dont l'équation en coordonnées circulaires est par suite

$$\beta_1 a_1+\beta_2 a_2+\beta_3 a_3+\beta_4 a_4=0.$$

Ce cercle sera tangent à f en (a'), c'est-à-dire que les trois équations précédentes admettront les (a') comme solution double, si tous les déterminants du troisième ordre tirés de la matrice

$$\begin{Vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \dfrac{\partial f}{\partial a'_1} & \dfrac{\partial f}{\partial a'_2} & \dfrac{\partial f}{\partial a'_3} & \dfrac{\partial f}{\partial a'_4} \\ \mathrm{F}_{a'_1} & \mathrm{F}_{a'_2} & \mathrm{F}_{a'_3} & \mathrm{F}_{a'_4} \end{Vmatrix}$$

sont nuls; et, par suite, il y aura une infinité de cercles tangents à f en (a'), dont l'équation sera

$$\lambda\left(a_1\frac{\partial f}{\partial a'_1}+a_2\frac{\partial f}{\partial a'_2}+a_3\frac{\partial f}{\partial a'_3}+a_4\frac{\partial f}{\partial a'_4}\right)+\mu(\mathrm{F}_{aa'}+a_4 a'_4)=0.$$

Ces cercles forment un faisceau particulier, puisque leurs éléments communs sont confondus.

Si $\lambda \frac{\partial f}{\partial a'_4} + \mu a'_4 = 0$, on retrouve l'élément linéaire tangent à f.

Le lieu des centres de ces cercles est la série linéaire

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \frac{\partial f}{\partial a'_1} & \frac{\partial f}{\partial a'_2} & \frac{\partial f}{\partial a'_3} \\ F_{a'_1} & F_{a'_2} & F_{a'_3} \end{vmatrix} = 0,$$

dite *normale* à f en (a'), pour une raison évidente.

Le faisceau conjugué du faisceau précédent est un faisceau de même nature, composé de cercles normaux à f en (a').

Parmi les cercles qui sont tangents à f en (a'), il en existe un qui a trois éléments communs avec f confondus en (a'). Un calcul facile montre qu'il correspond à

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{P}{Q},$$

où

$$P = (p-1)^2 \left[\Phi\left(\frac{\partial f}{\partial a'_1}, \frac{\partial f}{\partial a'_2}, \frac{\partial f}{\partial a'_3} \right) + D\left(\frac{\partial f}{\partial a'_4} \right)^2 \right] \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial a'^2_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial a'_1 \partial a'_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial a'_1 \partial a'_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial a'_1 \partial a'_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial a'^2_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial a'_2 \partial a'_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial a'_1 \partial a'_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial a'_2 \partial a'_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial a'^2_3} \end{vmatrix},$$

$$Q = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial a'^2_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial a'_1 \partial a'_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial a'_1 \partial a'_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial a'_1 \partial a'_4} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial a'_1 \partial a'_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial a'^2_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial a'_2 \partial a'_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial a'_2 \partial a'_4} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial a'_1 \partial a'_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial a'_2 \partial a'_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial a'^2_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial a'_3 \partial a'_4} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial a'_1 \partial a'_4} & \frac{\partial^2 f}{\partial a'_2 \partial a'_4} & \frac{\partial^2 f}{\partial a'_3 \partial a'_4} & \frac{\partial^2 f}{\partial a'^2_4} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial a'^2_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial a'_1 \partial a'_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial a'_1 \partial a'_3} & F_{a'_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial a'_1 \partial a'_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial a'^2_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial a'_2 \partial a'_3} & F_{a'_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial a'_1 \partial a'_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial a'_2 \partial a'_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial a'^2_3} & F_{a'_3} \\ F_{a'_1} & F_{a'_2} & F_{a'_3} & 0 \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial a'^2_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial a'_1 \partial a'_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial a'_1 \partial a'_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial a'_1 \partial a'_4} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial a'_1 \partial a'_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial a'^2_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial a'_2 \partial a'_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial a'_2 \partial a'_4} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial a'_1 \partial a'_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial a'_2 \partial a'_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial a'^2_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial a'_3 \partial a'_4} \\ F_{a'_1} & F_{a'_2} & F_{a'_3} & a'_4 \end{vmatrix}^2.$$

Ce cercle reçoit le nom de *cercle osculateur* à f en (a'). Son centre est le centre de courbure de f relativement à (a'); le lieu des centres de courbures est l'enveloppe de séries linéaires normales à f : c'est la *développée* de f. Nous ne développerons pas davantage les conséquences de cette théorie. Remarquons seulement que tout ceci pourrait s'appliquer avec les modifications convenables à des séries de seconde espèce : on serait ainsi conduit à définir un élément normal de première espèce, un cycle osculateur, etc.

VI. — Les séries orientées du second degré.

411. L'équation générale des séries orientées du second degré est

$$f(a_1, a_2, a_3, a_4) = 0,$$

f étant une forme quadratique.

Si f ne contient pas a_4 à la première puissance, on peut supposer qu'elle ne le contient pas du tout : la série est une série quadratique ordinaire. Ses propriétés métriques résultent de l'étude du système qu'elle forme avec l'absolu, et par suite seront faciles à énoncer, puisque nous avons fait complètement l'étude du système de deux coniques. Nous insisterons cependant sur quelques-unes d'entre elles, mais sans séparer leur étude de celle des séries orientées du second degré générales. Celles-ci correspondent au dédoublement des séries quartiques ordinaires à deux éléments doubles et quadruplement tangentes à l'absolu d'une façon proprement dite : et d'ailleurs toute série quartique remplissant ces conditions est susceptible d'être orientée. Comme cas particulier, on a celui d'une série cubique triplement tangente à l'absolu et possédant un élément double : il suffit de lui adjoindre un élément tangent quelconque à l'absolu.

L'étude des séries orientées du second degré est la même que celle du système de deux séries quadratiques quaternaires : nous n'en citerons donc que les points principaux.

412. Nous admettrons qu'il est possible, en général, de trouver quatre fonctions linéaires A_1, A_2, A_3, A_4 des (a) telles que la

forme f devienne

$$f = p_1 A_1^2 + p_2 A_2^2 + p_3 A_3^2 + p_4 A_4^2,$$

et que la forme $F_{a^2} + a_4^2$ devienne

$$G = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2.$$

Ces formes sont déterminées, au signe près, par la résolution d'une équation du quatrième degré, obtenue en égalant à zéro le discriminant de la forme quaternaire

$$f(a_1, a_2, a_3, a_4) + \lambda[F_{a^2} + a_4^2];$$

les détails de cette détermination seront indiqués dans l'étude de la Géométrie quaternaire.

L'équation

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 A_4 = 0$$

représente un cercle (λ), et il est clair que deux cercles (λ) et (μ) seront orthogonaux si l'on a

$$\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 + \lambda_3 \mu_3 + \lambda_4 \mu_4 = 0,$$

en vertu de l'invariance des formes polaires.

En particulier, les quatre cercles d'équations $A_i = 0$ sont orthogonaux deux à deux : nous les appellerons les cercles *principaux* de la série f.

Un cercle (λ) de rayon nul vérifie la relation

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2 = 0.$$

Une première propriété est la suivante. Il existe sept substitutions linéaires et sept seulement qui conservent la série f et la forme G. Quatre de ces substitutions sont du type

$$\lambda_1 = -\lambda'_1, \qquad \lambda_2 = \lambda'_2, \qquad \lambda_3 = \lambda'_3, \qquad \lambda_4 = \lambda'_4;$$

les trois autres sont du type

$$\lambda_1 = -\lambda'_1, \qquad \lambda_2 = -\lambda'_2, \qquad \lambda_3 = \lambda'_3, \qquad \lambda_4 = \lambda'_4.$$

Les quatre premières sont des inversions générales dont chacune conserve un cercle principal, et les cercles qui lui sont orthogonaux. Les trois autres sont des substitutions conformes proprement dites, involutives, conservant les cercles des deux faisceaux déterminés par les cercles principaux pris par groupes de deux :

il en résulte une définition simple de la transformation correspondante pour les éléments (x).

413. Dans le cas particulier où f est une série quadratique ordinaire, la transformation précédente est encore applicable; on a $p_4 = 0$, si l'on veut, et A_1, A_2, A_3 sont des fonctions linéaires de a_1, a_2, a_3 seulement, tandis que $A_4 = a_4$. On a donc aussi

$$F_{a^2} = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2,$$

et la transformation n'est autre que celle qui consiste à rapporter les séries f et F à leur suite triple conjuguée commune.

Les cercles principaux se réduisent aux éléments de seconde espèce de cette suite triple et à l'absolu. Des quatre inversions qui conservent la série f, trois se réduisent à des mouvements involutifs, à l'orientation près des éléments; la quatrième n'a d'autre effet que de changer l'orientation des éléments (x). Quant aux trois substitutions conformes qui conservent f, ce sont des mouvements involutifs faciles à définir.

On calculerait sans peine, au moyen de formules déjà données, dans un cas plus général, les distances des éléments (x) qui ont même polaire par rapport à f et à l'absolu, aux éléments communs à f et aux cercles principaux; et de même on interpréterait métriquement les invariants communs à f et F.

Les cas particuliers où f serait tangente ou osculatrice à l'absolu ne permettent pas la réduction générale précédemment employée, mais ces cas particuliers peuvent être envisagés comme cas limites du cas général,

Si f était bitangente ou osculatrice à l'absolu, on serait ramené à l'étude des cercles, et les généralités qui précèdent trouveraient encore leur application évidente.

414. Revenons au cas général et cherchons à déterminer les cercles bitangents à la série f.

On trouve aisément quatre séries de tels cercles, dont l'une, par exemple, est définie par les relations

$$\lambda_1 = 0, \qquad \frac{\lambda_2^2}{p_2 - p_1} + \frac{\lambda_3^2}{p_3 - p_1} + \frac{\lambda_4^2}{p_4 - p_1} = 0.$$

La première relation indique que les cercles de cette série sont

orthogonaux au cercle principal $A_1 = 0$, ce qui nous prouve immédiatement que ces cercles se conservent dans l'inversion qui correspond à ce cercle, les deux éléments de contact de l'un de ces cercles avec f s'échangeant mutuellement.

Pour donner un sens plus précis à la seconde relation, cherchons d'abord à déterminer les coordonnées du centre d'un cercle (λ). Si (L) désignent ces coordonnées de même espèce que les (A), tout cercle (μ) contenant (L) et orthogonal à l'absolu, c'est-à-dire encore réduit à une série linéaire, sera orthogonal à (λ). Si donc la transformation faite sur les (a) donne

$$a_4 = \varphi_1 A_1 + \varphi_2 A_2 + \varphi_3 A_3 + \varphi_4 A_4,$$

les relations

$$\mu_1 L_1 + \mu_2 L_2 + \mu_3 L_3 + \mu_4 L_4 = 0,$$

$$\mu_1 \varphi_1 + \mu_2 \varphi_2 + \mu_3 \varphi_3 + \mu_4 \varphi_4 = 0$$

entraînent

$$\mu_1 \lambda_1 + \mu_2 \lambda_2 + \mu_3 \lambda_3 + \mu_4 \lambda_4 = 0;$$

d'ailleurs

$$L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 + L_4^2 = 0;$$

par suite, on a

$$L_i = \lambda_i + k\varphi_i,$$

avec

$$\Sigma(\lambda_i + k\varphi_i)^2 = 0.$$

De plus, comme

$$F_{a^2} = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 - (\varphi_1 A_1 + \ldots)^2,$$

il faut que le discriminant de la forme quadratique qui est au second membre soit nul, ce qui donne $\Sigma\varphi_i^2 = 1$, et par suite l'équation en k est

$$k^2 + 2k\Sigma\lambda_i\varphi_i + \Sigma\lambda_i^2 = 0.$$

On trouve naturellement deux centres, qui sont un même élément orienté de deux façons différentes. Quand le cercle est de rayon nul, le centre proprement dit correspond à $k = 0$, car il appartient au cercle lui-même.

Le lieu géométrique des centres de la série considérée plus haut de cercles bitangents à f est donc défini par la relation

$$\frac{(L_1\varphi_2 - L_2\varphi_1)^2}{p_2 - p_1} + \frac{(L_1\varphi_3 - L_3\varphi_1)^2}{p_3 - p_1} + \frac{(L_1\varphi_4 - L_4\varphi_1)^2}{p_4 - p_1} = 0.$$

C'est l'équation d'une série orientée du second degré, ou plutôt d'une série quadratique ordinaire, puisque l'orientation de ses éléments est indifférente, d'après ce qui précède. Au surplus, il n'est pas difficile de voir que

$$X_i = \varphi_{1i} a_1 + \varphi_{2i} a_2 + \varphi_{3i} a_3 + \varphi_i a_4;$$

et que, outre la relation $\Sigma\varphi_i^2 = 1$, on a

$$\Sigma\varphi_i\varphi_{1i} = 0, \qquad \Sigma\varphi_i\varphi_{2i} = 0, \qquad \Sigma\varphi_i\varphi_{3i} = 0.$$

415. Parmi les cercles (λ) bitangents à f du système considéré, il y en a quatre qui sont de rayon nul, et déterminés par les relations

$$L_1 = 0, \qquad L_2^2 + L_3^2 + L_4^2 = 0, \qquad \frac{L_2^2}{p_2 - p_1} + \frac{L_3^2}{p_3 - p_1} + \frac{L_4^2}{p_4 - p_1} = 0;$$

ce sont des *foyers* de la série f, de sorte que cette série a seize foyers.

On retrouve ces seize foyers de la façon suivante : la série ternaire quartique définie par f et l'absolu ont huit éléments tangents communs, qui peuvent être répartis en deux groupes distincts de quatre éléments, d'après l'équation de f, exprimée comme au n° 409 à l'aide des variables (λ) et (μ); les éléments de ces deux groupes, combinés ensemble, fournissent seize éléments qui sont les foyers de f, et d'après les propriétés de la forme doublement quadratique, les deux groupes de quatre éléments tangents considérés ayant même rapport anharmonique, les seize foyers appartiennent quatre par quatre à quatre séries quadratiques bitangentes à l'absolu, les quatre cercles principaux.

Si l'on considère les séries f' pour lesquelles les quatre foyers d'un système sont déterminés, par exemple ceux qui résultent des équations précédentes, il est aisé de voir que leur équation générale est de la même forme que celle de f, soit $p'_1 \Lambda_1^2 + \ldots = 0$, et que l'on doit avoir $p'_i = \frac{p_i}{1 - \lambda p_i}$, λ étant un paramètre arbitraire. Tous les foyers sont alors communs, et ces séries sont *homofocales*.

Deux de ces séries contiennent un élément A donné, et il est aisé de vérifier qu'elles y sont orthogonales, c'est-à-dire que leurs éléments tangents y sont perpendiculaires.

416. Envisageons, en particulier, une série quadratique ordinaire, pour laquelle $p_4 = 0$, $a_4 = A_4$.

Il y a trois séries de cercles bitangents à f, proprement dits. L'une d'elles, par exemple, a pour lieu de centres $L_1 = 0$, c'est-à-dire l'un des éléments de seconde espèce de la suite triple conjuguée commune à f et à l'absolu. Ces cercles sont orthogonaux à cet élément. Ils fournissent quatre foyers, qui se réduisent à deux éléments d'orientation arbitraire, déterminés par les éléments tangents communs à f et F, associés deux par deux d'une façon convenable.

La quatrième série de cercles bitangents à f se compose des éléments linéaires tangents à f, dont les éléments de contact ont en effet une double orientation. Le lieu de leurs centres est la série

$$\frac{L_1^2}{p_1} + \frac{L_2^2}{p_2} + \frac{L_3^2}{p_3} = 0,$$

polaire réciproque de f par rapport à F. Les quatre foyers correspondants sont les éléments de contact avec l'absolu des éléments tangents communs à f et F.

Les distances des foyers aux éléments qui ont même polaire par rapport à f et F sont faciles à calculer.

Les séries quadratiques homofocales admettent toutes mêmes éléments tangents communs avec l'absolu; en d'autres termes, leurs séries tangentielles forment un faisceau auquel appartient l'absolu. Il est alors facile d'énoncer relativement à ces séries un grand nombre de propriétés, qui ne seront que la traduction métrique des propriétés générales des faisceaux.

417. Revenant au cas général, considérons le système de cercles bitangents à f, dont le lieu des centres est (D_1), ou

$$\frac{(L_1\varphi_2 - L_2\varphi_1)^2}{p_2 - p_1} + \frac{(L_1\varphi_3 - L_3\varphi_1)^2}{p_3 - p_1} + \frac{(L_1\varphi_4 - L_4\varphi_1)^2}{p_4 - p_1} = 0;$$

l'équation de la série quadratique (A_1) déterminée par le cercle $A_1 = 0$ est de même

$$(L_1\varphi_2 - L_2\varphi_1)^2 + (L_1\varphi_3 - L_3\varphi_1)^2 + (L_1\varphi_4 - L_4\varphi_1)^2 = 0.$$

La série linéaire telle que $L_1 \varphi_2 - L_2 \varphi_1 = 0$ contient les centres des cercles $A_3 = 0$ et $A_4 = 0$. Donc, les centres des trois cercles principaux autres que $A_1 = 0$ sont les éléments qui ont même polaire par rapport à (A_1) et (D_1) : ceci suffit à déterminer ces cercles, connaissant (D_1) et (A_1), puisque l'on sait qu'ils sont orthogonaux au cercle $A_1 = 0$.

418. Pour obtenir de nouvelles propriétés, nous allons envisager le problème d'une nouvelle façon, en conservant les coordonnées circulaires ordinaires. L'équation de la série f peut s'écrire

$$f_1 + 2 a_4 f_2 = 0.$$

f_1 et f_2 étant des formes l'une quadratique, l'autre linéaire en a_1, a_2, a_3. On peut alors, par une transformation ternaire, trouver trois fonctions linéaires A_1, A_2, A_3 de a_1, a_2, a_3 telles que l'équation de f devienne

$$f = q_1 A_1^2 + q_2 A_2^2 + q_3 A_3^2 + 2 A_4 (r_1 A_1 + r_2 A_2 + r_3 A_3) = 0,$$

et la forme $F_{a^2} + a_4^2$

$$G = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2,$$

A_4 étant égal à a_4. Ceci revient à rapporter la série f_1 et l'absolu à leur suite triple conjuguée commune. Cette série f_1 est d'ailleurs définie par la condition de contenir les éléments communs à f et à l'absolu, ainsi que les deux éléments doubles de la série quartique définie par la série f.

Ici les coordonnées du centre d'un cercle (λ) sont λ_1, λ_2, λ_3, $\sqrt{-(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)}$, et λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, s'il est de rayon nul : en général, si r_λ est son rayon, on a, en faisant $2im = 1$,

$$\cos r_\lambda = \frac{\lambda_4}{\sqrt{-(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)}}, \qquad \sin r_\lambda = \frac{\sqrt{-(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2)}}{\sqrt{-(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)}}.$$

Si le cercle (λ) est bitangent à f, en éliminant A_4 à l'aide de l'équation de ce cercle, et exprimant que deux séries quadratiques ternaires sont bitangentes, ce qui se fait facilement en écrivant que dans leur faisceau se trouve une série linéaire double, on est

conduit aux équations

$$\frac{r_1^2}{q_1+\rho}+\frac{r_2^2}{q_2+\rho}+\frac{r_3^2}{q_3+\rho}-\rho=0,$$

$$\frac{\lambda_1^2}{q_1+\rho}+\frac{\lambda_2^2}{q_2+\rho}+\frac{\lambda_3^2}{q_3+\rho}=0,$$

$$\frac{r_1\lambda_1}{q_1+\rho}+\frac{r_2\lambda_2}{q_2+\rho}+\frac{r_3\lambda_3}{q_3+\rho}-\lambda_4=0,$$

ρ étant une inconnue auxiliaire.

La première équation détermine quatre valeurs pour ρ; à chacune de ces valeurs correspond un système de cercles bitangents à f; le lieu des centres des cercles de l'un de ces systèmes est déterminé par la seconde équation : c'est donc une série quadratique, homofocale à la série quadratique polaire réciproque de f_1 par rapport à l'absolu; de sorte que les quatre séries (D_1), (D_2), (D_3), (D_4) ainsi obtenues sont homofocales entre elles. Leurs foyers sont faciles à définir en partant de f elle-même, puisque la série f_1 contient les éléments de contact de f avec l'absolu. Enfin, la dernière équation exprime que les cercles de l'un des systèmes sont orthogonaux au cercle fixe

$$\frac{r_1}{q_1+\rho}A_1+\frac{r_2}{q_2+\rho}A_2+\frac{r_3}{q_3+\rho}A_3-A_4=0.$$

Les propriétés précédemment indiquées se retrouvent sans peine. On peut aussi déterminer facilement les séries linéaires doublement tangentes à f; il suffit de supposer $\lambda_4=0$, et l'on trouve quatre groupes de deux, comme cela devait être.

Cherchons encore les cercles bitangents à f et à éléments de contact confondus; d'après la propriété déjà indiquée des éléments de contact avec f d'un cercle qui lui est bitangent, les cercles que nous considérons ici correspondront aux éléments de contact des séries (D) avec les éléments tangents communs à ces séries et aux séries quadratiques ordinaires déterminées par les cercles principaux correspondants. Si (ξ) est un tel élément tangent à (D_1) et touchant le cercle principal correspondant, de centre C_1, en (x), la série f sera évidemment tangente à $(C_1\,x)$ en (x); si (ξ') est un second élément de même nature touchant le cercle principal en (x'), la série f sera de même tangente à $(C_1\,x')$ en (x'). Si donc on considère le cercle de centre $(\xi\xi')$ contenant (x) et (x'), il est

évidemment bitangent à f, et par suite $(\xi\xi')$ appartient à l'une des séries D_2, D_3, D_4, l'élément de contact étant d'ailleurs déterminé par C_1 et $(\xi\xi')$. Les six éléments tels que $(\xi\xi')$ appartiennent ainsi deux par deux à ces séries, qui, étant déjà homofocales à D_1, sont complètement déterminées par la connaissance de D_1 et du cercle principal correspondant.

En outre, de ce fait résulte un théorème facile à démontrer sur les propriétés de deux séries homofocales et d'un cercle.

Il est aisé maintenant d'étudier les cas particuliers qui se présentent, du moins quand on suppose la réduction précédemment employée possible.

Tout d'abord, nous supposons que l'équation en ρ n'admette comme racine aucune des quantités $-q_1$, $-q_2$, $-q_3$.

Si l'équation en ρ a alors une racine double, on voit sans peine que le cercle principal correspondant devient de rayon nul; si C_1 est le centre de ce cercle, C_1 est un élément double pour f; les séries (D_3) et (D_4) [(D_1) étant confondue avec (D_2)] contiennent C_1 et y touchent les cercles principaux correspondants.

Si l'équation en ρ a une racine triple, la série (D_3) du cas précédent vient se confondre avec (D_1); C_1 appartient à (D_1) et est un élément cuspidal pour f; la série (D_4) contient C_1 et y est osculatrice au cercle principal correspondant.

Si l'équation en ρ a deux racines doubles, la série quartique déterminée par f se décompose en une série cubique et une série linéaire tangente à l'absolu. Ces deux séries étant orientées d'après l'équation $f = 0$, ont en commun les deux centres C_1 et C_3 des deux cercles principaux, chacun de rayon nul; la série (D_1) contient C_3, et la série (D_3) contient C_1.

Si l'équation en ρ a une racine quadruple, on est dans le cas précédent, en supposant de plus que C_3 coïncide avec C_1, et la série (D_1) contient C_1.

Examinons maintenant le cas où l'équation en ρ admettrait la racine $-q_1$, ce qui exige ou bien que la série quadratique f_1 soit bitangente à l'absolu, ou bien que $r_1 = 0$: écartons d'abord le premier cas.

Les cercles bitangents à f qui correspondent à la racine $-q_1$ ont leurs centres sur l'élément $\lambda_1 = 0$, de sorte qu'ils sont orthogonaux à cet élément, qui joue le rôle de cercle principal; mais,

pour déterminer ces cercles, il faut une nouvelle relation que l'on trouve facilement être

$$\left(\frac{\lambda_2^2}{q_1-q_2}+\frac{\lambda_3^2}{q_1-q_3}\right)\left(\frac{r_2^2}{q_1-q_2}+\frac{r_3^2}{q_1-q_3}-q_1\right)$$
$$-\left(\frac{r_2\lambda_2}{q_1-q_2}+\frac{r_3\lambda_3}{q_1-q_3}+\lambda_4\right)^2=0.$$

L'inversion conservant f qui correspond aux cercles de ce système devient une homologie involutive; ce système de cercles fournit toujours quatre foyers. Quand trois des racines de l'équation en λ sont égales ainsi à $-q_1$, $-q_2$, $-q_3$, la série f est une série quadratique ordinaire. Si la racine $-q_1$ est double, la relation précédente se réduit à

$$\frac{r_2\lambda_2}{q_1-q_2}+\frac{r_3\lambda_3}{q_1-q_3}+\lambda_4=0;$$

les cercles correspondants forment un faisceau; les éléments B_1 et B_2 communs à tous ces cercles sont doubles pour f qui se décompose en deux cercles; les séries (D_3) et (D_4) qui correspondent aux autres racines de l'équation en ρ contiennent B_1 et B_2; quand ces deux autres racines sont confondues, l'un des deux cercles dont se compose f est de rayon nul.

Si l'équation en ρ a deux racines doubles telles que $-q_1$ et $-q_2$, les deux cercles dont se compose f sont de rayon nul.

Si la racine $-q_1$ est triple, on est dans le même cas que précédemment; mais les deux cercles dont se compose f sont tangents entre eux.

Si la racine $-q_1$ est quadruple, l'un des deux cercles dont se compose f est de rayon nul, et son centre appartient à l'autre.

Supposons enfin que la série f_1 soit bitangente à l'absolu, de sorte que $q_1=q_2$ par exemple; la série quartique déterminée par f a, dans ce cas, ses éléments communs avec F confondus quatre par quatre. Pour les racines de l'équation en ρ_1, autres que $-q_1$, tout ce qui a été dit précédemment subsiste, on remarquera seulement que les séries (D_i) correspondantes sont elles-mêmes bitangentes à l'absolu suivant le même élément Ω_3 que f_1.

Si la racine $-q_1$ est simple, on peut supposer, sans diminuer la généralité, que r_1 est nul; les cercles correspondant à cette

racine sont alors tels que l'on ait $\lambda_1 = 0$ et

$$q_1 \lambda_2^2 + 2 r_2 \lambda_2 \lambda_3 - \frac{(r_3 \lambda_2 - r_2 \lambda_3)^2}{q_1 - q_3} = 0;$$

l'un des foyers correspondants est l'absolu.

On a les mêmes propriétés générales que précédemment.

Si la racine $-q_1$ est double, on a $r_1^2 + r_2^2 = 0$; si r_1 et r_2 ne sont pas tous deux nuls, on a $r_1 \lambda_2 - r_2 \lambda_1 = 0$, avec la dernière des relations précédentes : la série f a un élément double M appartenant à l'absolu et à Ω_3, et le lieu des centres des cercles qui correspondent à la racine $-q_1$ est $O_3 M$.

Si l'on a à la fois $r_1 = r_2 = 0$, la série f se décompose en deux cercles concentriques.

Dans ces deux cas, il y a nouvelle décomposition de f_1 quand les deux autres racines de l'équation en ρ sont égales.

Si la racine $-q_1$ est triple, on a

$$r_1^2 + r_2^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad r_3^2 - q_1(q_1 - q_3) = 0;$$

si r_1 et r_2 ne sont pas nuls, tout se passe comme dans le cas précédent, sauf que M est cuspidal pour la série f; si $r_1 = r_2 = 0$, la série f se compose de deux cercles coïncidents.

Si la racine $-q_1$ est quadruple, sans que r_1 et r_2 soient nuls, la série f se décompose en une série cubique contenant M et l'élément tangent à l'absolu en M ; si r_1 et r_2 sont nuls, la série f se compose de deux cercles coïncidents de rayon nul.

Tout ce que nous venons de dire est facile à vérifier directement et devient intuitif comme application des théories de la Géométrie quaternaire. On remarquera que, lorsque la série orientée f a un élément double ou cuspidal n'appartenant pas à l'absolu, notion que rendra claire l'étude de la Géométrie quaternaire, la série quartique ordinaire, déterminée par f, a de même un élément double ou cuspidal; si la série f a un élément double ou cuspidal appartenant à l'absolu, la série quartique déterminée par f est des espèces (B') ou (E') du n° 359, l'élément double spécial coïncidant avec celui de f. D'ailleurs, dans le cas où la série f_1 est bitangente à l'absolu, la série f est elle-même bitangente à l'absolu, et seulement dans ce cas.

419. Si, d'une façon générale, A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 sont des fonctions

linéaires de a_1, a_2, a_3, a_4, l'équation d'une série orientée du second degré peut s'écrire

$$f(A'_1, A'_2, A'_3, A'_4) = 0,$$

f étant une forme quadratique, et peut être interprétée de la façon suivante : si l'on considère l'élément (A'), de coordonnées ordinaires (a), et un élément tangent au cercle $A'_i = 0$ contenant (A'), en désignant par t_i la distance de (A') à l'élément de contact de cet élément tangent, et par φ'_i le coefficient de a_4 dans la fonction linéaire A'_i, on a, en supposant toujours $2im = 1$,

$$2\sin^2\frac{t_i}{2} = \frac{A'_i}{\varphi'_i\sqrt{-F_{a^2}}};$$

l'équation de la série f peut donc être regardée comme établissant une relation quadratique entre les carrés des sinus des moitiés des distances t'_1, t'_2, t'_3, t'_4 ; et réciproquement.

Si le cercle $A'_i = 0$ est de rayon nul, t_i est la distance de l'élément (A') au centre de ce cercle; si ce même cercle se réduit à une série linéaire de coordonnées (ξ'), on a, en appelant t_i la distance de (A'_i) à cette série

$$\sin t_i = \frac{-A'_i\sqrt{D}}{\sqrt{-F_{a^2}}\sqrt{-\Phi_{\xi'^2}}},$$

et ce qui vient d'être dit subit une modification évidente; il en est de même si le cercle $A'_i = 0$ est l'absolu, puisque alors

$$1 = \frac{A'_i}{\varphi'_i\sqrt{-F_{a^2}}}.$$

L'équation de f peut, par exemple, être ramenée à la forme

$$A'_1 A'_2 - A'_3 A'_4 = 0$$

et l'on a, par suite en général, une relation telle que

$$\sin\frac{t_1}{2}\,\sin\frac{t_2}{2} = k\sin\frac{t_3}{2}\,\sin\frac{t_4}{2},$$

k étant une constante, pour définir cette série f.

On remarquera que cette même forme, qui peut être obtenue d'une infinité de façons, permettra de transporter immédiatement aux séries f, avec traduction convenable, les propriétés des géné-

ratrices rectilignes des quadriques dans l'espace ordinaire; mais nous n'insisterons pas sur ce point.

420. Supposons, en particulier, ce que l'on peut toujours faire en profitant de la relation qui relie les coordonnées (X') d'un élément quelconque, que la forme f ne dépende que de trois variables X'_1, X'_2, X'_3 : on aura alors de nouvelles propositions faciles à énoncer.

Si l'on a plus particulièrement

$$f = X'^2_1 - X'_2 X'_3,$$

d'où

$$\sin^2\frac{t_1}{2} - k\sin\frac{t_2}{2}\sin\frac{t_3}{2},$$

on voit que les cercles $X'_2 = 0$ et $X'_3 = 0$ sont bitangents à f appartenant à un même système, leurs éléments de contact avec f appartenant au cercle $X'_1 = 0$. D'ailleurs, tous les cercles bitangents à f, du même système, sont donnés par l'équation

$$\rho_1^2 X'_2 + 2\rho_1\rho_2 X'_1 + \rho_2^2 X'_3 = 0,$$

ρ_1 et ρ_2 étant des paramètres variables; ils appartiennent au réseau (X'_1, X'_2, X'_3). Il est évident que deux cercles quelconques bitangents à f de ce système ont leurs éléments de contact avec f appartenant à un même cercle du réseau; et réciproquement, tout cercle du réseau détermine par ses quatre éléments communs avec f, associés convenablement deux par deux, deux cercles bitangents à f. On est ici ramené aux propriétés des séries quartiques ordinaires.

On peut aussi, $X'_1 = 0$, $X'_2 = 0$, $X'_3 = 0$ étant trois cercles d'un même système bitangents à f, employer l'équation

$$\sqrt{X'_1} + \sqrt{X'_2} + \sqrt{X'_3} = 0,$$

qui donne

$$k_1\sin\frac{t_1}{2} + k_2\sin\frac{t_2}{2} + k_3\sin\frac{t_3}{2} = 0.$$

En particulier, un ou plusieurs des cercles $X'_i = 0$ peuvent être de rayon nul, c'est-à-dire être des foyers d'un même système.

421. Examinons le cas particulier où f est une série quadra-

tique ordinaire. On peut d'abord considérer A'_1, A'_2, A'_3 comme des fonctions linéaires de a_1, a_2, a_3 seulement, et si l'équation de f est alors

$$A'^2_1 - A'_2 A'_3 = 0,$$

on en déduit une relation telle que

$$\sin^2 t_1 = k \sin t_2 \sin t_3;$$

on peut multiplier facilement les remarques analogues.

Si maintenant A'_1, A'_2, A'_3 peuvent aussi contenir a_4, l'équation $A'^2_1 - A'_2 A'_3 = 0$ conduit aux mêmes conséquences qu'au numéro précédent. Plus particulièrement, on peut supposer que le cercle $A'_1 = 0$ est l'absolu; alors $A'_2 = 0$ et $A'_3 = 0$ sont deux séries linéaires contenant chacune deux éléments communs à f et à l'absolu, et l'on a simplement

$$\sin t_2 \sin t_3 = k.$$

On peut employer aussi, avec les mêmes conséquences, l'équation

$$\sqrt{A'_1} + \sqrt{A'_2} + \sqrt{A'_3} = 0$$

du numéro précédent.

Ici l'on peut supposer, ce que nous allons faire, que

$$A'_2 = h(\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \mu_3 a_3 + \mu_4 a_4),$$
$$A'_3 = h'[-(\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \mu_3 a_3) + \mu_4 a_4],$$
$$A'_1 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \lambda_4 a_4.$$

Si alors on emploie la forme $A'^2_1 - A'_2 A'_3 = 0$, il faut $\lambda_4 = 0$, pour que cette équation représente une série quadratique ordinaire, et en remarquant que $\sin^2 \frac{t_3}{2} = \cos^2 \frac{t_2}{2}$, on a simplement

$$\sin t_2 = k \sin t_1;$$

la série linéaire $A'_1 = 0$ contient d'ailleurs les éléments de contact avec f du cercle $A'_2 = 0$ ou $A'_3 = 0$.

Ceci s'applique en particulier si $A'_2 = 0$ est un foyer de f.

Si maintenant on emploie la forme

$$\sqrt{A'_1} + \sqrt{A'_2} + \sqrt{A'_3} = 0,$$

il faudra avoir

$$\lambda_4 - (h + h')\mu_4 = 0.$$

D'ailleurs, ici

$$\sin\frac{t_1}{2}\sqrt{\lambda_4} + \sin\frac{t_2}{2}\sqrt{h\mu_4} + \cos\frac{t_2}{2}\sqrt{h'\mu_4} = 0,$$

et l'on voit que l'on peut écrire encore

$$t_1 \pm t_2 = \text{const.}$$

Ceci s'appliquera en particulier aux foyers.

Nous avons ainsi retrouvé presque toutes les propriétés métriques fondamentales des séries quadratiques ordinaires sur la sphère. Celles que nous n'avons pas signalées sont pour ainsi dire immédiates. On n'oubliera pas d'ailleurs que les séries quadratiques ordinaires ont leurs séries tangentielles de même nature, et que par suite on pourrait sans peine énoncer à leur sujet de nouvelles propriétés semblables aux précédentes, qui seraient d'ailleurs des cas particuliers des propriétés plus générales des séries orientées de seconde espèce et du second degré.



CHAPITRE XVI.

LA GÉOMÉTRIE MÉTRIQUE TERNAIRE SPÉCIALE.

I. — Définitions et formules générales.

422. La Géométrie métrique ternaire spéciale diffère de la Géométrie générale en ce que l'on suppose que le discriminant de la forme F qui définit l'absolu est nul. En gardant les notations du Chapitre précédent, nous supposerons donc que F se décompose en un produit de deux facteurs distincts

$$F = 2(\varphi \mid x)(\varphi' \mid x),$$

et par suite la forme Φ sera un carré parfait $(g \mid \xi)^2$. (g) est l'élément double de F, et l'on a

$$\Phi_{11} = g_1^2 = -(\varphi_2\varphi'_3 - \varphi_3\varphi'_2)^2, \ldots,$$
$$\Phi_{23} = g_2 g_3 = -(\varphi_3\varphi'_1 - \varphi_1\varphi'_3)(\varphi_1\varphi'_2 - \varphi_2\varphi'_1), \ldots.$$

On pourrait tout aussi bien se donner la forme Φ à déterminant nul, mais il n'y aurait qu'à échanger les éléments de première et de seconde espèce pour être ramené au cas précédent.

Enfin, remarquons qu'il n'y aurait pas d'intérêt à supposer que F fût carré parfait, Φ devenant alors une forme identiquement nulle.

423. Rien n'est à changer à la définition de la distance de deux éléments de première espèce (y) et (z); les mêmes remarques subsistent, et l'on a

$$\cos\frac{\overline{yz}}{2im} = \frac{F_{yz}}{\sqrt{F_{y^2}F_{z^2}}}, \qquad \sin\frac{\overline{yz}}{2im} = \frac{\sqrt{(gyz)^2}}{\sqrt{F_{y^2}F_{z^2}}}.$$

Quant aux éléments de seconde espèce, on obtient leur distance en faisant comme au n° 126 un passage à la limite; si D tendant

vers zéro, μ augmente de façon que le produit $-2\mu\sqrt{-D}$ tende vers une limite λ, on obtient

$$\overline{\eta\zeta} = \frac{\lambda\sqrt{F_{(\eta\zeta)^2}}}{\Phi_{\eta\zeta}}.$$

Cette distance est encore celle qui est définie en Géométrie métrique binaire spéciale pour l'espace $(\eta\zeta)$, les éléments absolus de cet espace étant confondus avec celui qui est déterminé par (g) et $(\eta\zeta)$.

Pour avoir plus de précision, nous orienterons un élément de première espèce (y) en donnant une détermination fixe à $\sqrt{F_{y^2}}$, et un élément de seconde espèce (η) en prenant $\sqrt{\Phi_{\eta^2}} = (g \mid \eta)$.

Nous écrirons alors

$$\cos\frac{\overline{yz}}{2im} = \frac{F_{yz}}{\sqrt{F_{y^2}}\sqrt{F_{z^2}}}, \qquad \sin\frac{\overline{yz}}{2im} = \frac{(gyz)}{\sqrt{F_{y^2}}\sqrt{F_{z^2}}};$$

puis, en appelant (x) l'élément $(\eta\zeta)$, de sorte que

$$\frac{(\eta\zeta)_1}{x_1} = \frac{(\eta\zeta)_2}{x_2} = \frac{(\eta\zeta)_3}{x_3} = (\eta\zeta),$$

nous aurons

$$\overline{\eta\zeta} = \frac{\lambda(\eta\zeta)\sqrt{F_{x^2}}}{\Phi_{\eta\zeta}}.$$

Si (ξ), (η), (ζ) sont orientés et appartiennent à un même élément orienté, on a

$$\overline{\eta\zeta} + \overline{\zeta\xi} + \overline{\xi\eta} = 0.$$

La distance $\overline{\eta\zeta}$ est nulle quand (η) et (ζ) coïncident, ou bien si $(\eta\zeta)$ appartient à l'absolu; elle est infinie si l'un des éléments (η) ou (ζ) contient (g); elle est indéterminée si (η) et (ζ) contiennent (g), ou bien si l'un des éléments (η) et (ζ) appartient à l'absolu.

Deux éléments de première espèce sont perpendiculaires quand ils sont conjugués par rapport à l'absolu; il n'y a pas d'éléments de seconde espèce perpendiculaires; les éléments normaux subsistent.

Deux éléments (y) et (z) sont *parallèles* quand (yz) contient g; leur distance est nulle à un multiple près de $2im\pi$.

Il n'y a pas lieu d'envisager la distance $\overline{y\zeta}$ d'un élément de première espèce à un de seconde. Mais on peut définir la distance $\overline{\zeta y}$ de (ζ) à (y); si (z) est perpendiculaire à (y) et appartient à (ζ), la distance $\overline{\zeta y}$ est celle de (ζ) à (yz). On trouve sans peine

$$\overline{\zeta y} = \frac{\lambda(\zeta\,|\,y)}{(g\,|\,\zeta)\sqrt{F_{y^2}}}.$$

Cette distance est nulle pour $(\zeta\,|\,y) = 0$; infinie quand (ζ) contient (g), ou bien que (y) appartient à l'absolu; indéterminée quand on se trouve à la fois dans les deux cas précédents.

On fera des remarques analogues à celles du n° 373, sur l'interprétation métrique des équations.

L'étendue d'une suite de n éléments a toujours la même définition. Mais l'on voit que l'étendue d'une suite triple de première espèce est toujours nulle, à un multiple près de $4im\pi$, d'après les formules du n° 374 : c'est un théorème fondamental.

Mais si l'on fait en général $\frac{S}{2im} \times \frac{4}{\mu^2} = S'$, un passage à la limite analogue à celui que nous avons déjà fait donne

$$S' = \lambda^2 \frac{(\xi\eta\zeta)}{2(g\,|\,\xi)(g\,|\,\eta)(g\,|\,\zeta)} = \lambda^2 \frac{(xyz)^2}{2(gyz)(gzx)(gxy)},$$

en remplaçant $(\xi\eta\zeta)$ par $(xyz)^2$ et les quantités $\sqrt{\Phi_{\xi^2}}, \ldots, \Phi_{\eta\zeta}, \ldots,$ par leurs valeurs.

Cette quantité S' est la *surface* de la suite triple (x), (y), (z); cette notion s'étend immédiatement à une suite de n éléments.

L'étendue de la suite (ξ), (η), (ζ) est

$$\Sigma = \lambda\left(\frac{\sqrt{F_{(\eta\zeta)^2}}}{\Phi_{\eta\zeta}} + \frac{\sqrt{F_{(\zeta\xi)^2}}}{\Phi_{\zeta\xi}} + \frac{\sqrt{F_{(\xi\eta)^2}}}{\Phi_{\xi\eta}}\right)$$

ou, en introduisant les éléments (x), (y), (z) de la suite équivalente

$$\Sigma = \lambda\,\frac{(gyz)\sqrt{F_{x^2}} + (gzx)\sqrt{F_{y^2}} + (gxy)\sqrt{F_{z^2}}}{(gyz)(gzx)(gxy)}.$$

424. Si les éléments fondamentaux n'appartiennent pas à l'ab-

solu, soit

$$F = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\cos\theta_1 x_2 x_3 + 2\cos\theta_2 x_3 x_1 + 2\cos\theta_3 x_1 x_2,$$

et supposons $m = \frac{1}{2i}$. Nous orienterons les éléments fondamentaux en faisant, pour O_i, $x_i = 1$ et $\sqrt{F_{x^2}} = 1$; de sorte que

$$\cos\overline{O_2 O_3} = \theta_1, \qquad \cos\overline{O_3 O_1} = \theta_2, \qquad \cos\overline{O_1 O_2} = \theta_3.$$

On a aussi

$$0 = D = 1 + 2\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3 - \cos^2\theta_1 - \cos^2\theta_2 - \cos^2\theta_3$$
$$= 4\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{2}\sin\frac{-\theta_1+\theta_2+\theta_3}{2}\sin\frac{\theta_1-\theta_2+\theta_3}{2}\sin\frac{\theta_1+\theta_2-\theta_3}{2},$$

et avec l'hypothèse $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0 \pmod{2\pi}$,

$$\Phi = (\sin\theta_1\xi_1 + \sin\theta_2\xi_2 + \sin\theta_3\xi_3)^2,$$

de sorte que nous prendrons

$$(g \mid \xi) = \sin\theta_1\xi_1 + \sin\theta_2\xi_2 + \sin\theta_3\xi_3.$$

Dans ces conditions, on peut considérer θ_1, θ_2, θ_3 comme les distances $\overline{O_2 O_3}$, $\overline{O_3 O_1}$, $\overline{O_1 O_2}$.

On a

$$\overline{\Omega_2\Omega_3} = \frac{\lambda}{\sin\theta_2\sin\theta_3},$$

et, par suite,

$$\frac{\overline{\Omega_2\Omega_3}}{\sin\theta_1} = \frac{\overline{\Omega_3\Omega_1}}{\sin\theta_2} = \frac{\overline{\Omega_1\Omega_2}}{\sin\theta_3} = \frac{\lambda}{\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3}.$$

Ici

$$S' = \frac{\lambda^2}{2\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3};$$

et aussi

$$\overline{\Omega_1 O_1} = \frac{\lambda}{\sin\theta_1},$$

d'où

$$S' = \frac{1}{2}\overline{\Omega_2\Omega_3}.\overline{\Omega_1 O_1};$$

et ainsi de suite.

On peut supposer que l'élément fondamental O_1 coïncide avec (g), et l'on peut alors écrire

$$F = x_2^2 + x_3^2 + 2\cos\theta_1 x_2 x_3,$$

avec

$$g = \sin\theta_1 \xi_1;$$

θ_1 est ici la distance $\overline{O_2 O_3}$, si l'on veut.

En particulier, on peut prendre $\theta_1 = 0$.

Enfin, supposons que Ω_2 et Ω_3 forment l'absolu, de sorte que

$$F = 2x_2 x_3,$$
$$(g \mid \xi) = i\xi_1;$$

Ω_1 reste arbitraire et l'on a des formules simples.

On fera les mêmes remarques qu'au n° 375, sur l'interprétation des rapports des coordonnées.

425. Il est clair que si l'on considère l'espace E comme un plan dont les éléments de première espèce sont les droites, et ceux de seconde espèce, les points, la théorie que nous venons de développer coïncide avec celle des angles et des distances dans cet espace, à la condition de remplacer la distance de deux droites par leur angle et de prendre, comme absolu, les deux points circulaires à l'infini.

Il serait facile, d'ailleurs, de retrouver de cette façon toutes les formules de la Géométrie plane et, en particulier, de la Trigonométrie rectiligne et de la Géométrie du triangle.

Examinons seulement les propositions qui correspondent à celles du n° 376.

L'élément P_1 perpendiculaire à O_1 et contenant Ω_1 est

$$\xi_2 \cos\theta_2 - \xi_3 \cos\theta_3 = 0,$$

en conservant les premières hypothèses du numéro précédent; les trois éléments P_i sont alignés.

On peut répéter ce qui a été dit sur les milieux des distances telles que $\overline{O_2 O_3}$. Mais la distance $\overline{\Omega_2 \Omega_3}$ a un seul milieu, conjugué harmonique de $(O_1 g)$ par rapport à Ω_2 et Ω_3; les trois milieux analogues ont des propriétés immédiates résultant facilement de la considération du cas général.

Enfin nous pouvons répéter cette remarque générale, que les théorèmes de la Géométrie métrique spéciale correspondent à des propriétés plus générales de la Géométrie projective, faciles à énoncer.

II. — Les substitutions linéaires au point de vue métrique spécial.

426. La distance de deux éléments quelconques ne change pas quand on fait un changement de coordonnées ou une transformation homographique quelconque, à la condition que, dans le dernier cas, le nouvel absolu soit l'ancien transformé, et que, dans tous les cas, la constante m ne change pas, tandis que la constante λ devient $\lambda\delta$, δ désignant le déterminant de la substitution faite sur les (x).

Transformons maintenant les éléments de l'espace E par une homographie quelconque σ

$$x_i = \lambda_i x'_1 + \mu_i x'_2 + \nu_i x'_3,$$

les (x') étant rapportés aux mêmes coordonnées que les (x), et laissons l'absolu invariable, ainsi que les constantes m et λ.

On peut rechercher les homographies σ telles que la distance de deux éléments de première espèce soit égale à celle des deux éléments correspondants, au degré près d'indétermination qui se présente toujours quand il s'agit de telles distances; telles aussi que la distance de deux éléments de seconde espèce soit égale, à un facteur constant près, à celle des deux éléments correspondants.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que la substitution σ transforme l'absolu en lui-même.

Pour obtenir des formules simples, soient

$$F = 2x_2x_3. \qquad (g|\xi) = i\xi_1;$$

on trouve alors deux séries de substitutions σ, savoir les substitutions σ'

$$x_1 = \omega_1 x'_1 + \omega'_1 x'_2 + \omega''_1 x'_3,$$
$$x_2 = \omega_2 x'_2,$$
$$x_3 = \omega_3 x'_3,$$

et les substitutions σ''

$$x_1 = \omega_1 x'_1 + \omega'_1 x'_2 + \omega''_1 x'_3,$$
$$x_2 = \omega'_2 x'_3,$$
$$x_3 = \omega'_3 x'_2.$$

Le déterminant $(\lambda\mu\nu)$ est égal, suivant le cas, à $\omega_1\omega_2\omega_3$ ou à $-\omega_1\omega'_2\omega'_3$.

Si (x) et (x') sont correspondants, on a

$$F_{x^2} = \omega_2\omega_3 F_{x'^2} \qquad \text{ou} \qquad F_{x^2} = \omega_2\omega'_3 F_{x'^2},$$

suivant le cas; et de même $(g|\xi') = \omega_1(g|\xi)$, dans tous les cas.

Si F était donnée sous une forme quelconque, on procéderait comme au n° 378 pour obtenir la forme des substitutions σ' et σ''. Ainsi pour $F = x_2^2 + x_3^2$, on trouvera les substitutions σ' sous la forme

$$x_1 = \omega_1 x'_1 - \frac{i}{\sqrt{2}}(\omega'_1 + \omega''_1)x'_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega'_1 - \omega''_1)x'_3,$$

$$x_2 = \frac{\omega_2 + \omega_3}{2}x'_2 + \frac{i(\omega_2 - \omega_3)}{2}x'_3,$$

$$x_3 = -\frac{i(\omega_2 - \omega_3)}{2}x'_2 + \frac{\omega_2 + \omega_3}{2}x'_3.$$

427. Les substitutions σ' donnent, en choisissant une détermination fixe pour $\sqrt{\omega_2\omega_3}$ et définissant l'orientation de (x') par $\sqrt{F_{x^2}} = \sqrt{\omega_2\omega_3}\sqrt{F_{x'^2}}$, les formules

$$\overline{y'z'} \equiv \overline{yz} \pmod{4im\pi}, \qquad \overline{\eta'\zeta'} = \frac{\sqrt{\omega_2\omega_3}}{\omega_1}\overline{\eta\zeta};$$

ces substitutions transforment les éléments (φ) et (φ') de l'absolu en eux-mêmes, respectivement.

Les substitutions σ'', au contraire, échangent entre eux les deux éléments de l'absolu, et donnent

$$\overline{y'z'} \equiv -\overline{yz} \pmod{4im\pi}, \qquad \overline{\eta'\zeta'} = \frac{-\sqrt{\omega'_2\omega'_3}}{\omega_1}\overline{\eta\zeta},$$

en prenant $\sqrt{F_{x^2}} = \sqrt{\omega'_2\omega'_3}\sqrt{F_{x'^2}}$, pour déterminer les orientations des éléments correspondants (x) et (x').

Les substitutions σ' sont les *similitudes* proprement dites, et les substitutions σ'' sont les *similitudes symétriques*.

Dans tous les cas le rapport constant $r = \dfrac{\overline{\eta'\zeta'}}{\overline{\eta\zeta}}$ est dit *rapport de similitude* pour la substitution σ.

Envisageons d'abord les similitudes : les invariants correspondants sont, avec les notations du n° 206,

$$i = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3, \qquad j = \omega_2\omega_3 + \omega_3\omega_1 + \omega_1\omega_2, \qquad d = \omega_1\omega_2\omega_3,$$

et cela quelle que soit la forme F, si l'on a appliqué ce qui a été dit plus haut; ω_1, ω_2, ω_3 sont donc eux-mêmes des invariants. L'équation en ρ a les trois racines ω_1, ω_2, ω_3, que nous supposons d'abord distinctes. A la racine ω_1 correspond l'élément double (g) ou O_1, et un élément double de seconde espèce d'équation

$$x_1 + \frac{\omega'_1}{\omega_1 - \omega_2} x_2 + \frac{\omega''_1}{\omega_1 - \omega_3} x_3 = 0;$$

on peut le choisir pour Ω_1, et ceci revient à supposer $\omega'_1 = \omega''_1 = 0$.

Alors les éléments doubles sont, d'une façon générale, les six éléments fondamentaux.

D'après une propriété générale des homographies, la distance $\overline{(\Omega_1\xi)(\Omega_1\xi')}$ est constante, (ξ) et (ξ') étant deux éléments correspondants : on a

$$\cos\frac{\overline{(\Omega_1\xi)(\Omega_1\xi')}}{2im} = \frac{\omega_2+\omega_3}{2\sqrt{\omega_2\omega_3}}, \qquad \sin\frac{\overline{(\Omega_1\xi)(\Omega_1\xi')}}{2im} = \frac{i(\omega_3-\omega_2)}{2\sqrt{\omega_2\omega_3}},$$

et ces formules sont générales.

Le rapport de similitude est $r = \dfrac{\sqrt{\omega_2\omega_3}}{\omega_1}$.

Quand on a $\omega_2 = \omega_3$, il y a nécessairement homologie; ce qui précède subsiste, mais tous les éléments de O_1 et Ω_1 sont doubles; on dit que l'homographie σ' est une *homothétie;* le rapport de similitude est toujours $\dfrac{\sqrt{\omega_2\omega_3}}{\omega_1}$.

Dans ces deux cas, quand le rapport de similitude est égal à ± 1, on dit qu'il y a *rotation*, et une rotation est un *mouvement*. Quand l'homographie σ' est à la fois une homothétie et une rotation, c'est une homologie involutive, à moins qu'elle ne se réduise à la substitution identique.

Les cas limites du cas général, obtenus en supposant $\omega_1 = \omega_2$ ou $\omega_1 = \omega_3$, sont peu intéressants.

Si enfin on a $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$, ω'_1 et ω''_1 n'étant pas tous deux nuls, il existe une infinité d'éléments (x) doubles, définis par

$$\omega'_1 x_2 + \omega''_1 x_3 = 0,$$

et une infinité d'éléments (ξ) doubles définis par $\xi_1 = 0$. Si (ξ)

et (ξ') sont correspondants, $(\xi\xi')$ contient l'élément défini par $\omega'_1 x_2 + \omega''_1 x_3 = 0$ appartenant à g, et l'on a

$$\overline{\xi\xi'} = \lambda i \frac{\sqrt{2\omega'_1 \omega''_1}}{\omega_1} = \text{const.}$$

On dit qu'il y a *translation;* une translation est aussi un *mouvement.*

Les mouvements sont caractérisés par la relation

$$\omega_1^2 - \omega_2 \omega_3 = 0.$$

Une translation peut aussi être considérée comme une homothétie spéciale.

428. Pour étudier les similitudes symétriques, remarquons qu'une telle substitution σ'' se ramène à une similitude proprement dite quand on la compose avec une substitution particulière, dite *symétrie,* et de la forme

$$x_1 = x'_1, \qquad x_2 = x'_3, \qquad x_3 = x'_2.$$

C'est une homologie involutive dont les éléments doubles sont d'abord celui de coordonnées $x_1 = 0$, $x_2 + x_3 = 0$, puis tous ceux de l'élément $x_2 - x_3 = 0$.

Si (ξ) et (ξ') sont correspondants, $(\xi\xi')$ est perpendiculaire au premier élément double, et le milieu de $(\xi\xi')$ appartient à ce même élément double.

En général, une substitution σ'' sera une symétrie dès qu'elle se ramènera à une homologie involutive, et, par suite, qu'on aura

$$\omega_1^2 - \omega'_2 \omega'_3 = 0 \qquad \text{et} \qquad \omega_1 \omega''_1 + \omega'_2 \omega'_1 = 0.$$

Nous n'insisterons pas davantage sur les propriétés des différentes substitutions que nous venons de reconnaître; la Géométrie ordinaire les met suffisamment en évidence, et leur vérification directe n'offre aucune difficulté.

Remarquons encore que l'on pourrait définir d'autres substitutions intéressantes, par exemple celles qui conservent l'un des éléments de l'absolu; ou qui changent l'un de ces éléments dans l'autre; ou encore qui conservent l'élément double (g) de l'absolu : ces dernières sont les *affinités,* et leur forme générale est immédiate; leurs propriétés sont connues.

429. Les similitudes forment évidemment un groupe à cinq paramètres. La loi de composition de deux similitudes se trouve sans peine, et l'on en déduit en particulier que le rapport de similitude résultant est égal au produit des rapports de similitude composants, au signe près.

Deux similitudes symétriques consécutives équivalent à une similitude proprement dite.

Les homothéties forment un groupe à quatre paramètres; il en est de même des mouvements; enfin, les translations forment un groupe à trois paramètres, contenu dans celui des homothéties et dans celui des mouvements, ceux-ci étant eux-mêmes contenus dans celui des similitudes.

On peut, pour les différents groupes que nous venons d'énumérer, construire des invariants absolus d'un système ternaire S quelconque.

Les équations aux dérivées partielles formant un système complet, qui caractérisent ces invariants, seront toujours faciles à former en se servant des substitutions infinitésimales des différents groupes considérés.

Faisant $F = 2x_1x_2$, comme plus haut, et gardant les notations du Chapitre I, ces équations seront :

Pour les similitudes

$$\Delta_{11}F = 0, \qquad \Delta_{22}F = 0, \qquad \Delta_{33}F = 0, \qquad \Delta_{12}F = 0, \qquad \Delta_{13}F = 0;$$

Pour les homothéties

$$\Delta_{11}F = 0, \qquad \Delta_{22}F + \Delta_{33}F = 0, \qquad \Delta_{12}F = 0, \qquad \Delta_{13}F = 0;$$

Pour les mouvements

$$\Delta_{11}F + 2\Delta_{22}F = 0, \qquad \Delta_{11}F + 2\Delta_{33}F = 0, \qquad \Delta_{12}F = 0, \qquad \Delta_{13}F = 0;$$

Pour les translations

$$\Delta_{11}F + \Delta_{22}F + \Delta_{33}F = 0, \qquad \Delta_{12}F = 0, \qquad \Delta_{13}F = 0.$$

On pourra aussi, quand il s'agit des similitudes, procéder d'une façon plus générale, identique à celle qui a été indiquée au n° 381. Mais, dans ce cas, on trouve cinq équations et non plus quatre seulement, en vertu de la décomposition de l'absolu.

Dans le cas des homothéties, on pourra de même former un

système S_2, composé du système S_1, des coefficients de l'absolu, et des coefficients (ξ) d'un élément fixe quelconque (ξ) contenant l'élément double (g) de l'absolu. Les invariants absolus ordinaires de ce système S_2, qui sont homogènes et de degré zéro par rapport aux coefficients de l'absolu et aussi par rapport aux (ξ), seront les invariants absolus des homothéties. Les équations qui les déterminent seront formées comme au n° 381.

Dans le cas des mouvements, on remarquera que si (ξ) est l'élément double autre que les éléments de l'absolu, le mouvement ne change pas la série définie par la forme $F + (\xi \mid x)^2$. En adjoignant les coefficients (ξ) au système S, ainsi que les coefficients de F, les invariants absolus ordinaires du système ainsi formé, qui sont homogènes des degrés p et q par rapport aux coefficients F et aux (ξ), avec la condition $2p + q = 0$, seront les invariants absolus du groupe de rotations ayant même élément double (ξ); en considérant (ξ) comme arbitraire, on aura les équations des invariants absolus du groupe des mouvements immédiatement.

Un procédé analogue servira pour les translations.

On fera, sur les différents invariants absolus métriques que nous venons de signaler, les mêmes remarques qu'en Géométrie binaire.

On aurait d'ailleurs pu employer en Géométrie binaire des procédés de formation analogues aux précédents, pour les divers invariants absolus métriques.

430. Envisageons maintenant les invariants métriques non absolus. Pour les similitudes, ils vérifieront les équations

$$\Delta_{11} F = \mu_1 F, \qquad \Delta_{22} F = \mu_2 F, \qquad \Delta_{33} F = \mu_3 F, \qquad \Delta_{12} F = 0, \qquad \Delta_{13} F = 0,$$

μ_1, μ_2, μ_3 étant trois constantes quelconques, et se reproduiront multipliés par $\omega_1^{\mu_1}\omega_2^{\mu_2}\omega_3^{\mu_3}$: on a gardé ici $2x_2x_3 = 0$ pour équation de l'absolu.

D'une façon générale, on pourra obtenir tous ces invariants en formant d'abord les invariants ordinaires relatifs au système S auquel on a adjoint les coefficients de l'absolu, qui sont homogènes et de degré zéro par rapport à ces derniers coefficients; puis en adjoignant à ces invariants les premiers membres des

équations des éléments de l'absolu, séparément, ou deux autres invariants de même origine, si les (x) ne figurent pas dans le système S.

Dans le cas des homothéties, on aura

$$\Delta_{11}F = \mu_1 F, \qquad \Delta_{22}F + \Delta_{33}F = \mu_2 F, \qquad \Delta_{12}F = 0, \qquad \Delta_{13}F = 0,$$

μ_1 et μ_2 étant deux constantes. Ils se reproduisent multipliés par $\omega_1^{\mu_1}\omega_2^{\mu_2}$. On les obtient comme dans le cas précédent.

Pour les mouvements, on a

$$\Delta_{11}F + 2\Delta_{22}F = \mu_2 F, \qquad \Delta_{11}F + 2\Delta_{33}F = \mu_3 F, \qquad \Delta_{12}F = 0, \qquad \Delta_{13}F = 0,$$

μ_2 et μ_3 étant deux constantes. Ils se reproduisent multipliés par $\omega_2^{\frac{\mu_2}{2}}\omega_3^{\frac{\mu_3}{2}}$, et sont obtenus comme les précédents.

Enfin, pour les translations, on a

$$\Delta_{11}F + \Delta_{22}F + \Delta_{33}F = \mu F, \qquad \Delta_{12}F = \mu' F, \qquad \Delta_{13}F = \mu'' F;$$

ils se reproduisent multipliées par $\omega_1^{\mu} e^{\frac{\mu'\omega'_1 + \mu''\omega''_1}{\omega_1}}$, e désignant la base des logarithmes népériens. Pour les obtenir on adjoindra, par exemple, aux invariants des similitudes, les deux invariants $e^{\frac{\xi_2}{\xi_1}}$, $e^{\frac{\xi_3}{\xi_1}}$.

Les particularités relatives à ces divers invariants seront laissées ici de côté, malgré l'intérêt qu'elles peuvent présenter. Il sera d'ailleurs facile de leur étendre la plupart des propositions relatives aux invariants ordinaires en général.

III. — Les cercles.

431. Comme au Chapitre précédent, une série quadratique de première espèce bitangente à l'absolu, d'équation

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)^2 + \alpha_4^2 F_{x^2} = 0,$$

peut se dédoubler en deux séries orientées; l'une d'elles a pour équation

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 \sqrt{-F_{x^2}} = 0;$$

c'est un *cercle* C_α, dont les coordonnées sont les (α).

Les séries linéaires sont des cercles particuliers pour lesquels $\alpha_4 = 0$; l'absolu est aussi un cercle particulier.

Le discriminant du cercle C_α est celui de la forme quadratique $(\alpha|x)^2 + \alpha_4^2 F_{x^2}$, soit $\alpha_4^4 (g|\alpha)^2$. Si $(g|\alpha) = 0$, le cercle se compose de deux éléments contenant (g), à éléments orientés; si en outre $\alpha_4 = 0$, ces deux éléments sont confondus.

La série tangentielle de $(\alpha|x)^2 + \alpha_4^2 F_{x^2} = 0$ est ici, au facteur α_4^2 près,

$$F_{(\alpha\xi)^2} + \alpha_4^2 (g|\xi)^2 = 0;$$

c'est une série de seconde espèce dont deux éléments sont ceux de l'absolu, et que nous appellerons un *cycle*.

Les cycles ne sont pas susceptibles d'orientation : le même cycle équivaut à deux cercles.

Quand $\alpha_4 = 0$, le cycle se réduit aux deux éléments communs à C_α et à l'absolu; si $(g|\alpha) = 0$, le cycle représente (g) deux fois.

432. On peut considérer directement un cycle sous la forme suivante, où l'on suppose $F = 2(\varphi|x)(\varphi'|x)$ et où (λ) désigne un élément arbitraire

$$2a_1(\varphi\lambda\xi)(\varphi'\lambda\xi) + 2a_2(\varphi\lambda\xi)(\varphi\varphi'\xi) + 2a_3(\varphi'\lambda\xi)(\varphi\varphi'\xi) + a_4(\varphi\varphi'\xi)^2 = 0;$$

les (a) sont alors les coordonnées du cycle, désigné par Γ_a.

L'équation du cycle Γ_a équivalent au cercle C_α peut s'écrire

$$\begin{aligned} &2(\varphi\varphi'\alpha)(\varphi\lambda\xi)(\varphi'\lambda\xi) + 2(\varphi'\alpha\lambda)(\varphi\lambda\xi)(\varphi\varphi'\xi) \\ &\quad + 2(\varphi\alpha\lambda)(\varphi'\lambda\xi)(\varphi\varphi'\xi) + \frac{2(\varphi\alpha\lambda)(\varphi'\alpha\lambda) - \alpha_4^2(\varphi\varphi'\lambda)^2}{(\varphi\varphi'\alpha)}(\varphi\varphi'\xi)^2 = 0, \end{aligned}$$

et, par suite, la correspondance entre les coordonnées (α) et (a) peut être établie par les formules

$$a_1 = \rho(\varphi\varphi'\alpha), \qquad a_2 = \rho(\varphi'\alpha\lambda), \qquad a_3 = \rho(\varphi\alpha\lambda),$$

$$a_4 = \rho\,\frac{2(\varphi\alpha\lambda)(\varphi'\alpha\lambda) - \alpha_4^2(\varphi\varphi'\lambda)^2}{(\varphi\varphi'\alpha)},$$

ρ étant un paramètre arbitraire; de sorte que a_1, a_2, a_3 sont des fonctions linéaires de α_1, α_2, α_3; et réciproquement.

Les cycles pour lesquels $a_4 = 0$ se décomposent en deux séries linéaires, dont l'une est (g) et l'autre quelconque; le cercle correspondant est un élément double contenant (g), et ne détermine pas le cycle Γ_a.

Si l'on fait $F = -2x_2x_3$, et si l'on prend $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$, on a simplement

$$a_1 = \alpha_1, \qquad a_2 = \alpha_2, \qquad a_3 = \alpha_3, \qquad a_4 = \frac{2\alpha_2\alpha_3 - \alpha_4^2}{\alpha_1},$$

en prenant

$$(\varphi|x) = -x_2, \qquad (\varphi'|x) = x_3,$$

et, par suite

$$(\varphi\varphi'\xi) = -\xi_1, \qquad (\varphi'\lambda\xi) = \xi_2, \qquad (\varphi\lambda\xi) = \xi_3.$$

433. L'équation

$$(\alpha|x) + \alpha_4\sqrt{-F_{x^2}} = 0$$

d'un cercle C_α permet d'écrire

$$\overline{\alpha x} = -\frac{\lambda\alpha_4 i}{(g|\alpha)}.$$

Cette distance constante est le *rayon* du cercle C_α, et l'élément (α) est le *centre* de ce cercle.

On a aussi

$$F_{(\alpha\xi)^2} + \alpha_4^2(g|\xi)^2 = 0,$$

et, par suite,

$$\overline{\alpha\xi} = \pm\lambda\frac{\alpha_4 i}{(g|\alpha)};$$

cette distance est le *rayon* du cycle Γ_a équivalent à C_α, et (α) est aussi le centre de ce cycle.

Le rayon d'un cycle n'est déterminé qu'au signe près; si l'on fixe ce signe, on fixe en même temps le cercle équivalent à ce cycle : c'est ce que nous ferons toujours.

Le rayon est nul pour $\alpha_4 = 0$; le cercle est alors une série linéaire (α) et le cycle équivalent se compose des éléments communs à (α) et à l'absolu.

Le rayon est infini quand $(g|\alpha) = 0$.

Le rayon est encore infini pour les cycles qui correspondent à $a_1 = 0$ et se décomposent comme il a été dit plus haut.

434. Deux cercles C_α et C_β, de rayons r et s, ont deux éléments communs, sur lesquels on fera les mêmes remarques qu'au n° 388.

Leur distance est celle des éléments tangents à ces deux cercles

en un élément commun, et l'on a sans peine

$$\overline{C_\alpha C_\beta} = \frac{\lambda\sqrt{F_{(\alpha\beta)^2} + [\alpha_4(g\,|\,\beta) - \beta_4(g\,|\,\alpha)]^2}}{(g\,|\,\alpha)(g\,|\,\beta)} = \sqrt{\overline{\alpha\beta}^2 - (r-s)^2}.$$

Les deux cycles équivalents Γ_a, Γ_b sont de véritables séries quadratiques ordinaires et ont deux éléments communs, outre ceux de l'absolu. Ces deux éléments communs appartiennent à une série linéaire, facile à déterminer et dont il est inutile d'étudier ici les propriétés bien connues.

La distance des deux cycles, définie toujours de la même façon, est déterminée par

$$\cos\frac{\overline{\Gamma_a\Gamma_b}}{2im} = \frac{F_{(\alpha\beta)^2} + \alpha_4^2(g\,|\,\beta)^2 + \beta_4^2(g\,|\,\alpha)^2}{2\alpha_4\beta_4(g\,|\,\alpha)(g\,|\,\beta)} = \frac{r^2 + s^2 - \overline{\alpha\beta}^2}{2rs}.$$

Introduisons les coordonnées (a) et (b) des cycles Γ_a et Γ_b. Si l'on calcule le discriminant du premier membre de l'équation de Γ_a, considéré comme forme quadratique par rapport à $(\varphi\varphi'\xi)$, $(\varphi\lambda\xi)$, $(\varphi'\lambda\xi)$, on le trouve égal à $a_1(2a_2a_3 - a_1a_4)$.

Appelons alors C_{a^2} la forme quadratique par rapport aux (a), $2a_2a_3 - a_1a_4$; on trouve d'abord

$$r = \lambda\frac{\sqrt{-C_{a^2}}}{a_1(g\,|\,\lambda)},$$

puis

$$\cos\frac{\Gamma_a\Gamma_b}{2im} = \frac{-C_{ab}}{\sqrt{-C_{a^2}}\sqrt{-C_{b^2}}} \quad \text{et} \quad \overline{C_\alpha C_\beta}^2 = \frac{2\lambda^2\left[C_{ab} + \sqrt{-C_{a^2}}\sqrt{-C_{b^2}}\right]}{a_1b_1(g\,|\,\lambda)^2}.$$

Le cercle équivalent à un cycle Γ_a est orienté par le signe de $\sqrt{-C_{a^2}}$.

Quand $C_{ab} = 0$, les deux cycles Γ_a et Γ_b sont *orthogonaux*.

Quand on a

$$\overline{\alpha\beta} = \pm(r-s),$$

on a, à la fois,

$$\overline{C_\alpha C_\beta} = 0, \qquad \cos\frac{\overline{\Gamma_a\Gamma_b}}{2im} = 1,$$

et les deux cercles C_α, C_β sont tangents, ainsi que les deux cycles Γ_a, Γ_b.

Les cas particuliers sont faciles à examiner, comme au Chapitre

précédent, et fournissent des remarques analogues, sur lesquelles il est inutile d'insister.

435. Au sujet de trois cercles, ou trois cycles, on peut répéter ce qui a été dit au n° 390, avec quelques modifications sur certains points.

Soit un réseau de cercles

$$\lambda_1 C_\alpha + \lambda_2 C_\beta + \lambda_3 C_\gamma = 0;$$

ils jouissent tous, à l'exclusion des autres, d'une propriété commune, facile à découvrir; en effet, leurs coordonnées (α) vérifiant une relation linéaire, il en est de même des quantités a_1, a_2, a_3 et $\sqrt{-C_{a^2}}$, qui correspondent aux cycles équivalents: par suite, il est clair qu'il existe un certain cycle spécial, c'est-à-dire composé de (g) et d'un élément linéaire fixe, dont la distance à tous les cycles équivalents aux cercles du réseau est constante. On aurait d'ailleurs pu, manifestement, interpréter d'une façon analogue la propriété commune des cercles d'un réseau en Géométrie métrique générale.

Si (d) est l'élément fixe qui, avec (g), constitue le cycle spécial dont nous venons de parler, tous les éléments tels que $C_{\alpha\beta}$ déterminés par les éléments communs à deux cercles du réseau, contiennent (d).

Le réseau contient un faisceau de séries linéaires qui ont en commun l'élément (d). Parmi les cycles équivalents aux cercles du réseau, se trouvent deux séries de cycles spéciaux; les éléments linéaires, autres que (g), des cycles spéciaux d'une même série, appartiennent à un même élément contenant (g).

Un réseau de cycles

$$\mu_1 \Gamma_a + \mu_2 \Gamma_b + \mu_3 \Gamma_c = 0$$

est formé de cycles orthogonaux à un cycle fixe Γ_d et l'on fera, à ce sujet, les même remarques qu'au n° 390. Mais, de plus, on observera qu'un tel réseau est aussi un réseau de séries quadratiques ordinaires, de seconde espèce, contenant deux éléments fixes, ceux de l'absolu. La jacobienne de ce réseau se compose précisément de (g) et du cycle Γ_d, tandis que la cayleyenne est formée de l'absolu et centre de Γ_d; et l'on pourra appliquer à ce

cas les propriétés générales des réseaux de séries quadratiques.

Des remarques analogues s'appliqueront aux faisceaux de cercles et de cycles; nous ne les développerons pas, observant seulement, qu'à un faisceau de cercles, tels que nous le définissons ici, correspond en Géométrie plane ordinaire, l'ensemble des cercles qui ont, deux à deux, un centre de similitude de même nom fixe; tandis qu'à un faisceau de cycles, correspond ce qu'on appelle d'habitude un *faisceau de cercles*.

On peut répéter relativement aux cycles tout ce qui a été dit au n° 392.

436. Étudions ce que deviennent ici les formules générales des n°s 393 et 394.

D'abord pour deux groupes de trois éléments de première espèce (a), (b), (c); (a'), (b'), (c'), on a tout de suite, à cause de $D = 0$, la formule

$$\left|\cos\overline{aa'}\right|_3 = 0,$$

en employant des notations analogues à celles du n° 393 et faisant $2im = 1$.

Plus généralement,

$$\left|\cos\overline{aa'}\right|_n = 0,$$

pour $n \geqq 3$.

Pour obtenir les formules qui correspondent aux éléments de seconde espèce, nous ferons un passage à la limite, en partant des formules qui conviennent au cas de D non nul.

En rétablissant la constante μ, on a en général

$$\left|\cos\frac{\overline{\alpha\alpha'}}{2i\mu}\right|_4 = 0,$$

ce qui peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} \left|2\sin^2\dfrac{\overline{\alpha\alpha'}}{4i\mu}\right|_4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

or

$$2\sin^2\frac{\overline{\alpha\alpha'}}{4i\mu} = \frac{-\overline{\alpha\alpha'}^2}{8\mu^2} + \dots.$$

et remplaçant $4\mu^2$ par $\frac{-\lambda^2}{D}$, on a

$$2\sin^2\frac{\overline{\alpha\alpha'}}{4i\mu} = \frac{\overline{\alpha\alpha'}^2}{2\lambda^2}D + \ldots;$$

si l'on porte ces valeurs dans l'équation à transformer, puis qu'on égale à zéro le terme du plus bas degré en D, il reste

$$\begin{vmatrix} \left|\overline{\alpha\alpha'}^2\right|_4 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

c'est la relation cherchée entre les distances relatives à deux groupes de quatre éléments de seconde espèce.

On a de même

$$\begin{vmatrix} \left|\overline{\alpha\alpha'}^2\right|_n & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

plus généralement, pour $n \geqq 4$; et l'on en déduit sans peine

$$\begin{vmatrix} \left|\overline{\alpha\alpha'}^2\right|_n & \overline{\alpha\theta}^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

pour $n \geqq 4$, (θ) étant un nouvel élément arbitraire; et aussi

$$\left|\overline{\alpha\alpha'}^2\right|_n = 0$$

pour $n \geqq 5$.

Pour deux groupes de cercles ou cycles, de centres (α), (β), ..., (α'), (β'), ... et de rayons r_α, r_β, ..., $r_{\alpha'}$, $r_{\beta'}$, ... on aura de même

$$\left|\cos\overline{\Gamma_a\Gamma_{a'}}\right|_n = \frac{(-1)^{n-1}\begin{vmatrix} \left|\overline{\alpha\alpha'}^2\right|_n & r_\alpha^2 & 1 \\ r_{\alpha'}^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{2^n r_\alpha r_\beta \ldots r_{\alpha'} r_{\beta'} \ldots},$$

et

$$\begin{vmatrix} \left|\overline{C_\alpha C_{\alpha'}}^2\right|_n & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} \left|\overline{\alpha\alpha'}^2\right|_n & r_\alpha & 1 \\ r_{\alpha'} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

les deux membres de chacune de ces formules étant nuls pour

$n \geqq 5$; puis

$$2^{n-1} r_\alpha r_\beta \ldots r_{\alpha'} r_{\beta'} \ldots \left| 2 \sin^2 \frac{\overline{\Gamma_a \Gamma_{a'}}}{2} \right|_n = \frac{1}{2} \left| \overline{C_\alpha C_{\alpha'}}^2 \right|_2 = \begin{vmatrix} \left|\overline{\alpha\alpha'}^2\right|_n & r_\alpha^2 & r_\alpha & 1 \\ r_{\alpha'}^2 & 0 & 0 & 1 \\ r_{\alpha'} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

les trois membres de cette formule étant nuls pour $n \geqq 6$.

On peut envisager de nombreux cas particuliers.

1° Si le cercle C_α est l'absolu, on aura de nouvelles formules en modifiant les précédentes, et faisant

$$\frac{\overline{\alpha\alpha'}^2}{r_\alpha^2} = 0, \qquad \frac{1}{r_\alpha} = 0, \qquad \frac{\cos \overline{\Gamma_a \Gamma_{a'}}}{r_\alpha} = \frac{1}{2 r_{\alpha'}},$$

$$2 \sin^2 \frac{\overline{\Gamma_a \Gamma_{a'}}}{2} = -\frac{1}{2 r_{\alpha'}}, \qquad \frac{\overline{C_\alpha C_{\alpha'}}^2}{r_\alpha^2} = -1.$$

Toutefois dans la seconde formule, afin de ne pas tomber sur une identité, on fera $\frac{\overline{C_\alpha C_{\alpha'}}^2}{r_\alpha^2} = -1 + \frac{2 r_{\alpha'}}{r_\alpha}$, et l'on égalera les coefficients de $\frac{1}{r_\alpha}$ dans les deux membres, cette quantité étant considérée comme infiniment petite du premier ordre, tandis que $\frac{\overline{\alpha\alpha'}^2}{r_\alpha^2}$ est du second ordre.

2° Si le cercle C_α est de rayon nul, c'est-à-dire se réduit à une série linéaire, on fera

$$r_\alpha \cos \overline{\Gamma_a \Gamma_{a'}} = \frac{r_{\alpha'}^2 - \overline{\alpha\alpha'}^2}{2 r_{\alpha'}}, \qquad 2 r_\alpha \sin^2 \frac{\overline{\Gamma_a \Gamma_{a'}}}{2} = \frac{\overline{\alpha\alpha'}^2 - r_{\alpha'}^2}{2 r_{\alpha'}}.$$

3° Si le cycle Γ_a est spécial, et représente avec l'absolu l'élément $(a|\xi)$, de sorte que r_α est infini, on fera

$$\frac{\overline{\alpha\alpha'}^2}{r_\alpha} = r_\alpha - 2\overline{\alpha' a},$$

et les termes qui ont r_α en facteur disparaîtront d'eux-mêmes; d'ailleurs ici, on a avec précision

$$\cos \overline{\Gamma_a \Gamma_{a'}} = \frac{\overline{\alpha' a}}{r_{\alpha'}},$$

l'élément (a) étant orienté.

De plus, on aura

$$\frac{\overline{C_\alpha C_{\alpha'}}^2}{r_\alpha} = 2(r_{\alpha'} - \overline{\alpha' a}).$$

4° La dernière égalité reste encore exacte si C_α n'étant plus un cercle, on y remplace $2\sin^2\frac{\Gamma_a \Gamma_{a'}}{2}$ par 1, $\frac{\overline{\alpha\alpha'}^2}{r_\alpha}$, r_α et $\frac{1}{r_\alpha}$ par 0; ou bien $\frac{\overline{C_\alpha C_{\alpha'}}^2}{r_{\alpha}^2}$ par -1, $\frac{\overline{\alpha\alpha'}^2}{r_\alpha^2}$, $\frac{1}{r_\alpha}$ et $\frac{1}{r_\alpha^2}$ par 0.

5° Il en est encore de même si l'on remplace $\frac{2\sin^2\Gamma_a\Gamma_{a'}}{r_\alpha}$ par $-\frac{1}{2r_{\alpha'}}$, $\frac{\overline{\alpha\alpha'}^2}{r_{\alpha}^2}$, $\frac{1}{r_\alpha}$ et $\frac{1}{r_{\alpha'}}$ par 0; ou bien $\frac{\overline{C_\alpha C_{\alpha'}}^2}{r_\alpha}$ par $2r_{\alpha'}$, $\frac{\overline{\alpha\alpha'}^2}{r_\alpha}$, r_α et $\frac{1}{r_\alpha}$ par 0.

On combinerait sans peine tous ces différents cas particuliers. Toutes ces formules s'obtiendraient directement comme au Chapitre précédent. Elles serviront aux mêmes usages, et permettront de résoudre la plupart des problèmes sur les cercles ou les cycles. On retrouverait ainsi toute la Géométrie ordinaire des cercles sans difficultés. On fera d'ailleurs la même observation générale qu'à la fin du n° 399.

IV. — Les substitutions conformes.

437. De même qu'au Chapitre précédent, nous pouvons envisager les cercles C_α comme remplissant un espace à trois dimensions.

On peut transformer les cercles en cercles, en soumettant les (α) à une substitution linéaire quelconque; et, en particulier, on peut envisager les substitutions faites sur les (α) qui correspondent à une transformation des éléments (x).

Comme précédemment, si une telle substitution est définie par les formules

$$\alpha_i = \lambda_{i1}\alpha'_1 + \lambda_{i2}\alpha'_2 + \lambda_{i3}\alpha'_3 + \lambda_{i4}\alpha'_4,$$

la substitution transposée, faite sur des variables (y),

$$y'_i = \lambda_{1i}y_1 + \lambda_{2i}y_2 + \lambda_{3i}y_3 + \lambda_{4i}y_4,$$

devra être telle qu'elle ne change pas la série quaternaire définie

par l'équation

$$F(y_1, y_2, y_3) + y_4^2 = 0,$$

et cette même substitution transposée établira la correspondance entre les éléments (y) et (y'), à la condition de faire

$$y_4 = \sqrt{-F_{y^2}}, \qquad y'_4 = \sqrt{-F_{y'^2}}.$$

On est donc ramené à chercher les substitutions, dans un espace à trois dimensions, qui conservent un absolu défini par

$$F_{y^2} + y_4^2 = 0,$$

les (y) étant les variables d'espèce opposée aux (x). Mais ici, le discriminant de la forme $F_{y^2} + y_4^2$ est nul, ce qui va modifier les théories du Chapitre précédent.

438. Prenons l'absolu sous la forme $F = -2x_2x_3 = 0$; on trouve alors immédiatement, en s'aidant de ce qui a été dit sur les mouvements en Géométrie métrique ternaire générale, que les substitutions cherchées, que nous appellerons *substitutions conformes de première espèce,* sont de la forme

$$\begin{aligned}
x_1 &= \lambda_1 x'_1,\\
x_2 &= \lambda_2 x'_1 + \omega_1^2 x'_2 + \omega_2^2 x'_3 + \omega_1\omega_2\sqrt{2}\,x'_4,\\
x_3 &= \lambda_3 x'_1 + \omega_1'^2 x'_2 + \omega_2'^2 x'_3 + \omega'_1\omega'_2\sqrt{2}\,x'_4,\\
x_4 &= \lambda_4 x'_1 + \omega_1\omega'_1\sqrt{2}\,x'_2 + \omega_2\omega'_2\sqrt{2}\,x'_3 + (\omega_1\omega'_2 + \omega_2\omega'_1)\,x'_4,
\end{aligned}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \omega_1, \omega'_1, \omega_2, \omega'_2$ étant des paramètres arbitraires.

Elles donnent inversement

$$\begin{aligned}
x'_1 &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4\sqrt{2x_2x_3},\\
x'_2 &= \omega_1^2 x_2 + \omega_1'^2 x_3 + \omega_1\omega'_1\sqrt{2}\sqrt{2x_2x_3},\\
x'_3 &= \omega_2^2 x_2 + \omega_2'^2 x_3 + \omega_2\omega'_2\sqrt{2}\sqrt{2x_2x_3},\\
\sqrt{2x'_2x'_3} &= \omega_1\omega_2\sqrt{2}\,x_2 + \omega'_1\omega'_2\sqrt{2}\,x_3 + (\omega_1\omega'_2 + \omega_2\omega'_1)\sqrt{2x_2x_3}.
\end{aligned}$$

Ces substitutions forment un groupe à huit paramètres, comprenant en particulier le groupe des similitudes et les similitudes symétriques. Il leur correspond des invariants conformes, sur lesquels il est inutile d'insister.

Sans étudier les éléments doubles définis par les substitutions précédentes, remarquons que les séries linéaires (x'), qui sont des

transformées de séries linéaires, vérifient la relation

$$\lambda_4 \alpha'_1 + \omega_1 \omega'_1 \sqrt{2}\,\alpha'_2 + \omega_2 \omega'_2 \sqrt{2}\,\alpha'_3 = 0.$$

On peut donc choisir l'élément fondamental Ω_1 de façon que $\lambda_4 = 0$, sauf si l'on a à la fois $\omega_1 = \omega'_2 = 0$, ou $\omega'_1 = \omega_2 = 0$. Dans ces deux cas, les séries linéaires considérées sont celles qui contiennent l'élément double (g) de l'absolu.

Supposons que l'on puisse prendre $\lambda_4 = 0$, et cherchons alors quand il y a involution. Un premier cas, auquel peut se ramener une substitution conforme quelconque du même genre par l'adjonction d'une similitude ou d'une similitude symétrique convenablement choisie, correspond aux hypothèses

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0, \qquad \omega_1 + \omega'_2 = 0, \qquad \lambda_1 = -(\omega_1 \omega'_2 - \omega_2 \omega'_1).$$

Les cercles doubles pour cette transformation sont d'abord le cercle

$$-\omega_2 x_2 + \omega'_1 x_3 + \omega_1 \sqrt{2}\sqrt{2 x_2 x_3} = 0,$$

qui se décompose en deux éléments contenant (g), à éléments orientés; puis tous les cercles d'un réseau, leurs coordonnées vérifiant la relation

$$-\omega'_1 \alpha_2 + \omega_2 \alpha_3 + \omega_1 \sqrt{2}\,\alpha_4 = 0.$$

Les cycles équivalents à ces cercles sont à une distance constante k du cycle spécial formé par (g) et l'élément (A) d'équation

$$-\omega'_1 \xi_2 + \omega_2 \xi_3 = 0;$$

on a d'ailleurs

$$\cos k = \frac{-\omega_1 \sqrt{2}}{\sqrt{-2\omega'_1 \omega_2}},$$

l'orientation de A étant déterminée par $\sqrt{-2\omega'_1 \omega_2}$.

Si, de plus, (y) et (y') sont deux éléments de première espèce correspondants, ces deux éléments sont alignés avec (A) et l'on a sans peine

$$\operatorname{tang}^2 \frac{\overline{Ay}}{4im} \operatorname{tang}^2 \frac{\overline{Ay'}}{4im} = \operatorname{tang}^4 \frac{k}{4im}.$$

Cette transformation est une *inversion spéciale de première*

espèce. Si l'on a $\omega_1 = \omega'_2 = 0$, il vient $\cos k = 0$, et l'on a une simple symétrie; si $\omega_2 \omega'_1 = 0$, l'élément (A) appartient à l'absolu.

Un second cas d'involution correspond aux hypothèses

$$\lambda_4 = 0, \qquad \omega_1 + \omega'_2 = 0, \qquad \lambda_1 = \omega_1 \omega'_2 - \omega_2 \omega'_1, \qquad \lambda_2 \omega'_1 - \lambda_3 \omega_2 = 0.$$

Ici les cercles doubles forment deux faisceaux, dont l'un est composé de cercles décomposables en séries linéaires contenant (g); le lieu des centres des autres est un élément (B) et une symétrie par rapport à (B) ramène ce cas au précédent.

Si cependant l'une des quantités ω_2 ou ω'_1 était nulle, un changement de coordonnées permet de supposer $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, ce qu'on pourrait faire aussi en général, et l'on est ramené au cas précédent, non plus par une symétrie, mais par l'emploi du mouvement simple

$$x_1 = -x'_1, \qquad x_2 = x'_2, \qquad x_3 = x'_3.$$

Examinons maintenant le cas où l'on ne peut prendre $\lambda_4 = 0$. Un changement de coordonnées permet de supposer $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Les cas d'involution correspondent aux hypothèses

$$\alpha_1 = \pm \omega \alpha'_1, \qquad \alpha_2 = \omega \alpha'_2, \qquad \alpha_3 = \omega \alpha'_3, \qquad \alpha_4 = \lambda_4 \alpha'_1 \mp \omega \alpha'_4,$$

d'où

$$x'_1 = \pm \omega x_1 + \lambda_4 \sqrt{2 x_2 x_3}, \qquad x'_2 = \omega x_2, \qquad x'_3 = \omega x_3,$$

$$\sqrt{2 x_2 x_3} = \mp \omega \sqrt{2 x'_2 x'_3};$$

de plus, une symétrie de la forme

$$x_1 = x'_1, \qquad x_2 = \alpha x'_3, \qquad x_3 = \frac{1}{\alpha} x'_2,$$

composée avec ces substitutions, leur conserve leur caractère involutif.

Une substitution conforme quelconque pour laquelle λ_4 ne peut être supposé nul peut se ramener à l'un des types précédents par l'adjonction d'une similitude ou d'une similitude symétrique convenable.

Pour la substitution

$$\alpha_1 = \omega \alpha'_1, \qquad \alpha_2 = \omega \alpha'_2, \qquad \alpha_3 = \omega \alpha'_3, \qquad \alpha_4 = \lambda_4 \alpha'_1 - \omega \alpha'_4,$$

les cercles doubles sont l'absolu et tous ceux dont le rayon est

égal à $-\lambda\frac{\lambda_4}{2\omega}$, deux cercles correspondants ont même centre, et la somme de leurs rayons est $-\lambda\frac{\lambda_4}{\omega}$.

Pour la substitution

$$x_1 = -\omega x'_1,\qquad x_2 = \omega x'_2,\qquad x_3 = \omega x'_3,\qquad x_4 = \lambda_4 x'_1 + \omega x'_4,$$

les cercles doubles sont tous ceux qui se décomposent en deux éléments contenant (g), et le cercle particulier

$$2\omega x_1 - \lambda_4\sqrt{2x_2x_3} = 0.$$

Si (y) et (y') sont deux éléments correspondants, ils sont alignés avec (g), et l'on a

$$\overline{\Omega_1 y} + \overline{\Omega_1 y'} = \lambda\frac{\lambda_4}{\omega};$$

Ω_1 est d'ailleurs le centre du cercle $2\omega x_1 - \lambda_4\sqrt{2x_2x_3} = 0$, dont le rayon est $\frac{\lambda\lambda_4}{2\omega}$.

On fera les mêmes remarques qu'au n° 404 sur les substitutions conformes relatives aux cercles.

439. Soumettons maintenant de la même façon les coordonnées a_1, a_2, a_3, a_4 d'un cycle à une substitution linéaire, et envisageons en particulier les substitutions linéaires sur les (a) qui définissent en même temps une transformation des éléments (ξ). Comme au n° 400, on voit tout de suite que les substitutions cherchées seront celles qui conservent la série quaternaire définie par l'équation quadratique $C_a \equiv 2a_2a_3 - a_1a_4 = 0$; et la substitution transposée appliquée aux variables

$$2(\varphi\lambda\xi)(\varphi'\lambda\xi),\quad 2(\varphi\lambda\xi)(\varphi\varphi'\xi),\quad 2(\varphi'\lambda\xi)(\varphi\varphi'\xi),\quad (\varphi\varphi'\xi)^2,$$

liées par une relation quadratique, définira la transformation correspondante sur les (ξ). Dans l'hypothèse, que nous conserverons, où $F = -2x_2x_3$, ces variables sont simplement, en gardant les simplifications du n° 432, $2\xi_2\xi_3$, $-2\xi_1\xi_3$, $-2\xi_1\xi_2$, ξ_1^2.

Ces substitutions transforment un cycle de rayon nul en un cycle de rayon nul et, de plus, conservent la distance de deux cycles.

440. Nous pouvons définir un élément (ξ) par les deux systèmes

de paramètres binaires (λ) et (μ) qui définissent les deux éléments communs à (ξ) et aux éléments qui constituent l'absolu, d'équations

$$\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_3 = 0, \qquad \mu_1\xi_1 + \mu_2\xi_2 = 0,$$

quand $F = -2x_2x_3$; ou plus généralement, avec les notations du n° 432,

$$\lambda_1(\varphi\varphi'\xi) - \lambda_2(\varphi\lambda\xi) = 0, \qquad \mu_1(\varphi\varphi'\xi) - \mu_2(\varphi'\lambda\xi) = 0.$$

Les substitutions que nous avons en vue, transformant un cycle de rayon nul, c'est-à-dire composé de deux éléments (x) appartenant à l'absolu, en un cycle de même nature, seront par suite obtenues en posant

$$\lambda_1 = \sigma_1\lambda'_1 + \sigma'_1\lambda'_2, \qquad \mu_1 = \tau_1\mu'_1 + \tau'_1\mu'_2.$$
$$\lambda_2 = \sigma_2\lambda'_1 + \sigma'_2\lambda'_2, \qquad \mu_2 = \tau_2\mu'_1 + \tau'_2\mu'_2,$$

ou bien

$$\lambda_1 = \sigma_1\mu'_1 + \sigma'_1\mu'_2, \qquad \mu_1 = \tau_1\lambda'_1 + \tau'_1\lambda'_2,$$
$$\lambda_2 = \sigma_2\mu'_1 + \sigma'_2\mu'_2, \qquad \mu_2 = \tau_2\lambda'_1 + \tau'_2\lambda'_2,$$

comme au n° 401 ; et l'on fera les mêmes remarques.

L'équation du cycle Γ_a s'écrivant

$$2a_1\lambda_1\mu_1 + 2a_2\lambda_1\mu_2 + 2a_3\lambda_2\mu_1 + a_4\lambda_2\mu_2 = 0,$$

on aura pour les coordonnées du cycle transformé $\Gamma_{a'}$, en ne considérant que les substitutions du premier type

$$a'_1 = \sigma_1\tau_1a_1 + \sigma_1\tau_2a_2 + \sigma_2\tau_1a_3 + \frac{1}{2}\sigma_2\tau_2a_4,$$
$$a'_2 = \sigma_1\tau'_1a_1 + \sigma_1\tau'_2a_2 + \sigma_2\tau'_1a_3 + \frac{1}{2}\sigma_2\tau'_2a_4,$$
$$a'_3 = \sigma'_1\tau_1a_1 + \sigma'_1\tau_2a_2 + \sigma'_2\tau_1a_3 + \frac{1}{2}\sigma'_2\tau_2a_4,$$
$$a'_4 = 2\sigma'_1\tau'_1a_1 + 2\sigma'_1\tau'_2a_2 + 2\sigma'_2\tau'_1a_3 + \sigma'_2\tau'_2a_4$$

et, par suite, l'absolu étant $F = -2x_2x_3 = 0$,

$$\xi_2\xi_3 = \sigma_1\tau_1\xi'_2\xi'_3 - \sigma_1\tau'_1\xi'_1\xi'_3 - \sigma'_1\tau_1\xi'_1\xi'_2 + \sigma'_1\tau'_1\xi'^2_1,$$
$$\xi_1\xi_3 = -\sigma_1\tau_2\xi'_2\xi'_3 + \sigma_1\tau'_2\xi'_1\xi'_3 + \sigma'_1\tau_2\xi'_1\xi'_2 - \sigma'_1\tau'_2\xi'^2_1,$$
$$\xi_1\xi_2 = -\sigma_2\tau_1\xi'_2\xi'_3 + \sigma_2\tau'_1\xi'_1\xi'_3 + \sigma'_2\tau_1\xi'_1\xi'_2 - \sigma'_2\tau'_1\xi'^2_1,$$
$$\xi^2_1 = \sigma_2\tau_2\xi'_2\xi'_3 - \sigma_2\tau'_2\xi'_1\xi'_3 - \sigma'_2\tau_2\xi'_1\xi'_2 + \sigma'_2\tau'_2\xi'^2_1.$$

Ces substitutions, du premier type, seront dites *conformes de*

seconde espèce, et il leur correspondra des invariants conformes faciles à définir d'une façon plus précise.

Les éléments doubles, pour une substitution conforme, se déterminent comme au n° 403.

441. En général, qu'il s'agisse d'une substitution du premier type ou d'une du second, les cycles spéciaux, c'est-à-dire pour lesquels $a_1 = 0$, qui se transforment en cycles spéciaux, contiennent l'élément fixe défini par

$$\frac{\xi_1}{-\sigma_2\tau_2} = \frac{\xi_2}{\sigma_2\tau_1} = \frac{\xi_3}{\sigma_1\tau_2};$$

si l'on a $\sigma_2 = \tau_2 = 0$, la transformation est une similitude, ou une similitude symétrique, suivant son type. Ce cas écarté, soit $\sigma_2\tau_2 \neq 0$, et prenons, ce qui est possible, l'élément fixe que nous venons de définir, pour élément fondamental Ω_1, de sorte que $\sigma_1 = \tau_1 = 0$. Une substitution du premier type sera alors involutive si l'on a de plus $\sigma'_2 = \tau'_2 = 0$. Les éléments doubles de chacune des involutions ainsi déterminées sur les deux éléments de l'absolu sont conjugués harmoniques par rapport à (g) et O_2 ou O_3; en les combinant ensemble, on détermine deux couples d'éléments de seconde espèce (α) et (β), (α') et (β'), les éléments $(\alpha\beta)$ et $(\alpha'\beta')$ contenant Ω_1.

Les cycles doubles pour la substitution envisagée sont ceux des deux faisceaux déterminés par (α) et (β), (α') et (β'); ces deux faisceaux sont conjugués et les cycles de l'un sont orthogonaux aux cycles de l'autre.

Une substitution du second type sera involutive, si l'on a de même $\sigma'_2 = \tau'_2 = 0$, et de plus $\sigma'_1\tau_2 = \sigma_2\tau'_1$.

Dans ce cas, dit *inversion spéciale de seconde espèce,* on a

$$\xi_2\xi_3 = \sigma'_1\tau'_1\xi'^2_1, \qquad \xi_1^2 = \sigma_2\tau_2\xi'_2\xi'_3,$$
$$\xi_1\xi_3 = \sigma'_1\tau_2\xi'_1\xi'_3, \qquad \xi_1\xi_2 = \sigma_2\tau'_1\xi'_1\xi'_2,$$

et l'on est ramené à l'inversion particulière définie au n° 284 comme cas particulier de la correspondance quadratique birationnelle, de sorte que nous pourrons appliquer les propriétés de cette transformation.

Les cycles doubles pour cette substitution sont d'abord le cycle

$$\sigma'_1 \xi_1^2 - \sigma_2 \xi_2 \xi_3 = 0,$$

de centre Ω_1, et tous les cycles orthogonaux à celui-là. Le carré de son rayon est d'ailleurs $\lambda^2 \frac{2\sigma'_1}{\sigma_2}$.

Deux éléments (ξ) et (ξ') correspondants sont alignés avec Ω_1 et l'on a

$$\overline{\Omega_1 \xi}\,\overline{\Omega_1 \xi'} = \lambda^2 \frac{2\sigma'_1}{\sigma_2}.$$

Revenons maintenant au cas exclu d'abord où l'on a $\sigma_2 \tau_2 = 0$, et soit $\tau_2 = 0$. Si la substitution est du premier type et involutive, on peut disposer de Ω_1 de façon que

$$\sigma_1 = \sigma'_2 = 0, \qquad \tau'_1 = 0, \qquad \tau_1 + \tau'_2 = 0,$$

et l'on se trouve dans un cas limite du cas général; pour le second type, il y a involution seulement si $\sigma_2 = 0$, en particulier, et l'on est ramené à une symétrie.

Une similitude ou une similitude symétrique convenablement choisie permet toujours de ramener une substitution quelconque du premier ou du second type à un cas d'involution. Une substitution conforme involutive se ramène aussi, par l'adjonction d'une symétrie évidente, à une inversion spéciale.

Nous remarquerons enfin que le réseau formé ici par les cycles spéciaux, composés de (g) et d'une série linéaire, a pour correspondant un réseau de cycles contenant un même élément (ξ) fixe. On ne pourra donc pas en général, par une des substitutions que nous venons d'étudier, transformer trois cycles en trois séries linéaires.

Pour des raisons que la Géométrie quaternaire rendra évidentes, un *hypercercle* sera l'ensemble des cercles dont les coordonnées vérifient une relation de la forme

$$A_1 \alpha_1^2 + 2A_2 \alpha_1 \alpha_2 + 2A_3 \alpha_1 \alpha_3 + 2A_4 \alpha_1 \alpha_4 + A_5(2\alpha_2\alpha_3 - \alpha_4^2) = 0,$$

l'absolu étant toujours pris sous la forme $F = -2x_2x_3 = 0$.

Tous les cercles d'un hypercercle sont à une distance constante d'un cercle fixe, comme on le vérifie sans peine; et de même tous les cycles équivalents à ces cercles sont à une distance constante d'un cycle fixe, qui a même centre que le cercle fixe précédent.

Un hypercycle sera de même l'ensemble des cycles dont les coordonnées vérifient une relation de la forme

$$A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3 + A_4 a_4 + A_5 \sqrt{-C_{a^2}} = 0.$$

L'ensemble des cercles équivalents à ces cycles forme un hypercercle, et l'on aurait pu faire la même remarque en Géométrie métrique générale.

Nous n'étudierons pas ici ces éléments nouveaux, auxquels s'appliqueront les théories de la Géométrie quaternaire.

V. — Les coordonnées circulaires et cycliques, et les séries orientées.

442. Les cercles C_β dont les coordonnées vérifient une relation linéaire

$$a_1 \beta_1 + a_2 \beta_2 + a_3 \beta_3 + a_4 \beta_4 = 0$$

définissent un élément (a), de coordonnées a_1, a_2, a_3, tel que la distance de cet élément aux cycles équivalents aux cercles C_β ait une valeur constante k définie par

$$\cos \frac{k}{2m} = \frac{a_4}{\sqrt{-F_{a^2}}}.$$

Quand k est nul, on a en particulier $F_{a^2} + a_4^2 = 0$.

Nous sommes ainsi amenés à définir un élément (a) par les quatre coordonnées *circulaires*, a_1, a_2, a_3, a_4 liées par la relation $F_{a^2} + a_4^2 = 0$.

Une équation de la forme $f(a_1, a_2, a_3, a_4) = 0$, jointe à la relation $F_{a^2} + a_4^2 = 0$, définit une série ternaire, que l'on peut en général dédoubler en deux séries orientées, et sur laquelle on peut répéter tout ce qui a été dit au n° 408.

Inversement, il sera facile de reconnaître si une série ternaire donnée est susceptible ou non d'orientation, puisque dans le premier cas, son équation doit permettre d'exprimer $\sqrt{-F_{x^2}}$ rationnellement en fonction de x_1, x_2, x_3.

Si l'on effectue une substitution linéaire générale sur les (a), de sorte que les coordonnées (α) sont transformées par la substi-

tution transposée, on est amené à envisager des coordonnées circulaires plus générales.

443. Les cycles Γ_b dont les coordonnées vérifient une relation linéaire

$$\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 + \alpha_4 b_4 = 0$$

sont tous orthogonaux à un cycle fixe Γ_a pour les coordonnées duquel on peut prendre les coefficients (α).

Si, en particulier, le cycle Γ_a est de rayon nul, on a évidemment $2\alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3 = 0$.

Les (α) sont des coordonnées *cycliques;* une équation

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 0,$$

jointe à la relation $2\alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3 = 0$, définit une série ternaire de seconde espèce dont il est facile de former l'équation. Si, en effet, (ξ) est le centre du cercle de rayon nul défini par les (α), on peut prendre, en général, avec les notations du n° 432

$$\alpha_1 = 2(\underset{\cdot}{\varphi}\lambda\xi)(\underset{\cdot}{\varphi}'\lambda\xi), \qquad \alpha_2 = 2(\underset{\cdot}{\varphi}\lambda\xi)(\underset{\cdot}{\varphi}\underset{\cdot}{\varphi}'\xi),$$
$$\alpha_3 = 2(\underset{\cdot}{\varphi}'\lambda\xi)(\underset{\cdot}{\varphi}\underset{\cdot}{\varphi}'\xi), \qquad \alpha_4 = (\underset{\cdot}{\varphi}\underset{\cdot}{\varphi}'\xi)^2.$$

On définira sans peine des coordonnées cycliques plus générales.

Une équation $f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 0$, de degré p par rapport aux (α), définit une série de degré $2p$, dont nous dirons qu'elle est orientée de degré p, quoiqu'ici le mot *orientée* perde son sens, par analogie avec ce qui a été déjà fait.

Inversement, il sera facile de reconnaître si une série ternaire donnée peut être considérée comme une série orientée de moindre degré.

Tout ce qui a été dit au n° 410 peut être répété ici, avec quelques modifications évidentes, puisque l'équation d'un cercle ou d'un cycle est linéaire par rapport aux coordonnées circulaires ou cycliques.

On définira donc sans peine un élément normal, qui sera de première espèce, un cercle ou un cycle osculateur, etc.

VI. — Les séries orientées du second degré.

444. L'objet de ce paragraphe est tout semblable à celui du paragraphe correspondant du Chapitre précédent; aussi n'insisterons-nous que sur les modifications à faire à ce qui a été déjà dit quand il s'agit de passer de la Géométrie métrique générale à la Géométrie métrique particulière.

On considérera d'abord une série orientée f de première espèce, et l'on cherchera des fonctions linéaires A_i des (a) telles que

$$f = p_1 A_1^2 + p_2 A_2^2 + p_3 A_3^2 + p_4 A_4^2,$$

et que

$$F_{a^2} + a_4^2 = G = A_2^2 + A_3^2 + A_4^2.$$

L'équation

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 A_4 = 0$$

représente un cercle (λ) qui se décompose en deux éléments appartenant à (g), quand on a $\lambda_1 = 0$, évidemment; c'est le cas des cercles particuliers $A_2 = 0$, $A_3 = 0$, $A_4 = 0$.

Il existe sept substitutions linéaires qui conservent la série f et la forme G; trois sont du type

$$\lambda_1 = \lambda'_1, \qquad \lambda_2 = -\lambda'_2, \qquad \lambda_3 = \lambda'_3, \qquad \lambda_4 = \lambda'_4;$$

c'est une inversion spéciale conservant le réseau de cercles pour lesquels $\lambda_2 = 0$, et en particulier, par conséquent, $A_3 = 0$ et $A_4 = 0$; cette inversion conserve aussi $A_2 = 0$.

Une autre est

$$\lambda_1 = -\lambda'_1, \qquad \lambda_2 = \lambda'_2, \qquad \lambda_3 = \lambda'_3, \qquad \lambda_4 = \lambda'_4;$$

elle conserve $A_1 = 0$, et tous les cercles décomposables : elle a été étudiée à la fin du n° 438.

Enfin trois autres sont du type

$$\lambda_1 = \lambda'_1, \qquad \lambda_2 = \lambda'_2, \qquad \lambda_3 = -\lambda'_3, \qquad \lambda_4 = -\lambda'_4;$$

ce sont encore des substitutions involutives, obtenues en composant ensemble deux des quatre précédentes.

445. Si la série f est une série quadratique ordinaire, on peut supposer $p_4 = 0$, et A_1, A_2, A_3 sont des fonctions linéaires de a_1,

a_2, a_3 seulement. La transformation faite est encore celle qui consiste à rapporter la série f et l'absolu à leur suite triple conjuguée commune, dont (g) est ici l'un des éléments de première espèce.

Des sept substitutions linéaires qui transforment ici la série f en elle-même et conservent G, l'une n'a d'autre effet que de changer l'orientation des éléments; une autre est un mouvement involutif; deux sont des symétries; les trois autres sont des compositions de la première avec les suivantes. Les éléments caractéristiques de ces transformations sont en évidence.

446. En revenant au cas général, on trouve quatre systèmes de cercles bitangents à la série f; mais l'un d'eux, défini par

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2 = 0,$$

se compose de cercles décomposables en deux éléments confondus, et n'est pas à considérer : ces cercles se reproduisent d'ailleurs par la substitution particulière

$$\lambda_1 = -\lambda'_1, \qquad \lambda_2 = \lambda'_2, \qquad \lambda_3 = \lambda'_3, \qquad \lambda_4 = \lambda'_4$$

Les trois autres systèmes sont du type

$$\lambda_2 = 0, \qquad \frac{\lambda_1^2}{p_1 - p_2} + \frac{\lambda_3^2}{p_3 - p_2} + \frac{\lambda_4^2}{p_4 - p_2} = 0;$$

les cercles de ce système appartiennent au réseau $\lambda_2 = 0$, qui se reproduit par l'une des inversions spéciales qui conservent la série f; dans cette transformation, les deux éléments de contact s'échangent mutuellement. S'il s'agit d'une série quadratique ordinaire, le système des cercles qui correspond à $\lambda_4 = 0$ se compose des séries linéaires tangentes à f. Dans le cas général, dans un système de cercles bitangents à f, il existe deux cercles décomposables, les éléments qui composent l'un d'eux étant tangents à f et contenant (g). En tout, il y a six tels cercles décomposables obtenus en combinant deux à deux les quatre éléments tangents à f contenant (g), et autres que les éléments de l'absolu. Pour une série quadratique ordinaire, il n'y a qu'un seul tel cercle, appartenant d'ailleurs aux deux systèmes de cercles bitangents.

447. Prenons maintenant l'équation de la série f en coordon-

nées circulaires ordinaires sous la forme

$$f_1 + 2a_4 f_2 = 0,$$

comme au n° 418, et faisons la même réduction, de sorte que

$$f = q_1 A_1^2 + q_2 A_2^2 + q_3 A_3^2 + 2A_4(r_1 A_1 + r_2 A_2 + r_3 A_3),$$
$$G = A_2^2 + A_3^2 + A_4^2,$$

A_4 étant a_4 et A_1, A_2, A_3 étant des formes linéaires en a_1, a_2, a_3. Les coordonnées du centre d'un cercle (λ) sont ici λ_1, λ_2, λ_3, et si r_λ est son rayon, on a

$$r_\lambda = -\frac{\lambda \lambda_4 i}{\lambda_1},$$

λ étant toujours la constante métrique, sans qu'il puisse en résulter de confusion.

Envisageons d'abord le cas d'une série quadratique ordinaire, de sorte que $r_1 = r_2 = r_3 = 0$; la transformation précédente est celle qui consiste à rapporter la série f et l'absolu à leur suite triple conjuguée commune, et F a ici la forme $A_2^2 + A_3^2 = 0$.

L'élément $A_1 = 0$ est le *centre* de la série quadratique, tandis que les éléments de première espèce définis par $A_1 = 0$, $A_3 = 0$ et $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ en sont les *axes* : les raisons de ces dénominations sont évidentes, d'après les transformations déjà étudiées de la série f en elle-même.

Soit α_2 la distance du centre à l'un des éléments tangents à f contenant l'axe $A_1 = 0$, $A_3 = 0$; et α_3 la distance analogue relative à l'autre axe. On a

$$\alpha_2^2 = -\lambda^2 \frac{q_3}{q_1}, \qquad \alpha_3^2 = -\lambda^2 \frac{q_2}{q_1};$$

si d, e, e' sont les invariants des formes f et F au sens ordinaire, de sorte que

$$d = q_1 q_2 q_3, \qquad e = q_1(q_2 + q_3), \qquad e' = q_1,$$

on a donc, pour déterminer α_2 et α_3, l'équation générale

$$\alpha^4 + \lambda^2 \alpha^2 \frac{e}{e'} + \lambda^4 \frac{d}{e'^3} = 0.$$

L'invariant χ relatif à f et F est

$$(q_2 + q_3)\xi_1^2 + q_1(\xi_2^2 + \xi_3^2).$$

les (ξ) étant les coordonnées de seconde espèce; égalé à zéro, il représente un cycle à orientation arbitraire, ayant même centre que f, lieu des éléments (ξ) tels que leurs deux éléments communs avec f soient perpendiculaires.

Il n'y a pas lieu de considérer l'invariant h.

448. Les cercles (λ) bitangents à f sont d'abord les cercles décomposables en éléments confondus contenant (g), vérifiant

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2 = 0.$$

On a ensuite les éléments tangents à f, vérifiant

$$\lambda_4 = 0, \qquad \frac{\lambda_1^2}{q_1} + \frac{\lambda_2^2}{q_2} + \frac{\lambda_3^2}{q_3} = 0;$$

et enfin deux systèmes de cercles bitangents proprement dits définis par les relations

$$\lambda_2 = 0, \qquad \frac{\lambda_1^2}{q_1} + \frac{\lambda_3^2}{q_3 - q_2} - \frac{\lambda_4^2}{q_2} = 0,$$

ou bien

$$\lambda_3 = 0, \qquad \frac{\lambda_1^2}{q_1} + \frac{\lambda_2^2}{q_2 - q_3} - \frac{\lambda_4^2}{q_3} = 0.$$

Ces cercles ont leurs centres appartenant aux axes; nous les avons déjà étudiés quand ils se décomposent; mais, de plus, on voit que chaque système contient deux cercles de rayon nul, appelés *foyers*. Les distances γ_2 et γ_3 du centre aux foyers sont définies par

$$\gamma_2^2 = \lambda^2 \frac{q_3 - q_2}{q_1}, \qquad \gamma_3^2 = \lambda^2 \frac{q_2 - q_3}{q_1};$$

les foyers sont fournis par les éléments communs à f et à l'absolu associés deux à deux.

Si une série quadratique f' a les deux foyers d'un même système communs avec f, son équation est de la forme

$$q_1 \Lambda_1^2 + (q_2 + \omega)\Lambda_2^2 + (q_3 + \omega)\Lambda_3^2 = 0,$$

ω étant un paramètre arbitraire, et les deux autres foyers sont aussi communs. Ces séries sont *homofocales*. Des séries homofocales forment un faisceau comprenant l'absolu, d'où un grand nombre de propriétés connues s'énonçant immédiatement.

449. La réduction supposée au n° 447 n'est pas toujours possible. Le cas le plus important dans lequel elle cesse de l'être se présente lorsque la série quadratique f contient l'élément double (g) de l'absolu. On peut alors prendre f sous la forme

$$f = p_1 \Lambda_2^2 + 2 p_2 \Lambda_1 \Lambda_3 = 0,$$

l'absolu restant

$$F = \Lambda_2^2 + \Lambda_3^2 = 0.$$

La série quadratique est dite *parabolique;* l'élément défini par $\Lambda_1 = 0$, $\Lambda_3 = 0$ est son *axe*, et $\Lambda_1 = 0$ définit son *sommet;* l'élément de contact de $\Lambda_1 = 0$ avec f, soit $\Lambda_1 = 0$, $\Lambda_2 = 0$, est perpendiculaire à l'axe. Les invariants de f et F sont

$$d = -p_1 p_2^2, \qquad e = -p_2^2, \qquad e' = 0;$$

l'invariant χ de f et F est ici

$$\xi_1(p_1 \xi_1 - 2 p_2 \xi_3);$$

égalé à zéro, il définit, outre (g), une série linéaire qui s'interprète comme précédemment.

Comme cercles bitangents à f, on trouve deux fois la série des cercles décomposables en éléments confondus contenant (g); les éléments tangents à f vérifiant la relation

$$\lambda_4 = 0, \qquad p_2^2 \lambda_2^2 + 2 p_1 p_2 \lambda_1 \lambda_3 = 0,$$

et enfin une série de cercles proprement dits :

$$\lambda_2 = 0, \qquad p_1^2 \lambda_1^2 + 2 p_1 p_2 \lambda_1 \lambda_3 - p_2^2 \lambda_4^2 = 0.$$

Ces cercles ont leurs centres appartenant à l'axe; il existe un seul foyer proprement dit, défini par $\lambda_2 = 0, p_1 \lambda_1 + 2 p_2 \lambda_3 = 0$; sa distance au sommet, β, est définie par

$$\beta^2 = \lambda^2 \frac{p_1^2}{4 p_2^2} = -\lambda^2 \frac{d^2}{4 e^3}.$$

450. Revenons maintenant au cas général. Les propriétés correspondantes résulteront sans peine de ce qui a été dit au n° 418, si l'on y prend G sous la forme $\varepsilon \Lambda_1^2 + \Lambda_2^2 + \Lambda_3^2 + \Lambda_4^2$, et si l'on fait ensuite un passage à la limite en supposant que ε devienne nul.

Les cercles bitangents à f, en dehors de ceux formés de deux

éléments confondus contenant (g), sont définis par

$$\frac{r_1^2}{q_1}+\frac{r_2^2}{q_2+\rho}+\frac{r_3^2}{q_3+\rho}-\rho=0,$$

$$\frac{\lambda_1^2}{q_1}+\frac{\lambda_2^2}{q_2+\rho}+\frac{\lambda_3^2}{q_3+\rho}=0,$$

$$\frac{r_1\lambda_1}{q_1}+\frac{r_2\lambda_2}{q_2+\rho}+\frac{r_3\lambda_3}{q_3+\rho}-\lambda_4=0,$$

de sorte qu'il y a trois séries de tels cercles, correspondant aux trois racines de la première équation, ρ étant une inconnue auxiliaire.

Les lieux des centres des cercles de ces séries sont trois séries quadratiques (D_2), (D_3), (D_4), homofocales entre elles et à la série quadratique f_1; de sorte que leurs foyers sont faciles à définir en partant de f.

Les cercles du système qui correspond à (D_i) appartiennent à un même réseau, et sont à une distance constante k_i de la série linéaire (B_i)

$$\frac{r_1\xi_1}{q_1}+\frac{r_2\xi_2}{q_2+\rho_i}+\frac{r_3\xi_3}{q_3+\rho_i}=0,$$

ρ_i correspondant à (D_i); d'ailleurs

$$\cos k_i=\frac{-1}{\sqrt{-\frac{r_2^2}{(q_2+\rho_i)^2}-\frac{r_3^2}{(q_3+\rho_i)^2}}},$$

en faisant $2im=1$.

Les cercles principaux (A_i) du n° 418 deviennent les cercles décomposables

$$\frac{r_2 A_2}{q_2+\rho_i}+\frac{r_3 A_3}{q_3+\rho_i}-A_4=0.$$

Les cercles (A_3) et (A_4) par exemple appartiennent au réseau des cercles bitangents à f, correspondant à (D_1).

On a, par un passage à la limite évident,

$$\cos\overline{A_1 A_2}=\cos k_1\cos k_2.$$

Chaque système de cercles bitangents à f comprend deux cercles de rayon nul; leurs centres, communs aux séries (D_i) et (B_i) correspondantes, sont les six éléments tangents doubles de f autres que les éléments de l'absolu.

Les séries décomposables contenues dans un système ont déjà été étudiées.

La propriété du n° 417 modifiée convenablement montre que le pôle par rapport à (D_i) de la polaire de (B_j) par rapport à l'absolu a lui-même, par rapport à l'absolu, même polaire que (B_j) par rapport à (A_i); ou bien encore appartient à la polaire de la polaire de (B_j) par rapport à l'absolu, prise par rapport au cercle décomposable (A'_i), polaire réciproque de (A_i) par rapport à l'absolu.

Appelons Ω l'élément $A_1 = 0$; un élément quelconque contenant (g) a en commun avec f quatre éléments répartis en deux groupes, et les deux éléments d'un même groupe sont tels que la somme des distances de Ω à ces deux éléments soit constante et égale à $-2i\lambda\frac{r_1}{q_1}$, soit 2μ.

On a aussi

$$\overline{\Omega B_i} = \mu \cos k_i.$$

Ces propriétés permettent de construire (B_3) et (B_4), par exemple, connaissant (D_2) et (B_2) ainsi que k_2, et de calculer k_3 et k_4.

On voit encore sans peine, en s'aidant de la propriété évidente des éléments de contact avec f d'un même cercle bitangent, et cherchant les cercles à éléments de contact confondus, comme au n° 418, que ces cercles sont au nombre de douze et que les séries (D_3) et (D_4) par exemple contiennent deux par deux les quatre éléments contenant deux éléments communs à la série tangentielle de (D_2) et au cercle (A'_2). De plus, les éléments de contact de (D_3) et (D_4) avec les éléments indiqués ci-dessus sont perpendiculaires à (B_2), ce qui détermine sans ambiguïté (D_3) et (D_4), homofocales à (D_2) quand on connaît (A_2) et (B_2).

On peut multiplier les propriétés des séries que nous venons d'étudier; mais ce qui précède suffit pour en donner une idée nette.

On pourra aussi discuter les différents cas particuliers, comme au Chapitre précédent; et, en outre, on pourra envisager le cas où la série f_1 est parabolique; il ne reste alors que deux systèmes de cercles bitangents, et les séries (D_3) et (D_4) correspondantes sont paraboliques et homofocales.

451. L'équation d'une série orientée du second degré peut

s'écrire

$$f(A'_1, A'_2, A'_3, A'_4) = 0,$$

f étant une forme quadratique des A'_i, qui sont elles-mêmes des fonctions linéaires des coordonnées circulaires ordinaires a_1, a_2, a_3, a_4.

Si un élément (A') a pour coordonnées ordinaires (a) et si l'on considère un élément tangent au cercle $A'_i = 0$, contenant (A'), en désignant par t_i la distance de (A') à l'élément de contact de cet élément tangent, c'est-à-dire encore la distance du cycle équivalent à $A'_i = 0$ au cycle décomposable formé de (A') et de (g), on a, comme au n° 419,

$$2 \sin^2 \frac{t_i}{2} = \frac{A'_i}{\varphi'_i \sqrt{-F_{a^2}}},$$

φ'_i étant toujours le coefficient de a_4 dans A_i et $2im$ étant égal à 1. D'ailleurs si r_i est le rayon du cercle $A'_i = 0$ et si d_i est la distance de son centre à (A'), on a

$$2 \sin^2 \frac{t_i}{2} = 1 - \frac{d_i}{r_i}.$$

Si le cercle $A'_i = 0$ est de rayon nul et se réduit à une série linéaire de coordonnées (ξ'), d_i étant la distance de cette série à (A'), on a

$$d_i = \lambda \frac{i A'_i}{(g \mid \xi') \sqrt{-F_{a^2}}}.$$

Si le cercle $A'_i = 0$ est l'absolu, on a

$$1 = \frac{A'_i}{\varphi'_i \sqrt{-F_{a^2}}}.$$

Si le cercle $A'_i = 0$ est décomposable en deux éléments contenant (g), son centre est toujours défini ; soit k_i la distance constante d'un élément du cercle à un élément quelconque du centre, et de même d_i la distance de (A') à un élément quelconque du centre ; on a ici

$$1 - \frac{\sin d_i}{\sin k_i} = \frac{A'_i}{\varphi'_i \sqrt{-F_{a^2}}}.$$

En appliquant aux différentes formes de l'équation $f = 0$, ces différents résultats, on définira, comme au Chapitre précédent, la

série f par des relations métriques simples qu'il est inutile de développer.

452. Envisageons maintenant une série orientée de seconde espèce, définie en coordonnées cycliques ordinaires par l'équation quadratique

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0.$$

jointe à la relation

$$2x_1x_4 - x_2x_3 = 0.$$

On trouvera, en général, quatre fonctions linéaires Λ_i des (x), telles que

$$f = p_1\Lambda_1^2 + p_2\Lambda_2^2 + p_3\Lambda_3^2 + p_4\Lambda_4^2,$$

$$\Gamma = 2x_1x_4 - x_2x_3 = \Lambda_1^2 + \Lambda_2^2 + \Lambda_3^2 + \Lambda_4^2$$

l'équation d'un cycle (λ) sera

$$\lambda_1\Lambda_1 + \lambda_2\Lambda_2 + \lambda_3\Lambda_3 + \lambda_4\Lambda_4 = 0,$$

et deux cycles (λ) et (μ) seront orthogonaux si l'on a

$$\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \lambda_3\mu_3 + \lambda_4\mu_4 = 0,$$

tandis qu'un cycle de rayon nul sera défini par

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2 = 0.$$

On définira les cercles principaux de la série f comme au n° 412, ainsi que les substitutions linéaires qui conservent la série f en même temps que la forme Γ; et l'on obtiendra toutes les mêmes propriétés générales qu'aux n°s 412 et suivants, pour ainsi dire sans modification.

453. D'après son équation, la série f est une série quartique de seconde espèce, admettant les deux éléments de l'absolu comme éléments doubles; et réciproquement. Les deux groupes de quatre éléments tangents à f contenant les éléments de l'absolu déterminent par leur combinaison les seize foyers de la série f, appartenant quatre par quatre aux cercles principaux, ainsi qu'il résulte aussi des propriétés de la forme doublement quadratique à variables binaires.

Les éléments tangents à f suivant les éléments de l'absolu eux-

mêmes forment deux groupes de deux, et déterminent par leur combinaison quatre éléments que l'on peut regarder comme les foyers singuliers de la série f. Remarquons, d'une façon générale, que ces dénominations de *foyers* et *foyer singulier*, pourraient être étendues à des séries de degré quelconque, et d'espèce quelconque, tant en Géométrie métrique générale qu'en Géométrie métrique spéciale.

La série f, lorsque le terme en α_1^2 manque dans son équation en coordonnées cycliques ordinaires, se compose de (g) et d'une série cubique contenant les éléments de l'absolu; c'est celle-ci qu'on regarde comme définie par l'équation $f = 0$. Elle admet seize foyers définis comme précédemment, et un seul foyer singulier.

Enfin si α_1 ne figure pas dans l'équation $f = 0$, la série f se compose de (g) deux fois, et d'une série quadratique ordinaire; celle-ci admet quatre foyers. Dans ce cas, la réduction générale effectuée au commencement du numéro précédent est impossible.

Il est inutile d'étudier les séries quadratiques ordinaires de seconde espèce, puisque leurs séries tangentielles sont de même nature, et ont été étudiées précédemment.

454. Considérons donc une série orientée générale du second degré et prenons l'absolu sous la forme $F = x_2^2 + x_3^2 = 0$; il sera possible en général, ainsi que cela résulte de ce qui suit, de choisir les coordonnées de façon que l'équation de f en coordonnées (ξ) ordinaires soit

$$q_1(\xi_2^2 + \xi_3^2)^2 + 4q_2\xi_1^2\xi_2^2 + 4q_3\xi_1^2\xi_3^2 - 8r_2\xi_1^3\xi_2 - 8r_3\xi_1^3\xi_3 + 4q_4\xi_1^4 = 0;$$

l'équation d'un cycle (λ) sera

$$\lambda_1(\xi_2^2 + \xi_3^2) - 2\lambda_2\xi_1\xi_2 - 2\lambda_3\xi_1\xi_3 + 2\lambda_4\xi_1^2 = 0,$$

les coordonnées de son centre étant λ_1, λ_2, λ_3, et son rayon ρ déterminé par

$$\rho^2 = \lambda^2 \frac{\lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 2\lambda_1\lambda_4}{\lambda_1^2}.$$

Les coordonnées cycliques sont ici

$$\xi_2^2 + \xi_3^2, \quad -2\xi_1\xi_2, \quad -2\xi_1\xi_3, \quad 2\xi_1^2.$$

Les cycles bitangents à f sont déterminés facilement par les trois équations

$$\frac{\rho^2}{q_1} + \frac{r_2^2}{q_2 + \rho} + \frac{r_3^2}{q_3 + \rho} - q_4 = 0,$$

$$\frac{\lambda_1^2}{q_1} + \frac{\lambda_2^2}{q_2 + \rho} + \frac{\lambda_3^2}{q_3 + \rho} = 0,$$

$$-\rho\frac{\lambda_1}{q_1} + \frac{r_2\lambda_2}{q_2 + \rho} + \frac{r_3\lambda_3}{q_3 + \rho} - \lambda_4 = 0,$$

ρ étant une inconnue auxiliaire.

Il existe donc quatre systèmes de cercles bitangents à f; les lieux (D_i) de leurs centres sont des séries quadratiques homofocales, et il est facile de vérifier que leurs foyers sont précisément les foyers singuliers de la série f. Les cercles bitangents à f d'un même système sont orthogonaux à un cercle fixe (Λ_i), d'équation

$$\xi_2^2 + \xi_3^2 - \frac{2r_2}{q_2 + \rho_i}\xi_1\xi_2 - \frac{2r_3}{q_3 + \rho_i}\xi_1\xi_3 + \frac{2\rho_i}{q_1}\xi_1^2 = 0,$$

ρ_i étant la racine correspondante de l'équation en ρ.

Les quatre cercles principaux sont orthogonaux et, d'une façon générale, on retrouve toutes les propriétés énoncées au n° 418 : les centres des cercles principaux (Λ_2), (Λ_3), (Λ_4) sont les éléments ayant même polaire par rapport à (Λ_1) et (D_1); ....

Chaque système de cercles bitangents à (f) contient quatre foyers ou cercles de rayon nul, éléments communs aux séries (D_i) et (Λ_i) correspondantes, et deux séries linéaires doublement tangentes à f; ....

Les cas particuliers se discuteront comme au n° 418, et conduiront aux mêmes conséquences, la série f pouvant se décomposer en une série cubique et un élément appartenant à l'absolu quand l'équation en ρ a deux racines doubles; etc.

Un cas particulier intéressant sera celui où l'on a $q_2 = q_3$, de sorte que les éléments de l'absolu sont cuspidaux pour la série f. Les séries (D_i) qui correspondent aux racines de l'équation en ρ autres que $-q_2$ sont des cercles, ayant pour centre l'unique foyer doublement singulier de f. En général, la racine $-q_2$ de l'équation en ρ est simple, et l'on peut supposer $r_3 = 0$, sans altérer la généralité. Les cercles qui correspondent à cette racine ont leurs centres appartenant à la série linéaire $\lambda_2 = 0$, et sont

déterminés par une nouvelle relation; ces cercles comprennent trois foyers proprement dits.

La relation qui détermine les rayons de ces cercles sera

$$q_4\lambda_3^2 - 2r_3\lambda_3\lambda_4 - \frac{1}{q_1}(r_3\lambda_1 - q_2\lambda_3)^2 = 0.$$

De telles séries pourront d'ailleurs encore avoir un élément double ou cuspidal.

455. Si la série f se compose d'une série cubique et de (g), son équation peut s'écrire

$$p_1\xi_1\xi_2(\xi_2^2 + \xi_3^2) - q_2\xi_1^2\xi_2^2 - q_3\xi_1^2\xi_3^2 + 2r_3\xi_1^3\xi_3 - q_4\xi_1^4 = 0,$$

en choisissant convenablement les coordonnées.

Les cycles bitangents à f sont déterminés par les équations

$$\frac{r_3^2}{(\rho - q_2)(\rho - q_3)} + \frac{q_4}{\rho - q_2} - \frac{\rho^2}{p_1^2} = 0,$$

$$\frac{\lambda_3^2}{(\rho - q_2)(\rho - q_3)} - \frac{2\lambda_2\lambda_1}{p_1(\rho - q_2)} - \frac{\lambda_1^2}{p_1^2} = 0,$$

$$\frac{\lambda_1}{p_1^2} + \frac{\lambda_2}{p_1(\rho - q_2)} - \frac{r_3}{\rho(\rho - q_2)(\rho - q_3)}\lambda_3 - \frac{p_1^2}{\rho(\rho - q_2)}\lambda_4 = 0;$$

les propriétés générales subsistent; mais ici les séries (D_i) sont paraboliques, ayant d'ailleurs pour foyer commun le foyer singulier de f; les centres des cercles principaux appartiennent à f, et les éléments tangents à f correspondants contiennent l'élément de f, autre que les éléments de l'absolu, appartenant à (g).

Les cas particuliers se discutent sans peine.

456. Ce que nous venons de dire sur les séries orientées du second degré de seconde espèce nous fait connaître les rapports mutuels qui existent entre les systèmes de séries quadratiques doublement tangentes à une série quartique douée de deux éléments doubles, qui contiennent ces éléments doubles; inversement, on pourra transporter à l'étude de ces séries les théorèmes généraux que nous avons rencontrés dans l'étude des séries quadratiques quadruplement tangentes à une série quartique possédant deux éléments doubles. Les réseaux définis par ces séries quadratiques, quand elles contiennent les éléments doubles, ont

précisément pour jacobiennes respectives les cercles principaux de la série f, d'où une série de propositions faciles à énoncer.

Tout ceci s'applique aussi aux séries quadratiques doublement tangentes à une série cubique et contenant deux éléments donnés de cette série.

457. L'équation d'une série orientée du second degré et de seconde espèce peut s'écrire

$$f(A'_1, A'_2, A'_3, A'_4) = 0,$$

f étant une forme quadratique des A'_i, qui sont des fonctions linéaires des coordonnées cycliques ordinaires α_1, α_2, α_3, α_4. En spécifiant les coordonnées comme dans le cas particulier qui termine le n° 432, nous pouvons prendre

$$\alpha_1 = 2\xi_2\xi_3, \qquad \alpha_2 = -2\xi_1\xi_3, \qquad \alpha_3 = -2\xi_1\xi_2, \qquad \alpha_4 = \xi_1^2,$$

l'absolu étant $F = -2x_2x_3$.

Si l'on considère un élément (A') de coordonnées ordinaires (ξ), et un élément tangent au cycle $A'_i = 0$ contenant (A'), en désignant par t_i la distance de (A') à l'élément de contact de cet élément tangent, et par φ'_i le coefficient de α_1 dans la fonction linéaire A'_i, on a

$$t_i^2 = \lambda^2 \frac{A'_i}{\varphi'_i \xi_1^2};$$

si le cercle $A'_i = 0$ est de rayon nul, cette formule subsiste, t_i étant la distance de (A') au centre du cercle. Si le cercle $A'_i = 0$ est décomposable en un élément de coordonnées (x') et (g), on a, si t_i est la distance de (A') à (x'),

$$t_i = \lambda \frac{A'_i}{\xi_1^2 \sqrt{-F_{x'}}};$$

si le cercle $A'_i = 0$ est l'absolu, on a

$$1 = \frac{A'_i}{\varphi''_i \xi_1^2},$$

φ''_i étant le coefficient de α_4 dans A'_i.

De ces résultats, on tirera, comme aux n°s 419 et suivants, la

définition de la série f, à l'aide de propriétés métriques simples; le passage du cas général traité au Chapitre précédent au cas particulier qui nous occupe ici n'offre aucune difficulté, et l'on retrouve en particulier sans peine les propriétés métriques connues des séries quadratiques.

FIN DU TOME PREMIER.

TABLE DES MATIÈRES
DU TOME I.

LIVRE I.

LA GÉOMÉTRIE BINAIRE.

LIVRE II.

LA GÉOMÉTRIE TERNAIRE.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME I.

26495 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.